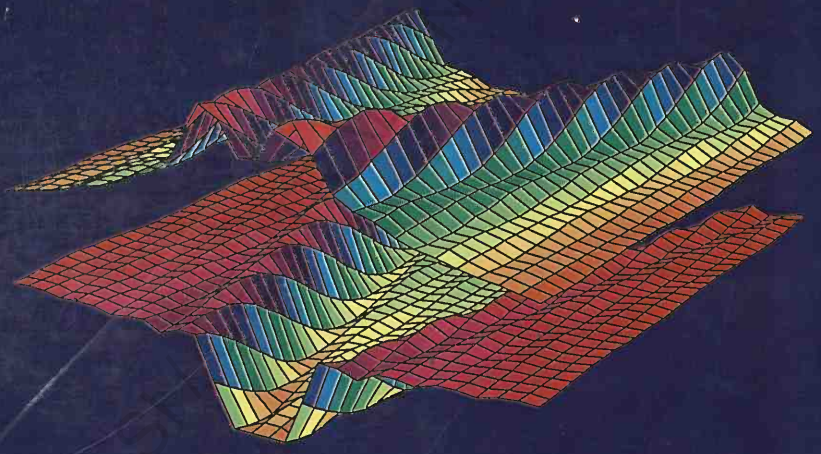
Ciprian DARIESCU Marina Aura DARIESCU

Ioan GOTTLIEB

CÂMPURI CUANTICE LIBERE



11-20.164

Editura BIT
Iaşi

II-20164

Donație pentru Biblioteca din partea autorilor,
12 feb 2013

CÂMPURI CUANTICE

LIBERE

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ciprian DARIESCU Marina-Aura DARIESCU
Ioan GOTTLIEB

CÂMPURI CUANTICE LIBERE

666705
B.C.U. IASI

Editura BIT
1998

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Editura BIT • Iaşi
6600, Iaşi, Dimineţii 12, 790, C, II, 7; CP 1668, OP 7
Tel./fax: 032.122461
Pagere^{CNM}: 032.215010, 032.215177, #20400, #20438

Consilier editorial
CPI fiz. *Corneliu A. TOCAN*

Referenţi ştiinţifici
Prof. dr. *Ioan MERCHEŞ*
Prof. dr. *Zoltán GÁBOS*

Redactor: Fiz. *Anca TOCAN*

© *Toate drepturile sunt rezervate autorilor.*

Dariescu, Ciprian. Dariescu, Marina-Aura. Gottlieb, Ioan.
Câmpuri cuantice libere.
BIT, Iaşi, 1998. 582 pagini format *in 12.*
6 capitole. 22 figuri. Bibliografie. Index. Biografii autori.

Prezenta monografie îşi propune să realizeze o expunere sistematică a noţiunilor de bază şi a metodelor moderne de cuantificare a principalelor câmpuri. Utilizând un limbaj accesibil, lucrarea se adresează studenţilor din anii terminali ai Facultăţilor de Fizică şi Matematică, precum şi tuturor celor care doresc să aprofundeze acest domeniu al fizicii teoretice.

ISBN: 973-9327-29-x

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

A doua cuantificare *a scos*
***din neant un întreg Univers*[1]**

Cuvânt Înainte

În deceniul şapte, în lume, existau deja câteva tratate consacrate care abordau Teoriile Cuantice de Câmp pe baza fundamentului solid al Electrodinamicii Cuantice, a cărei spectaculoasă confirmare experimentală, printr-o deplină concordanţă (cu 8 zecimale exacte) a valorilor teoretice şi experimentale ale constantei structurii fine, justifica necesitatea celei de a doua cuantificări. Apariţia, în 1954, a lucrării lui C.N. Yang şi R.L. Mills a deschis era teoriilor *gauge*, revoluţionând întreaga fizică, prin crearea cadrului necesar elaborării unor teorii similare Electrodinamicii Cuantice şi pentru celelalte tipuri de interacţiuni, precum şi tratării lor într-o manieră unitară. În contextul frământat al fizicii contemporane, s-a impus o regândire a Teoriilor Cuantice de Câmp - despre care N. Bohr spunea: *Anyone who is not shocked by the quantum theory does not understand it*[2] – într-o manieră modernă, care să reflecte noua viziune asupra lumii subatomice, oferită de Modelul Standard de unificare a trei din cele patru interacţiuni fundamentale.

Problema trecerii de la Relativitatea Specială la cea Generală impune o formă modificată a teoriilor lui Yang şi Mills, prin utilizarea grupurilor Lie omogene şi neomogene, care să acţioneze atât pe spaţiu-timp, cât şi pe câmpurile dinamice, creându-se astfel posibilitatea elaborării unor teorii *gauge* extinse pentru gravitaţie şi restul materiei. Ideea formulării unor teorii de câmp pe varietăţi spaţio-temporale generale este una din priorităţile fizicii teoretice ale acestui sfârşit de secol, constituindu-se ca un omagiu adresat lui Albert Einstein, ai cărui ultimi 35 de ani de viaţă au fost dedicaţi Marii Teorii Unitare.

[1] Parafrazarea unui fragment din scrisoarea trimisă de János Bolyai tatălui său, în 1823, anunţându-l descoperirea geometriilor neeuclidiene.

[2] Cine nu este şocat de teoria cuantică înseamnă că nu o înţelege.

BCU

Toate acestea au schimbat radical imaginea noastră despre evoluţia Universului după momentul *Big-Bang*, teoriile *gauge*, ca "teorii universale", dominând acum nu numai fizica particulelor elementare, unde rezultatele teoretice şi experimentale au fost încununate cu o serie de premii Nobel, dar şi alte arii ale fizicii, de la cosmologie până la fizica atomului.

Deşi, în ultimii zece ani, în edituri de prestigiu din lume au văzut lumina tiparului cărţi valoroase dedicate acestor teorii, ele lipsesc, din păcate, din librăriile noastre. Mai mult, ultima carte românească de specialitate apărută în editură centrală şi aparţinând profesorului Valer Novacu, are deja 15 ani.

La Facultatea de Fizică din Iaşi, acest domeniu are o îndelungată tradiţie, primul curs de Teoria Cuantică a Câmpurilor fiind iniţiat în anul universitar 1963-64 de profesorul Ioan Gottlieb, pe atunci lector, ajuns Şeful Catedrei de Fizică Teoretică şi Structura Materiei în urma decesului prematur, la numai 50 de ani, a mult regretatului prof. dr. Teofil T. Vescan. Fascicula, apărută în 1975, având ca autori pe Ioan Gottlieb şi Ioan Mercheş, este dedicată cuantificării câmpurilor libere şi înglobează o experienţă de peste 10 ani în predarea acestei discipline. Scrisă într-o manieră originală prin dezvoltarea formalismului cuantificării canonice în spaţiul euclidian complex, deci cu signatura $+2$ pe R^4, datorită tradiţiei de cercetare în Teoria Relativităţii Generale a Catedrei, cartea oferă deschideri spre generalizări şi sintetizează o serie întreagă de rezultate cunoscute la vremea aceea. După cum era firesc, schimbările majore din fizica teoretică a ultimelor decenii au determinat o reactualizare a cursului menţionat, prin utilizarea unor metode moderne din Geometria Diferenţială, aplicate în teoria câmpurilor, în special prin tehnica aşa-numitei "formulări libere de coordonate". În cazul varietăţilor pseudo-riemanniene 4-dimensionale, aceasta se referă la introducerea bazelor neolonome rigide, aşa-numiţii tetrazi, care permit reformularea suplă, local (aparent) minkowskiană, a vechilor teorii în baze de coordonate. În acelaşi timp, prin ortogona-

lizarea la $SO(3,1)$ a grupului general liniar al reperelor canonice, sunt rezolvate dintr-o dată – am putea spune magistral – atât tratarea consistentă geometro-dinamică a câmpurilor spin-tensoriale, cât şi exprimarea extensiunilor post-einsteiniene ale Teoriei Relativităţii în termenii geometriei de *gauge*-invarianţă. În acest context generalizator, se reimpune utilizarea convenţiei de signatură $+2$ a spaţiu-timpului (spre deosebire de încetăţenita -2 de la Modelul Standard al interacţiunilor electroslabe şi tari) care permite, în principiu, transpunerea rezultatelor obţinute şi în cadrul teoriilor cuantice de câmp pe spaţiu-timp curb.

Expunerea sistematică, pas cu pas, a noţiunilor de bază şi a metodelor moderne de cuantificare a principalelor câmpuri face ca lucrarea de faţă să fie accesibilă studenţilor din anii terminali ai Facultăţilor de Fizică şi Matematică, precum şi celor ce posedă cunoştinţe medii de teorii clasice de câmp, Mecanică Cuantică şi Geometrie Diferenţială. De altfel, o prezentare sintetică a unor noţiuni de Relativitate Generală, teoria grupurilor Lie, precum şi a Modelului Standard, constituie subiectul primului capitol. În capitolul 2, cititorului aflat la început de drum în domeniu îi argumentăm necesitatea cuantificării câmpurilor, făcând şi o trecere în revistă a principalelor metode de cuantificare. Dintre acestea, metoda cuantificării canonice este dezvoltată în capitolele 3, 4 şi 5, dedicate câmpurilor de spin 0, 1/2 şi 1, iar formalismul integralei de drum constituie subiectul ultimului capitol. Menţionăm că fiecare capitol poate fi parcurs independent de celelalte, fiind scris într-o manieră de sine stătătoare, cu prezentarea detaliată a noţiunilor implicate, evitându-se trimiterile excesive la formulele introduse în capitole anterioare.

Conştienţi de faptul că a scrie o carte ce dezvoltă într-o perspectivă modernă fundamentele unui domeniu este un act temerar, ea trebuind să îşi dovedească utilitatea atât pentru începători, cât şi pentru cercetătorii formaţi, suntem deschişi sugestiilor şi criticilor constructive.

Iaşi, August 1998 *Autorii*

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CUPRINS

1. CÂMPURI CLASICE 3
   1.1 Elemente de geometro-dinamică U_4 3
   1.2 Simetrii externe 22
   1.3 Simetrii interne 35
   1.4 Principiul teoriilor de etalonare 52
   1.5 Ruperea spontană de simetrie 61

2. PROBLEME GENERALE ALE CUANTIFICĂRII CÂMPULUI 75
   2.1 Necesitatea cuantificării câmpului 75
   2.2 Relaţii de comutare şi anticomutare. Operatori de emisie şi de absorbţie 82
   2.3 Relaţiile de comutare. Statistica Bose-Einstein 89
   2.4 Relaţiile de anticomutare. Statistica Fermi-Dirac 95
   2.5 Alte metode de cuantificare 99

3. CUANTIFICAREA CÂMPULUI SCALAR 105
   3.1 Formalismul lagrangeian 124
   3.2 A doua cuantificare 158
   3.3 Produse de operatori 249

4. CUANTIFICAREA CÂMPULUI SPINORIAL 265
   4.1 Ecuaţia Dirac şi algebra matricelor γ 265
   4.2 Formalismul lagrangeian 274
   4.3 Sistemul fundamental de soluţii şi forma generală a funcţiilor de stare 289
   4.4 A doua cuantificare 313

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5. CUANTIFICAREA CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC 395
5.1 Câmpul electromagnetic în etalonare radiativă 395
5.2 Cuantificarea câmpului de radiaţie (metoda canonică necovariantă) 425
5.3 Cuantificarea covariant-canonică a câmpului electromagnetic 449

6. CUANTIFICAREA CÂMPURILOR LIBERE PRIN METODA INTEGRALEI FUNCŢIONALE 529
6.1 Utilizarea metodei integralei de drum în cuantificarea câmpurilor scalare şi spinoriale libere 529
6.2 Cuantificarea câmpurilor de etalonare 555

BIBLIOGRAFIE 567

INDEX 573

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul 1

CÂMPURI CLASICE

1.1 Elemente de geometro-dinamică U_4

În acest paragraf, dedicat teoriei clasice a câmpurilor materiale, vom prezenta succint formalismul lagrangeian şi obţinerea ecuaţiilor de câmp manifest $SO(3,1)$ *gauge*-covariante şi vom dezvolta principiul variaţional în termenii formalismului tetradic, insistând asupra tensorului de contorsiune ca element geometro-dinamizator al densităţii de spin a câmpurilor sursă şi asupra formei "quasi-einsteiniene" a ecuaţiilor de câmp ale teoriei U_4 , care subliniază forma generală a tensorului conservativ impuls-energie al materiei. Deoarece o prezentare detaliată ar putea constitui subiectul unui tratat dedicat teoriilor einsteiniene extinse, depăşind cu mult cadrul lucrării de faţă, recomandăm cititorului interesat o scurtă listă bibliografică, [9, 12, 13, 20, 30, 34, 36, 37, 42, 45, 51, 58, 61, 62, 63, 65], care abordează aceste chestiuni într-o manieră modernă, accesibilă totuşi cu un bagaj mediu de cunoştinţe de Geometrie Diferenţială şi Relativitate Generală.

BCU IASI / COLECTIA UNIVERSITY LIBRARY

A. Ecuaţiile Euler-Lagrange manifest U_4-covariante pentru câmpurile materiale

În acest paragraf ne propunem să dezvoltăm, în acord cu principiul echivalenţei în exprimare locală [8, 35, 38, 39, 59], formalismul lagrangeian al teoriilor clasice de câmp pe structuri *background* de tip Riemann-Cartan, prin reformularea manifest U_4-covariantă a principiului variaţional al lui Hamilton pentru câmpurile materiale libere.

Pentru început, să reamintim procedeul matematic coerent de definire a funcţionalei acţiune $S_{(m)}$ pentru câmpurile materiale ψ, care evoluează în spaţiu-timpul $(M, \mathbf{g})$. Având în vedere transformarea componentelor tensorului metric fundamental $\mathbf{g}$,

$$g_{ik} = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^k} \bar{g}_{lm} \ ; \ i,k,l,m, = \overline{1,4}, \tag{1.1}$$

sub acţiunea transformării locale de coordonate

$$\bar{x}^i = \varphi^i(x^k) \ ; \ i,k = \overline{1,4}, \tag{1.2}$$

rezultă imediat relaţia de legătură între $\sqrt{-g}$, $\sqrt{-\bar{g}}$ şi jacobianul transformării $J = \det\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right)$, adică

$$\sqrt{-g} = \det\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right) \sqrt{-\bar{g}} \, . \tag{1.3}$$

Înmulţind ambii membri ai relaţiei (1.3) cu cuadrivolumul minkowskian

$$d^4x = \frac{1}{4!} \varepsilon_{ijkl} \, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l \ , \ \varepsilon_{1234} = -1 \, , \tag{1.4}$$

se obţine

$$\frac{1}{4!} \sqrt{-g} \, \varepsilon_{ijkl} \, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l = \\ = \frac{1}{4!} \sqrt{-\bar{g}} \, \varepsilon_{ijkl} \, d\bar{x}^i \wedge d\bar{x}^j \wedge d\bar{x}^k \wedge d\bar{x}^l \, , \tag{1.5}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

deci caracterul invariant al 4-formei volum

$$d\Omega = \sqrt{-g}\, d^4x = -\sqrt{-g}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \tag{1.6}$$

corespunzătoare metricii g a spaţiu-timpului (M, g).

Considerând $U \subset M$, domeniul unei hărţi locale, corespunzătoare coordonatelor $(x^i)_{i=\overline{1,4}}$, şi f, o funcţie continuă pe M cu $supp(f)$[1] $\subset U_4$, rezultă din (1.5) că integrala

$$\int_{(M)} f\, d\Omega = \int \sqrt{-g}\, f(x)\, d^4x \tag{1.7}$$

este independentă de alegerea sistemului de coordonate locale. În cazul general, când suportul compact al funcţiei continue f nu este conţinut în domeniul U al unei singure hărţi locale, integrala (1.7) se defineşte prin intermediul unei partiţii a unităţii. Astfel, fie $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas de clasa C^∞ al lui M, astfel încât $(U_i)_{i\in I}$ este o acoperire local finită, şi fie $(h_i)_{i\in I}$ o familie de funcţii diferenţiabile pe M, satisfăcând proprietăţile:

a) $h_i(x) \geq 0$ pentru oricare punct $x \in M$;

b) $supp(h_i) \subseteq U_i$;

c) $\sum_{i\in I} h_i(x) = 1$ pentru oricare punct $x \in M$.

Cum $supp(f)$ este compact, iar $(U_i)_{i\in I}$ este o acoperire local finită, rezultă că numărul "deschişilor" U_i pentru care $U_i \cap supp(f) \neq \Phi$ este finit. Deoarece pentru $h_i f \neq 0$ avem $supp(h_i f) \subset U_i$, rezultă, utilizând proprietatea c),

$$f\, d\Omega = \Sigma\, h_i\, f\, d\Omega\,, \tag{1.8}$$

adică $f\, d\Omega$ este o sumă finită de 4-forme, fiecare având suportul într-o singură hartă U_i. Prin urmare, putem defini integrala

$$\int_{(M)} f\, d\Omega = \sum_{i\in I} \int_{(M)} h_i\, f\, d\Omega\,, \tag{1.9}$$

[1] suportul funcţiei f

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

care este independentă de alegerea partiţiei unităţii şi, în plus, satisface următoarele proprietăţi:

(i) $\int_{(M)} [\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2]\, d\Omega = \alpha_1 \int_{(M)} f_1\, d\Omega + \alpha_2 \int_{(M)} f_2\, d\Omega$;
$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $f_1\, d\Omega, f_2\, d\Omega \in \Lambda_4(M)$[2] ;

(ii) dacă $\varphi : M \to N$ este un difeomorfism ce conservă orientarea, atunci

$$\int_{(M)} \varphi^*[f\, d\Omega] = \int_{(N)} f\, d\Omega\,, \quad f\, d\Omega \in \Lambda_4(N)\,;$$

(iii) dacă orientarea varietăţii lorentziene M este schimbată, atunci integrala schimbă de semn, adică
$\int_{(M;-O)} f\, d\Omega = -\int_{(M;O)} f\, d\Omega$, O este orientarea varietăţii M.

Se observă imediat din proprietatea (i) că

$$\mathrm{F}[f] = \int_{(M)} f\, d\Omega \tag{1.10}$$

este o funcţională liniară, definită pe mulţimea funcţiilor continue pe M şi cu suport compact.

Fără a restrânge prea mult generalitatea formulării lagrangeiene a teoriei de câmp pentru câmpurile materiale, să presupunem contribuţia acestora ca fiind descrisă de câmpul tensorial Ψ, exprimat local prin intermediul componentelor $(\psi^{i_1 \cdots i_r}(x))$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1,4}$. Postularea principiului echivalenţei în formulare locală impune cuplarea la spaţiu-timpul Riemann-Cartan a câmpului material Ψ prin intermediul tuturor gradelor geometrice de libertate, atât de tip translaţional-rotaţional extern, reflectate de tensorul metric fundamental g, cât şi de tip rotaţional-intern, reflectate de tensorul K al contorsiunii.

Cu alte cuvinte, dacă în densitatea relativist restrâns invariantă de lagrangeian $\overset{0}{\mathcal{L}}_{(m)}\ (\psi, \partial\psi)$ a câmpului Ψ pe spaţiu-timpul Minkowski,

[2] $\Lambda_p(M)$ este mulţimea p formelor pe varietatea M

câmpul material este prezent împreună cu derivatele sale parţiale de ordinul I, în densitatea de lagrangeian U_4-generalizată, $\mathcal{L}_{(m)}(\psi, \nabla\psi)$, câmpul material va fi prezent împreună cu derivatele sale covariante induse de conexiunea liniară ∇ de tip U_4, definită pe varietatea spaţio-temporală (M, g). Analog definiţiei (1.10) a funcţionalei F, se poate defini funcţionala acţiune $S_{(m)}[\Psi]$ a câmpului sursă Ψ, adică

$$S_{(m)}[\Psi] = \int_{(\mathcal{D})} \mathcal{L}_{(m)}(\psi, \nabla\psi)\, d\Omega\,, \tag{1.11}$$

unde, pentru cele ce vor urma, definim (1.11) pe o regiune spaţio-temporală $\mathcal{D} \subset M$, cu frontieră $\partial\mathcal{D}$ netedă (pe porţiuni) şi închidere $\bar{\mathcal{D}}$ compactă.

Pentru deducerea expresiei concrete a ecuaţiilor Euler-Lagrange, manifest U_4-covariante, să aplicăm principiul variaţional al lui Hamilton acţiunii $S_{(m)}[\Psi]$, în raport cu variaţiile virtuale $\delta\psi$ care satisfac condiţia $[\delta\psi]_{\partial\mathcal{D}} \equiv 0$. În acest fel, avem

$$\delta_\psi S_{(m)}[\Psi] = \int_{(\mathcal{D})} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi^{i_1\cdots i_r}} \delta\psi^{i_1\cdots i_r} + \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi^{i_1\cdots i_r}_{;k}} \delta\psi^{i_1\cdots i_r}_{;k} \right] d\Omega = 0\,. \tag{1.12}$$

Calculul variaţiei $\delta\left(\psi^{i_1\cdots i_r}_{;k}\right)$ se efectuează imediat, observând caracterul liniar al acţiunii acesteia asupra componentelor $(\psi^{\cdots})$ ale câmpului tensorial Ψ, implicate în derivarea U_4-covariantă "$_{;k}$", adică

$$\begin{aligned} \delta\left(\psi^{i_1\cdots i_r}_{;k}\right) &= \delta\left[\psi^{i_1\cdots i_r}_{,k} + \psi^{l\cdots i_r}\Gamma^{i_1}_{\cdot lk} + \ldots + \psi^{i_1\cdots l}\Gamma^{i_r}_{\cdot lk}\right] = \\ &= (\delta\psi^{i_1\cdots i_r})_{,k} + \delta\psi^{l\cdots i_r}\Gamma^{i_1}_{\cdot lk} + \cdots + \delta\left(\psi^{i_1\cdots l}\right)\Gamma^{i_r}_{\cdot lk}\,, \end{aligned}$$

adică

$$\delta(\psi^{i_1\cdots i_r}_{;k}) = (\delta\psi^{i_1\cdots i_r})_{;k}\,. \tag{1.13}$$

Introducând impulsurile canonice

$$\pi_{i_1\cdots i_r\cdot}^{\;\;\;k} = \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi^{i_1\cdots i_r}_{;k}} \tag{1.14}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cu ajutorul relaţiei (1.13), expresia (1.12) devine

$$\int_{(\mathcal{D})} \pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ k}\,(\delta\psi^{i_1\cdots i_r})_{;k}\,d\Omega + \int_{(\mathcal{D})} \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi^{i_1\cdots i_r}}\,\delta\psi^{i_1\cdots i_r}\,d\Omega = 0\,,$$

adică

$$\int_{(\mathcal{D})} [\pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ k}\delta\psi^{i_1\cdots i_r}]_{;k}\,d\Omega - \int_{(\mathcal{D})} \pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ k}{}_{;k}\delta\psi^{i_1\cdots i_r}\,d\Omega +$$
$$+ \int_{(\mathcal{D})} \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi^{i_1\cdots i_r}}\,\delta\psi^{i_1\cdots i_r}\,d\Omega = 0\,,$$

ceea ce se poate scrie foarte sugestiv sub forma

$$\int_{(\mathcal{D})} \left[\pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ k}{}_{;k} - \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi^{i_1\cdots i_r}}\right] \delta\psi^{i_1\cdots i_r}\,d\Omega =$$
$$= \int_{(\mathcal{D})} [\pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ k}\,\delta\psi^{i_1\cdots i_r}]_{;k}\,d\Omega\,. \tag{1.15}$$

Având în vedere caracterul U_4 al conexiunii liniare ∇, să ne ocupăm în mod detaliat de analiza integralei din membrul drept al ecuaţiei (1.13), deoarece, după cum vom vedea imediat, aplicarea directă a teoremei Stokes generalizate nu este posibilă. Utilizând descompunerea coeficienţilor conexiunii Riemann-Cartan în raport cu coeficienţii conexiunii Levi-Civita şi componentele tensorului contorsiunii

$$\Gamma^i_{\cdot jk} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\ i}_{\cdot jk} + K^i_{\cdot jk}$$

obţinem

$$\int_{(\mathcal{D})} [\pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ k}\,\delta\psi^{i_1\cdots i_r}]_{;k}\,d\Omega =$$
$$= \int_{(\mathcal{D})} \left\{[\pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ k}\delta\psi^{i_1\cdots i_r}]_{,k} + \pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ l}\,\delta\psi^{i_1\cdots i_r}\left[\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\ k}_{\cdot lk} + K^k_{\cdot lk}\right]\right\} d\Omega =$$
$$= \int_{(\mathcal{D})} \left\{\sqrt{-g}\,[\pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ k}\,\delta\psi^{i_1\cdots i_r}]_{,k} + \pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ l}\,\delta\psi^{i_1\cdots i_r}(\sqrt{-g})_{,l}\right\} d^4x +$$
$$+ \int_{(\mathcal{D})} \pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ l}\,\delta\psi^{i_1\cdots i_r}T_l\,d\Omega\,, \tag{1.16}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde am folosit expresia (1.6), împreună cu relaţiile bine cunoscute

$$\mathring{\Gamma}^{\ k}_{\cdot lk} = (\ln\sqrt{-g})_{,l} \ ; \ K^k_{\cdot lk} = T_l \ ; \ T_l = T^m_{\cdot ml} \, .$$

În acest fel, ecuaţia (1.16) devine

$$\int_{(\mathcal{D})} [\pi_{i_1\cdots i_r} \, \delta\psi^{i_1\cdots i_r}]_{;k} \, d\Omega =$$

$$= \int_{(\mathcal{D})} \frac{1}{\sqrt{-g}} \{\pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ \ k} \, \delta\psi^{i_1\cdots i_r} \sqrt{-g}\}_{,k} \, d\Omega + \int_{\mathcal{D}} \pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ \ k} T_k \, \delta\psi^{i_1\cdots i_r} \, d\Omega \tag{1.17}$$

şi recunoaştem în termenul întâi al membrului drept expresia cuadridivergenţei Levi-Civita, în exprimare locală, în raport cu care aplicăm teorema Stokes generalizată, adică

$$\int_{(\mathcal{D})} \frac{1}{\sqrt{-g}} \{\sqrt{-g}\pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ \ k} \, \delta\psi^{i_1\cdots i_r}\}_{,k} \, d\Omega = \int_{\partial\mathcal{D}} \pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ \ k} \, \delta\psi^{i_1\cdots i_r} \, d\Sigma_k \equiv 0 \, . \tag{1.18}$$

Rezultatul (1.18) conduce imediat la forma definitivă a relaţiei (1.17), anume

$$\int_{(\mathcal{D})} [\pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ \ k} \, \delta\psi^{i_1\cdots i_r}]_{;k} \, d\Omega = \int_{(\mathcal{D})} \pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ \ k} T_k \, \delta\psi^{i_1\cdots i_r} \, d\Omega \tag{1.17'}$$

şi prin utilizarea ei în ecuaţia integrală de staţionaritate a acţiunii $S_{(m)}[\Psi]$ (1.15), obţinem

$$\int_{(\mathcal{D})} \left[\pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ \ k}{}_{;k} - \frac{\partial\mathcal{L}_{(m)}}{\partial\psi^{i_1\cdots i_r}}\right] \delta\psi^{i_1\cdots i_r} \, d\Omega = \int_{(\mathcal{D})} \pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ \ k} T_k \, \delta\psi^{i_1\cdots i_r} \, d\Omega \, . \tag{1.19}$$

Deoarece variaţiile $\delta\psi$ sunt arbitrare în interiorul domeniului $\mathcal{D}$, iar acesta este oarecare (în cadrul condiţiilor impuse: $\partial\mathcal{D}$ netedă şi $\bar{\mathcal{D}}$ compactă), obţinem exprimarea locală a ecuaţiei (1.19), adică ecuaţiile Euler-Lagrange U_4-generalizate

$$\pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ \ k}{}_{;k} - \frac{\partial\mathcal{L}_{(m)}}{\partial\psi^{i_1\cdots i_r}} = \pi_{i_1\cdots i_r}^{\ \ \ \ \ k} T_k \overset{\text{sau}}{=} \pi^k_{*\,k} - \frac{\partial\mathcal{L}_{(m)}}{\partial\Psi} = 0 \tag{1.20}$$

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI

BCU „M. EMINESCU" IAŞI

pentru câmpul material $\Psi \in \mathcal{T}^{(r,0)}(M)$. Din procedeul utilizat în deducerea ecuaţiilor (1.20), este limpede că forma acestora rămâne valabilă pentru orice câmp tensorial Ψ de tip (r,s) peste M, adică $\Psi \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M), \forall r,s \geq 0$.

În încheierea acestui subparagraf, să revenim la funcţionala acţiune (1.11) şi să exprimăm principiul variaţional în formulare tetradică, Lorentz-*gauge* invariantă, pentru cazul general când câmpul material este un element al spaţiului total $V_r = \cup_{x\in M} V_{r,x}$ pe care acţionează o reprezentare a grupului *gauge* $SO(3,1)$. Fie, pentru aceasta, câmpurile tetradice pseudo-ortonormale $\{\vec{e}_a\}_{a=\overline{1,4}}$, care alcătuiesc baza $\mathcal{B}$ a secţiunilor fibratului tangent $T(M)$, şi câmpurile tetradice duale $\{\omega^a\}_{a=\overline{1,4}}$; $<\omega^a, \vec{e}_b> = \delta^a_{\cdot b}$, $\forall a,b = \overline{1,4}$, care alcătuiesc baza $\mathcal{B}^*$ pentru secţiunile fibratului cotangent $T^*(M)$. Cu ajutorul matricelor S^{ab} ale reprezentării acţiunii infinitezimale a grupului Lorentz asupra câmpului Ψ şi a coeficienţilor de spin ai ∇-conexiunii U_4, derivata covariantă a câmpului material Ψ se scrie sub forma

$$\nabla_c\psi = \psi_{|c} + \Gamma_c\psi\,, \text{ unde } \begin{cases} \psi_{|c} &= \vec{e}_c\psi \\ \Gamma_c &= \Gamma_{abc}S^{ab}, \end{cases} \tag{1.21}$$

S^{ab} fiind generatorii infinitezimali ai grupului Lorentz. Pentru câmpul $\bar{\psi}$, conjugat în sens generalizat, derivata covariantă are expresia

$$\nabla_c\bar{\psi} = \bar{\psi}_{|c} + \bar{\psi}\bar{\Gamma}_c\,, \text{ unde } \bar{\Gamma}_c = \Gamma_{abc}\bar{S}^{ab}. \tag{1.21'}$$

Variaţiile virtuale $\delta[\nabla_c\psi]$ şi $\delta[\nabla_c\bar{\psi}]$ se explicitează imediat din (1.21), (1.21') ca fiind

$$\delta[\nabla_c\psi] = \nabla_c[\delta\psi] \;;\; \delta[\nabla_c\bar{\psi}] = \nabla_c[\delta\bar{\psi}]\,,$$

astfel încât variaţia funcţionalei acţiune materială $S_m[\bar{\psi},\psi]$ are expresia

$$\delta_{\bar{\psi},\psi} S_m[\bar{\psi},\psi] = \int_{(\mathcal{D})} \left[\delta\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}_{(m)}}{\partial\bar{\psi}} + \nabla_a(\delta\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}_{(m)}}{\partial\nabla_a\bar{\psi}} + \frac{\partial\mathcal{L}_{(m)}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}_{(m)}}{\partial\nabla_a\psi}\nabla_a(\delta\psi)\right] d\Omega = 0, \tag{1.22}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ceea ce revine la

$$\int_{(\mathcal{D})} \left\{ \delta\bar{\psi} \left[\nabla_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \bar{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \bar{\psi}} \right] + \right.$$
$$\left. + \left[\nabla_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \psi} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi} \right] \delta\psi \right\} d\Omega =$$
$$= \int_{(\mathcal{D})} \left\{ \left[\delta\bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \bar{\psi}} \right]_{;a} + \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \psi} \delta\psi \right]_{;a} \right\} d\Omega =$$
$$= \int_{(\mathcal{D})} \left\{ \left[\delta\bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \bar{\psi}} \right]_{:a} + \delta\bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \bar{\psi}} T_a + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \psi} \delta\psi \right]_{:a} + \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \psi} \delta\psi T_a \right\} d\Omega , \qquad (1.23)$$

unde ";" reprezintă derivarea covariantă U_4, iar ":" este derivata covariantă Levi-Civita. Prin aplicarea teoremei Stokes generalizate primului şi celui de al treilea termen din membrul drept al lui (1.23), rezultă

$$\int_{(\mathcal{D})} \delta\bar{\psi} \left[\nabla_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \bar{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \bar{\psi}} \right] d\Omega +$$
$$+ \int_{(\mathcal{D})} \left[\nabla_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \psi} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi} \right] \delta\psi \, d\Omega =$$
$$= \int_{(\mathcal{D})} \left[\delta\bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \bar{\psi}} T_a + \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \psi} T_a \delta\psi \right] d\Omega ,$$

expresie din care (considerând câmpurile $\bar{\psi}$, ψ ca fiind independente, variaţiile $\delta\bar{\psi}$, $\delta\psi$ ca fiind arbitrare în $\mathcal{D}$, iar domeniul spaţio-temporal $\mathcal{D}$ oarecare) obţinem forma generală U_4-covariantă a ecuaţiilor Euler-Lagrange pentru Ψ

$$\text{a)} \quad \nabla_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \bar{\psi}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \bar{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \bar{\psi}} T_a ;$$
$$\text{b)} \quad \nabla_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \psi} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi} = \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \psi} T_a , \qquad (1.24)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sau

$$\begin{cases} \pi^a_{*a} - \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi} = 0 \\ \bar{\pi}^a_{*a} - \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \bar{\psi}} = 0, \end{cases}$$

unde

$$\pi^a_{*a} = \nabla_a \pi^a - \pi^a T_a$$

este derivata covariantă U_4 şi

$$\pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \bar{\psi}} \; ; \; \bar{\pi}^a = \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \nabla_a \psi} .$$

B. Variaţia virtuală în raport cu câmpurile tetradice a acţiunii $S_{(m)}$

Fără a restrânge generalitatea metodei utilizate, să considerăm materia descrisă de un câmp $\psi(x)$, $x \in M$, privit ca un multiplet pe un spaţiu de reprezentare a acţiunii infinitezimale a grupului *gauge* $SO(3,1)$. Din definiţia generală a diferenţialei exterioare covariante

$$D\psi = d\psi + \Gamma \wedge \psi \tag{1.25}$$

obţinem expresia derivatei covariante induse de ∇-conexiunea U_4, şi anume

$$\psi_{;a} = \psi_{|a} + \Gamma^b_{\cdot ca} S_b{}^c \psi \, , \tag{1.26}$$

unde $S_b{}^c$ sunt spin-reprezentorii spaţio-temporali, adică, riguros ca exprimare matematică, operatorii infinitezimali de rotaţie în spaţiul reprezentărilor grupului $SO(3,1)$ al câmpului ψ.

Expresia Lorentz *gauge*-invariantă în formulare tetradică a acţiunii câmpurilor materiale

$$S_{(m)} = \int \mathcal{L}_{(m)}[\psi, \nabla\psi] \, d\Omega \tag{1.27}$$

conţine drept element de bază densitatea invariantă de lagrangeian a câmpurilor materiale ψ, cuplate la spaţiu-timpul U_4, obligatoriu prin

conexiunea liniară metrică şi nesimetrică (Riemann-Cartan), ∇. Aceasta se comportă la variaţiile virtuale ale câmpurilor tetradice duale $\{\omega^a\}$ în acord cu relaţia

$$\delta_\omega S_{(m)} = \int_{(\mathcal{D})} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{;a}} \delta_\omega (\psi_{;a}) + \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi} \delta_\omega \psi + \mathcal{L}_{(m)} f^a_{\cdot a} \right] d\Omega \,, \quad (1.28)$$

unde s-a folosit rezultatul

$$\begin{aligned} \delta_\omega(d\Omega) &= \frac{1}{4!} \varepsilon_{abcd}\, \delta_\omega (\omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c \wedge \omega^d) = \\ &= \frac{1}{3!} \varepsilon_{abcd}\, f^a_{\cdot e} \omega^e \wedge \omega^b \wedge \omega^c \wedge \omega^d = \\ &= -\frac{1}{3!} \varepsilon^{bcde} \varepsilon_{bcda}\, f^a_{\cdot e}\, d\Omega = \frac{3!}{3!} \delta^e_{\ a} f^a_{\cdot e}\, d\Omega \,, \end{aligned}$$

adică

$$\delta_\omega(d\Omega) = f^a_{\cdot a}\, d\Omega \,. \quad (1.29)$$

Introducând notaţia

$$\pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi_{;a}} \,.$$

pentru impulsurile canonice şi efectuând o variaţie δ_ω în (1.26)

$$\delta_\omega (\psi_{;a}) = \delta \vec{e}_a(\psi) + (\delta_\omega \psi)_{|a} + \left(\delta \Gamma^b_{\cdot ca}\right) S_b^{\ c} \cdot \psi + \Gamma^b_{\cdot ca} S_b^{\ c} \cdot \delta_\omega \psi \,,$$

unde

$$(\delta \vec{e}_a)\psi = -f^d_{\cdot a} \psi_{|d} \,,$$

expresia (1.28) capătă forma

$$\begin{aligned} \delta_\omega S_{(m)} = & \int_{(\mathcal{D})} \left[-\pi^a f^d_{\cdot a} \psi_{|d} + \pi^a S^{bc} \psi\, \delta \Gamma_{bca} + \mathcal{L}_{(m)} f^a_{\cdot a} \right] d\Omega + \\ + & \int_{(\mathcal{D})} \left[\pi^a (\delta_\omega \psi)_{;a} + \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi} (\delta_\omega \psi) \right] d\Omega \,. \end{aligned} \quad (1.30)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ultima integrală din (1.30) este chiar integrala Euler-Lagrange, deoarece

$$\int_{(\mathcal{D})} \left[\pi^a (\delta_\omega \psi)_{;a} + \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi} (\delta_\omega \psi) \right] d\Omega =$$
$$= \int_{(\mathcal{D})} [\pi^a (\delta_\omega \psi)]_{;a} \, d\Omega - \int_{(\mathcal{D})} \left[\pi^a_{\ ;a} - \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi} \right] (\delta_\omega \psi) \, d\Omega =$$
$$= \int_{\partial \mathcal{D}} \pi^a (\delta_\omega \psi) \, dS_a - \int_{(\mathcal{D})} \left[\pi^a_{\ ;a} - \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi} - \pi^a T_a \right] (\delta_\omega \psi) \, d\Omega ,$$

adică, într-adevăr,

$$\int_{(\mathcal{D})} \left[\pi^a (\delta_\omega \psi)_{;a} + \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi} (\delta_\omega \psi) \right] d\Omega = - \int_{(\mathcal{D})} \left[\pi^a_{\ *a} - \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi} \right] (\delta_\omega \psi) \, d\Omega .$$

Cum câmpul ψ este *on-shell* [3], această ultimă integrală se anulează şi atunci variaţia (1.30) devine

$$\delta_\omega S_{(m)} = - \int_{(\mathcal{D})} \left[\pi^b \psi_{|a} f^a_{\ .b} - \frac{1}{2} \pi^a S^{[bc]} \psi \, \delta_\omega \Gamma_{bca} - \delta^b_{\ .a} \mathcal{L}_{(m)} f^a_{\ .b} \right] d\Omega . \tag{1.31}$$

Termenul de câmp $\pi S \psi$ din (1.31) este, de asemenea, bine cunoscut din teoria câmpurilor, reprezentând, de fapt, densitatea de spin a câmpului ψ. De aceea, vom introduce notaţia

$$\sigma^{bca} = \frac{1}{2} \pi^a S^{[bc]} \psi . \tag{1.32}$$

În subparagraful următor, va fi analizată detaliat legătura densităţii de spin (1.32) cu tensorul contorsiunii, precum şi rolul ei geometrodinamic, scos puternic în evidenţă de ecuaţiile de câmp ale sectorului spinorial al teoriei U_4-tetradice. Deocamdată, este mai important să

[3] îşi satisface propria ecuaţie de mişcare

BCU CLUJ CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

calculăm $\delta_\omega \Gamma_{bca}$, pentru a putea aduce (1.30) la o formă operabilă. Astfel, variind tetradic relaţia

$$\Gamma_{ab} = \Gamma_{abc}\,\omega^c\,,$$

avem

$$\delta_\omega\,\Gamma_{ab} = \Delta_{abc}\,\omega^c = (\delta_\omega \Gamma_{abc})\,\omega^c + \Gamma_{abc}\,f^{\cdot c}_{\cdot d}\,\omega^d$$

şi operând o contracţie în ambii membri cu câmpul tetradic $\vec{e}_f$, obţinem

$$\delta_\omega\,\Gamma_{abf} = \Delta_{abf} - f^{\cdot c}_{\cdot f}\,\Gamma_{abc}\,,$$

adică

$$\delta_\omega\,\Gamma_{abc} = \Delta_{abc} - f^{\cdot d}_{\cdot c}\,\Gamma_{abd}\,. \tag{1.33}$$

Introducând rezultatele (1.32) şi (1.33) în (1.31), obţinem

$$\delta_\omega S_{(m)} = -\int_{(\mathcal{D})} \left[\pi^b\,\psi_{|a}\,f^{\cdot a}_{\cdot b} - \sigma^{bca}\left(\Delta_{bca} - f^{\cdot d}_{\cdot a}\,\Gamma_{bcd}\right) - \delta^{\cdot b}_{\cdot a}\,\mathcal{L}_{(m)}\,f^{\cdot a}_{\cdot b}\right] d\Omega\,. \tag{1.34}$$

Dar

$$\pi^b\,\psi_{|a}\,f^{\cdot a}_{\cdot b} + \sigma^{bca}\,f^{\cdot d}_{\cdot a}\,\Gamma_{bcd} = \pi^b\,\psi_{|a}\,f^{\cdot a}_{\cdot b} + \frac{1}{2}\,\pi^a\,S^{[bc]}\,\psi\,f^{\cdot d}_{\cdot a}\,\Gamma_{bcd}\,,$$

adică

$$\pi^b\,\psi_{|a}\,f^{\cdot a}_{\cdot b} + \sigma^{bca}\,f^{\cdot d}_{\cdot a}\,\Gamma_{bcd} = \pi^b\,\left[\psi_{|a} + S^{[cd]}\,\psi\,\Gamma_{cda}\right] f^{\cdot a}_{\cdot b}\,,$$

ceea ce înseamnă, utilizând (1.26),

$$\pi^b\,\psi_{|a}\,f^{\cdot a}_{\cdot b} + \sigma^{bca}\,f^{\cdot d}_{\cdot a}\,\Gamma_{bcd} = \pi^b\,\psi_{;a}\,f^{\cdot a}_{\cdot b}\,.$$

Înlocuind acest rezultat în (1.34), obţinem expresia aproape definitivă

$$\delta_\omega S_{(m)} = -\int_{(\mathcal{D})} \left[\pi^b\,\psi_{;a} - \delta^{\cdot b}_{\cdot a}\,\mathcal{L}_{(m)}\right] f^{\cdot a}_{\cdot b}\,d\Omega + \int_{(\mathcal{D})} \sigma^{abc}\,\Delta_{abc}\,d\Omega\,. \tag{1.35}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Sub prima integrală din membrul drept recunoaştem expresia generalizată U_4-tetradic a tensorului canonic impuls-energie, adică

$$\overset{(c)}{T}{}^{b}_{\cdot a} = \pi^{b}\,\psi_{;a} - \delta^{b}_{\cdot a}\,\mathcal{L}_{(m)}\,, \tag{1.36}$$

iar calculul celei de a doua integrale din (1.35) îl facem astfel

$$\begin{aligned}\int_{(\mathcal{D})} \sigma^{abc}\,\Delta_{abc}\,d\Omega &= -\frac{1}{2}\int_{(\mathcal{D})}\left[2\,\sigma^{abc} + 2\,\sigma^{c(ab)}\right] f_{ab;c}\,d\Omega = \\ &= -\int_{(\mathcal{D})}\left[\sigma^{abc} + \sigma^{c(ab)}\right] f_{ab;c}\,d\Omega\,,\end{aligned}$$

ceea ce conduce, prin integrare prin părţi şi utilizarea derivatei covariante conservative

$$X^{\cdots c\cdots}_{\cdots\cdots *c} = X^{\cdots c\cdots}_{\cdots\cdots ;c} - X^{\cdots c\cdots}_{\cdots\cdots} T_c \tag{1.37}$$

la

$$\int_{(\mathcal{D})} \sigma^{abc}\,\Delta_{abc}\,d\Omega = \int_{(\mathcal{D})}\left[\sigma^{abc} + \sigma^{c(ab)}\right]_{*c} f_{ab}\,d\Omega\,. \tag{1.38}$$

Mergând cu acest rezultat, împreună cu definiţia (1.36), înapoi în (1.35) şi exprimând contravariant componentele tensorilor "activi", obţinem al doilea rezultat fundamental al acestui subparagraf, şi anume variaţia virtuală în raport cu câmpurile tetradice a acţiunii materiale

$$\delta_\omega S_{(m)} = -\int_{(\mathcal{D})}\left[\overset{(c)}{T}{}^{ba} - \left(\sigma^{abc} + \sigma^{c(ab)}\right)_{*c}\right] f_{ab}\,d\Omega\,. \tag{1.39}$$

Deoarece acţiunea totală

$$S = S_{(g)} + S_{(m)} \tag{1.40}$$

a câmpului gravitaţional [12]

$$S_{(g)} = -\frac{1}{2\kappa_0}\int \mathrm{R}_{ab} \wedge *(\omega^a \wedge \omega^b)\,, \tag{1.41}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(unde "$*$" este operatorul Hodge) împreună cu sursele sale materiale, descrise de $S_{(m)}$, este staţionară în urma aplicării metodei variaţionale, rezultă

$$\delta_\omega S_{(g)} = -\delta_\omega S_{(m)}\,, \tag{1.42}$$

ceea ce conduce la ecuaţiile de câmp ale sectorului gravitaţional -U_4

$$G^{ab} - \frac{1}{2}\left[\mathcal{T}^{bac} + \mathcal{T}^{c(ba)}\right]_{*c} = \kappa_0 \overset{(c)}{T}{}^{ab} - \kappa_0\left[\sigma^{bac} + \sigma^{c(ba)}\right]_{*c} \tag{1.43}$$

unde $\mathcal{T}^{abc}$ este tensorul torsiunii modificate, definit prin formula

$$\mathcal{T}^{abc} = T^{cab} - g^{c[a}T^{b]} \text{ cu } T_a = T^b_{\cdot ba}\,, \tag{1.44}$$

în raport cu tensorul fundamental al torsiunii $T^a_{\cdot bc}$.

C. Variaţia virtuală a acţiunii $S_{(m)}$ în raport cu componentele contorsiunii

După cum vom constata imediat, deducerea expresiei corespunzătoare variaţiei virtuale a acţiunii materiei $S_{(m)}$, în raport cu componentele tetradice K_{abc} ale contorsiunii, se face foarte simplu în formalism tetradic. În primul rând, să observăm că toate câmpurile materiale ψ nu pot depinde direct de contorsiune, deoarece altfel ar fi violat chiar şi principiul echivalenţei în formulare locală. În acord cu acesta, dependenţa de contorsiune a lui $\mathcal{L}_{(m)}$ se face numai prin componentele conexiunii liniare utilizate în derivatele covariante, 1-formele Γ_{ab} ale conexiunii U_4 fiind corelate cu 1-formele conexiunii Levi-Civita $\overset{\circ}{\Gamma}_{ab}$ şi cu 1-formele contorsiunii, K_{ab}, prin relaţia foarte simplă

$$\Gamma_{ab} = \overset{\circ}{\Gamma}_{ab} + K_{ab}\,. \tag{1.45}$$

Variaţiile virtuale în raport cu câmpul contorsiunii ale 1-formelor Levi-Civita fiind zero

$$\delta_K \overset{\circ}{\Gamma}_{ab} = 0\,,$$

BCU IASI / GEN. UNIVERSITY LIBRARY

rezultă imediat formula

$$\delta_K \Gamma_{ab} = \delta \mathrm{K}_{ab} = (\delta K_{abc})\,\omega^c\,, \tag{1.46}$$

care utilizată în variaţia δ_K a lui (1.26) ne conduce la următoarea expresie a variaţiei în raport cu contorsiunea a derivatei covariante $\psi_{;a}$

$$\delta_K (\dot{\psi}_{;a}) = S^{bc}\psi\,\delta K_{bca}\,. \tag{1.47}$$

În consecinţă, variaţia acţiunii (1.27) cu componentele tetradice ale contorsiunii este

$$\delta_K S_{(m)} = \int_{(\mathcal{D})} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{;a}}\, S^{bc}\psi\,\delta K_{bca}\,d\Omega\,. \tag{1.48}$$

Introducând impulsul canonic conjugat π^a şi rearanjând indicii în ordinea δK_{abc} (lucru posibil, deoarece toţi indicii sunt muţi), obţinem

$$\delta_K S_{(m)} = \int_{(\mathcal{D})} \frac{1}{2}\,\pi^c\, S^{[ab]}\psi\,\delta K_{abc}\,d\Omega\,,$$

sau, înlocuind componentele tensorului densităţii de spin σ^{abc} date de (1.32),

$$\delta_K S_{(m)} = \int_{(\mathcal{D})} \sigma^{abc}\,\delta K_{abc}\,d\Omega\,. \tag{1.49}$$

Înainte de a corela $\delta_K S_{(g)}$ cu $\delta_K S_{(m)}$, să observăm că afirmaţiile făcute cu privire la definiţia tetradică, geometro-dinamică şi Lorentz *gauge*-invariantă a spinului (de fapt, a tensorului densităţii de spin) au acoperire, deoarece membrul stâng din (1.49) se mai poate scrie ca

$$\delta_K S_{(m)} = \int_{(\mathcal{D})} \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial K_{abc}}\,\delta K_{abc}\,d\Omega \tag{1.50}$$

şi, prin identificare cu membrul drept din (1.49), obţinem o relaţie cu mari aplicaţii în tehnica de calcul din teoria U_4-tetradică

$$\sigma^{abc} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial K}\right]^{[ab]c}\,. \tag{1.51}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ecuaţiile de câmp ale sectorului spinorial se obţin imediat din cerinţa de staţionaritate a acţiunii (1.40) la variaţiile virtuale ale componentelor tetradice ale contorsiunii, δK_{abc} , şi anume

$$\delta_K S_{(g)} = -\delta_K S_{(m)} . \tag{1.52}$$

De aici, utilizând (1.49) şi expresia variaţiei virtuale a acţiunii $S_{(g)}$ în raport cu componentele contorsiunii, dedusă printr-un procedeu similar celui prezentat mai sus [12], obţinem în exprimare contravariantă, ecuaţiile de câmp ale sectorului spinorial-U_4

$$\mathcal{T}^{abc} = 2\kappa_0 \sigma^{abc} . \tag{1.53}$$

D. Forma concretă a ecuaţiilor de câmp pentru principalele surse materiale

O primă formă a sistemului ecuaţiilor de câmp în formulare tetradică a teoriei U_4 se obţine direct, corelând ecuaţiile Euler-Lagrange de mişcare a câmpurilor sursă în Universul U_4, ecuaţiile sectorului gravitaţional (1.43) şi ecuaţiile de câmp ale sectorului spinorial (1.53), adică

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \pi^a_{;a} - \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi} = \pi^a T_a ; \\
&\text{b)}\quad G^{ab} - \frac{1}{2}\left[\mathcal{T}^{bac} + \mathcal{T}^{c(ab)}\right]_{\bullet c} = \\
&\qquad = \kappa_0 \overset{(c)}{T}{}^{ab} - \kappa_0 \left[\sigma^{bac} + \sigma^{c(ab)}\right]_{\bullet c} ; \\
&\text{c)}\quad \mathcal{T}^{abc} = 2\kappa_0 \sigma^{abc} .
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Pentru completitudinea prezentării, sintetizăm într-un singur sistem de

formule şi semnificaţiile mărimilor π, T, σ şi $\mathcal{T}$, anume

$$\text{a)}\quad \pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}_{(m)}}{\partial \psi_{;a}}\,;$$

$$\text{b)}\quad \overset{(c)}{T}{}^{ab} = \pi^a \psi^{;b} - g^{ab}\,\mathcal{L}_{(m)}\,;$$

$$\text{c)}\quad \sigma^{abc} = \frac{1}{2}\left[\frac{\delta \mathcal{L}_{(m)}}{\delta K}\right]^{[ab]c}\,;$$

$$\text{d)}\quad \mathcal{T}^{abc} = T^{abc} - g^{c[a}T^{b]}\,;\; T_a = T^b_{.ba}\,. \tag{1.55}$$

Forma completă (1.54) a sistemului de ecuaţii ale teoriei U_4 este foarte rar utilizată în aplicaţii, deoarece reclamă calculul unui număr destul de mare de mărimi fizice fundamentale, toate având caracter tensorial, deci posedând, de asemenea, un număr foarte mare de componente. Pentru evitarea acestui inconvenient, sistemul (1.54) se aduce, de obicei, la două forme echivalente, numite forma quasi-einsteiniană, respectiv forma U_4-specifică.

Pentru obţinerea formei quasi-einsteiniene, descompunem în (1.54.b) tensorul Einstein şi tensorul canonic al materiei în părţile lor simetrice şi antisimetrice. Atunci, prima identitate Bianchi contractată [13]

$$G^{[bd]} = \mathcal{T}^{dba}{}_{*a} \tag{1.56}$$

va conduce, în sectorul câmpurilor materiale, la celebra identitate Belinfante-Rosenfeld [4, 54]

$$\frac{1}{2}\overset{(c)}{T}{}^{[ab]} = \sigma^{bac}{}_{*c}\,, \tag{1.57}$$

care probează corectitudinea formulării lagrangeiene a oricărei teorii de câmp pentru câmpurile sursă ale câmpului gravitaţional. Cu alte cuvinte, dacă lagrangeianul $\mathcal{L}_{(m)}$ este corect definit, atunci mărimile $\overset{(c)}{T}$ şi σ obţinute din el trebuie să verifice (1.56).

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Revenind cu (1.57) şi (1.56) în (1.54.b) obţinem, prin luarea părţii simetrice a descompunerii ireductibile, forma quasi-einsteiniană a ecuaţiei (1.54.b), şi anume

$$\frac{1}{2}G^{(ab)} - \frac{1}{2}T^{c(ab)}{}_{*c} = \kappa_0 \left(\frac{1}{2} \overset{(c)}{T}{}^{(ab)} - \sigma^{c(ab)}{}_{*c} \right), \tag{1.58}$$

care, în membrul drept, conţine direct expresia tensorului conservativ impuls-energie-materie, adică

$$T^{ab} = \frac{1}{2} \overset{(c)}{T}{}^{(ab)} - \sigma^{c(ab)}{}_{*c}. \tag{1.59}$$

Se cade să citäm acum celebrele cuvinte ale lui F.W. Hehl, unul dintre părinţii teoriei U_4-convenţionale [37]:

> *Cunoaştem foarte puţine teorii einsteiniene extinse în care completitudinea conectării materiei la spaţiu-timp să se facă atât de frumos.*

În încheiere, să observäm că cerinţa de Lorentz-*gauge* invarianţă şi utilizarea câmpurilor tetradice drept câmpuri fundamentale ale reperelor pe varietatea spaţio-temporală fixează complet, împreună cu componentele tetradice ale contorsiunii, gradele de libertate atât ale materiei, cât şi ale spaţiu-timpului, conducând la o structură U_4 a Universului.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.2 Simetrii externe

Conceptul de simetrie are un rol deosebit în formularea teoriilor de câmp deoarece, aşa cum spunea S. Weinberg, *[...] deşi simetriile sunt ascunse privirii noastre, ele există în natură, în stare latentă [...] poate în decursul existenţei generaţiei noastre, vom fi capabili să spunem din ce cauză ceea ce vedem în imensitatea universului de galaxii şi particule este, de fapt, inevitabil.*

Simetriile unei teorii se exprimă prin invarianţa acesteia în raport cu diferite grupuri de transformări.

În teoriile cuantice de câmp, întâlnim două tipuri de simetrii:

(i) simetriile spaţio-temporale, în raport cu grupurile Lorentz şi Poincaré, având drept consecinţă legile de conservare a energiei, a impulsului şi a momentului cinetic;

(ii) simetriile interne, globale sau locale, faţă de grupuri unitare de tip $SU(N)$ şi $U(1)$, ce acţionează ca "transformări de fază" generalizate asupra funcţiilor de undă. Grupurile s-au dovedit a fi limbajul matematic natural din teoria particulelor elementare. Astfel, $SU(2)$ caracterizează invarianţa de izospin, reprezentărilor lui $SU(3)$ le sunt asociate octetul mezonic, barionic, tripletul primilor trei cuarci etc., produsele directe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ şi $SU(2) \times U(1)$ sau grupul Lie $SU(5)$ stau la baza teoriilor de unificare a trei dintre interacţiunile din natură [3, 10, 11, 49, 52, 56, 57, 66, 70].

Grupurile din a doua categorie sunt compacte, adică elementele lor se exprimă în funcţie de un număr de parametri esenţiali ce variază într-un interval finit de valori, în timp ce grupurile simetriilor spaţio-temporale sunt necompacte, domeniul de variaţie al parametrilor fiind practic infinit. Din acest motiv, este imposibilă găsirea unui grup general, mai larg, – a unui *Master Group* – ale cărui subgrupuri să fie toate cele menţionate mai sus. Unificarea grupurilor compacte şi

necompacte, interzisă de teorema Coleman-Mandula şi de alte teoreme *No-Go* şi-a găsit o rezolvare prin elaborarea, după 1970, a supersimetriei [14, 25, 52], care, deşi lipsită de o confirmare experimentală, este considerată de specialişti ca o nouă simetrie a naturii. Ea lucrează cu un formalism specific, dezvoltat într-un spaţiu multi-dimensional, denumit "superspaţiu" şi cu "supercâmpuri" ce conţin, în cadrul aceluiaşi multiplet, atât bozoni, cât şi fermioni. Aceasta oferă posibilitatea eliminării multora din divergenţele existente în cadrul teoriilor cuantice de câmp, datorită faptului că buclele bozonice şi fermionice apar cu semne opuse. Varianta *gauge* a acestei teorii este *supergravitaţia*, iar teoriile de tip *string* şi *superstring* par să modeleze toate interacţiunile fundamentale din natură. Deşi acestea din urmă rezolvă multe dintre problemele gravitaţiei clasice şi ale Modelului Standard, ele ridică altele, pe care imposibilitatea verificărilor experimentale le lasă fără răspuns.

În sfârşit, fizica contemporană priveşte cu speranţă spre o teorie de dată foarte recentă, denumită *Teoria M* (*the theory of membranes*), care, înglobând toate tipurile de teorii de superstring, are şanse să împlinească visul la care Einstein a trudit în ultimii 35 de ani de viaţă şi anume *Marea Teorie Unitară*. Dar, cum toate acestea depăşesc cu mult cadrul prezentei lucrări, să revenim la simetriile clasice, (i) şi (ii), detaliindu-le în cele ce urmează.

Grupul Lorentz

Grupul Lorentz se defineşte ca fiind grupul matricelor $\Lambda_{4\times 4}$, care transformă coordonatele spaţio-temporale $\{x^i\}_{i=\overline{1,4}} = (\vec{x}, x^4)$, lăsând invariantă expresia

$$x_i\, x^i = x'_i\, x'^i \,, \tag{2.1}$$

adică

$$\eta_{ij}\, x^i\, x^j = \eta_{kl}\, x'^k\, x'^l \,, \tag{2.2}$$

unde

$$\eta_{ij} = \mathrm{diag}\,[1,\, 1,\, 1,\, -1] \,. \tag{2.3}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Impunând transformărilor liniare

$$x'^k = \Lambda^k_{\cdot i} x^i \tag{2.4}$$

relaţia (2.2), găsim că matricele Λ au următoarea proprietate

$$\eta_{ij} = \Lambda^k_{\cdot i} \eta_{kl} \Lambda^l_{\cdot j} , \tag{2.5}$$

sau, în exprimare matriceală,

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda , \tag{2.6}$$

din care rezultă imediat că

(i) $(\det \Lambda)^2 = 1$, adică

$$\det \Lambda = \pm 1 \tag{2.7}$$

şi

(ii) $(\Lambda^4_{\cdot 4})^2 \geq 1$, adică

$$|\Lambda^4_{\cdot 4}| \geq 1 . \tag{2.8}$$

Prin analogie cu grupurile ortogonale, generând rotaţii în două sau trei dimensiuni şi notate cu $O(2)$ şi respectiv $O(3)$, vom utiliza pentru grupul Lorentz notaţia $O(3,1)$. Relaţiile (2.7) şi (2.8) pun în evidenţă următoarele subgrupuri de interes:

(i) grupul Lorentz propriu

$$L_+ = \{\Lambda \in O(3,1) \mid \det \Lambda = 1\} , \tag{2.9}$$

(ii) grupul Lorentz ortocron

$$L^\uparrow = \left\{\Lambda \in O(3,1) \mid \Lambda^4_4 \geq 1\right\} , \tag{2.10}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(iii) grupul Lorentz propriu ortocron

$$L_+^{\uparrow} = \left\{ \Lambda \in O(3,1) \,|\, \det \Lambda = 1 \,,\; \Lambda_4^4 \geq 1 \right\} . \tag{2.11}$$

După cum se cunoaşte din teoria grupurilor Lie [46, 71, 17], aplicaţia exponenţială

$$g = \exp[iX] \tag{2.12}$$

face legătura între grupul Lie şi algebra asociată acestuia, X fiind de forma

$$X = \theta^a T_a \,, \tag{2.13}$$

unde $\{\theta^a\}_{a=\overline{1,n}}$ sunt parametrii infinitezimali ai algebrei n dimensionale, iar $\{T_a\}_{a=\overline{1,n}}$ sunt generatorii acesteia, satisfăcând relaţiile de comutatori

$$\left[T^a \,, T^b\right] = i f^{abc} T_c \,, \tag{2.14}$$

în care f^{abc} sunt constantele de structură.

Elementele grupului Lorentz, exprimate infinitezimal prin

$$\Lambda^{ij} = \eta^{ij} + \omega^{ij} + \mathcal{O}(\omega^2) \tag{2.15}$$

conduc, prin înlocuirea în (2.5), la concluzia că parametrii esenţiali ai grupului, ω^{ij}, sunt antisimetrici,

$$\omega^{ij} = -\omega^{ji} \,, \tag{2.16}$$

adică grupul Lorentz este un grup Lie 6-parametric, a cărui algebră Lie asociată va avea şase generatori. Astfel, relaţia (2.12) devine

$$\Lambda = \exp\left(\frac{i}{2}\omega^{ij} L_{ij}\right) \,, \tag{2.17}$$

în care am introdus generatorii $\{L_{ij}\}$ de tip moment cinetic orbital

$$L_{ij} = x_i p_j - x_j p_i = -i\left(x_i \partial_j - x_j \partial_i\right) \,, \tag{2.18}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

satisfăcând relaţiile de comutare

$$\left[L^{ij}\,,\,L^{kl}\right] = i\left(\eta^{ik}L^{jl} - \eta^{il}L^{jk} - \eta^{jk}L^{il} + \eta^{jl}L^{ik}\right)\,. \tag{2.19}$$

La aceştia se pot adăuga operatorii de spin, notaţi cu $\{S_{ij}\}$ (de care ne vom ocupa în încheierea acestui paragraf), comutând cu $\{L_{ij}\}$ şi satisfăcând aceeaşi algebră. Prin urmare, putem utiliza ca generatori ai algebrei Lorentz combinaţiile

$$M_{ij} = L_{ij} + S_{ij}\,, \tag{2.20}$$

numite momente cinetice totale, ce satisfac, evident

$$\left[M^{ij}\,,\,M^{kl}\right] = i\left(\eta^{ik}M^{jl} - \eta^{il}M^{jk} - \eta^{jk}M^{il} + \eta^{jl}M^{ik}\right)\,, \tag{2.21}$$

sau operatorii

$$\begin{aligned} J^{\mu} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta}M_{\alpha\beta} \\ K^{\mu} &= M^{\mu 4} \end{aligned} \tag{2.22}$$

cu algebra corespunzătoare

$$\begin{aligned} [J^{\mu}\,,\,J^{\nu}] &= i\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha}J^{\alpha} \\ [K^{\mu}\,,\,K^{\nu}] &= -i\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha}J^{\alpha} \\ [J^{\mu}\,,\,K^{\nu}] &= i\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha}K^{\alpha}\,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Dacă $\{J^{\mu}\}_{\mu=\overline{1,3}}$ sunt generatorii uzuali ai grupului de rotaţii $O(3)$, în schimb $\{K^{\mu}\}_{\mu=\overline{1,3}}$, asociaţi transformărilor denumite *boosts*, nu formează o algebră Lie închisă, deoarece două transformări *boost* succesive conduc la o rotaţie obişnuită generată de J.

Putem introduce acum următoarelor combinaţii liniare ale generatorilor:

$$\begin{aligned} N^{+}_{\mu} &= \frac{1}{2}\left(J_{\mu} + iK_{\mu}\right) \\ N^{-}_{\mu} &= \frac{1}{2}\left(J_{\mu} - iK_{\mu}\right) \end{aligned} \tag{2.24}$$

BCU IASI - BIBLIOTECA UNIVERSITARA

satisfăcând relaţiile de comutare

$$\begin{aligned}\left[N_\mu^+, N_\nu^+\right] &= i\varepsilon_{\mu\nu\alpha}N_\alpha^+\\ \left[N_\mu^-, N_\nu^-\right] &= i\varepsilon_{\mu\nu\alpha}N_\alpha^-\\ \left[N_\mu^+, N_\nu^-\right] &= 0\end{aligned} \tag{2.25}$$

şi ale căror pătrate $N_\mu^+N_\mu^+$ şi $N_\mu^-N_\mu^-$ comută cu toţi generatorii grupului Lorentz, deci sunt operatori Casimir ai acestuia. Ţinând cont de (2.25), grupul Lorentz se poate scrie ca $SU(2)\otimes SU(2)$, ceea ce permite utilizarea reprezentărilor ireductibile ale grupurilor $SU(2)$ pentru construirea reprezentărilor grupului Lorentz.

În continuare, să trecem în revistă câteva proprietăţi ale grupului Poincaré, definit ca grup al tuturor transformărilor de coordonate ce lasă invariantă metrica Minkowski,

$$x'^i = \Lambda^i_{.j}x^j + a^i\,, \tag{2.26}$$

unde prima parte a membrului drept o reprezintă rotaţiile Lorentz, iar a doua parte, translaţiile spaţio-temporale. În consecinţă, grupul Poincaré va avea zece parametri infinitezimali esenţiali şi anume cei şase antisimetrici de rotaţie, $\{\omega^{ij}\}$, şi patru de translatie, $\{a^i\}$. Algebra Poincaré este generată de operatorii $\{M^{ij}, P^i\}$, cu $P^i = -i\partial_i$ asociaţi translaţiilor, satisfăcând relaţiile de comutatori

$$\begin{aligned}[M_{ij}, M_{kl}] &= i\left(\eta_{ik}M_{jl} - \eta_{il}M_{jk} - \eta_{jk}M_{il} + \eta_{jl}M_{ik}\right)\\ [M_{ij}, P_k] &= i\left(\eta_{ik}P_j - \eta_{jk}P_i\right)\\ [P_i, P_j] &= 0\,.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Pentru a construi reprezentările unui grup Lie ne sunt necesari acei operatori ce comută cu toţi generatorii algebrei Lie asociate grupului. În cazul grupurilor $SU(N)$, de dimensiune N^2-1, există $N-1$ generatori ce formează baza unei subalgebre abeliane maximale, numită *subalgebră Cartan*. În plus, există şi operatori care comută cu

toţi generatorii, fără a fi, însă, la rândul lor, generatori. Aceştia se numesc *operatori Casimir*. De exemplu, pentru grupul $SO(3)$, fiecare din cei trei generatori $\{J_\mu\}_{\mu=\overline{1,3}}$ va constitui baza unei subalgebre Cartan monodimensionale. Practic, ne fixăm asupra lui J_z şi, adăugând operatorul Casimir $\vec{J}^2$, vom caracteriza reprezentările grupului $SO(3)$ prin valorile proprii ale acestor doi operatori.

Pentru operatorii Casimir ai grupului Poincaré este firesc să verificăm dacă următoarele combinaţii: P_iP^i, $M_{ij}M^{ij}$ şi $M_{ij}P^k$ comută cu cei zece generatori. In cazul $P_iP^i = -m^2$, expresia fiind un scalar Lorentz şi comutând cu 4-impulsurile, acest lucru este evident. Pentru celelalte combinaţii, însă, această condiţie nu este satisfăcută. În schimb, se defineşte 4-vectorul

$$W^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijkl}P_jM_{kl}\,, \tag{2.28}$$

denumit operatorul Pauli-Lubanski, al cărui pătrat este cel de al doilea operator Casimir al grupului Poincaré. În referenţialul propriu al particulei de masă m şi spin s, vom avea

$$W^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{i4jk}P_4S_{jk} = -\frac{m}{2}\varepsilon^{ijk4}S_{jk}\,,$$

adică

$$\begin{aligned} W^\mu &= -\frac{m}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta}S_{\alpha\beta} = -mS^\mu \\ W^4 &= 0\,, \end{aligned} \tag{2.29}$$

unde S^μ este chiar operatorul de spin, valorile proprii ale lui W_iW^i fiind astfel

$$W_iW^i = W^\mu W^\mu = m^2s(s+1)\,. \tag{2.30}$$

Deci, într-o reprezentare, stările corespunzătoare particulelor de masă m şi spin s, având $2s+1$ componente, pentru $s_3 = -s, \ldots, s$ şi variaţia continuă a lui P^μ, vor fi indexate prin valorile proprii ale operatorilor Casimir, sub forma $|m, s\rangle$, cu $s = 0, 1/2, 1, \ldots$.

Un caz aparte îl constituie câmpurile de masă nulă, categorie din care fac parte fotonul ($s = 1$) şi neutrino ($s = 1/2$), pentru care, din $P_i^2 = -m^2 = 0$, rezultă atât $W_i^2 = 0$, cât şi $W_i P^i = 0$. Aceste relaţii nu pot fi satisfăcute simultan decât dacă cei doi operatori sunt proporţionali, adică

$$W_i = h P_i \,, \tag{2.31}$$

constanta de proporţionalitate fiind notată cu h şi denumită *elicitate* (*helicity*). Astfel, pentru particulele de masă nulă, vom avea două stări, notate cu $|h\rangle$, corespunzând cazurilor în care W_i este paralel şi, respectiv, antiparalel cu P_i. Astfel, scriindu-l pe (2.28) pentru P având doar componente spaţiale şi utilizând (2.31), obţinem

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} = \pm s \,. \tag{2.32}$$

În încheierea acestui paragraf, dedicat simetriilor externe, să deducem legile de transformare ale diferitelor tipuri de câmpuri şi ale derivatelor acestora,

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi'(x') \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &\rightarrow \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \,, \end{aligned} \tag{2.33}$$

în raport cu reprezentările grupului Lorentz. Pentru aceasta, scriem pe (2.17) sub forma

$$A(\Lambda) = e^{\omega^{ij} T_{ij}} \,, \tag{2.34}$$

în care A sunt matricele asociate elementelor grupului Lorentz într-o anumită reprezentare, iar T_{ij} corespund generatorilor algebrei Lorentz. Indiferent de ordinul tensorial al lui ϕ, relaţia

$$\phi'(x') = A \phi(x) \,, \tag{2.35}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

împreună cu exprimarea sa infinitezimală

$$\phi'(x') = \phi(x) + \omega^{ij} T_{ij}\, \phi(x)\,, \tag{2.36}$$

sau

$$\delta\phi = \omega^{ij} T_{ij}\, \phi\,, \tag{2.37}$$

reprezintă cea mai generală formă de transformare a mărimilor de câmp. Efectuând derivarea în (2.36), adică

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi'}{\partial x'^i} &= \frac{\partial \phi}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} + \omega^{kl} T_{kl} \frac{\partial \phi}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi}{\partial x^j}\omega^j_{\cdot i} + \omega^{kl} T_{kl}\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\,, \end{aligned} \tag{2.38}$$

în care ţinem cont de inversa transformării (2.4), adică

$$x^i = x'^i - \omega^i_{\cdot j}\, x'^j\,, \tag{2.39}$$

obţinem legea de transformare a derivatelor

$$\phi'_{,i} = \phi_{,i} - \phi_{,j}\,\omega^j_{\cdot i} + \omega^{kl} T_{kl}\phi_{,i}\,, \tag{2.40}$$

sau

$$\delta\phi_{,i} = -\phi_{,j}\,\omega^j_{\cdot i} + \omega^{kl} T_{kl}\phi_{,i}\,. \tag{2.41}$$

În continuare, să explicităm forma concretă a relaţiilor (2.36) şi (2.40) pentru diferite tipuri de câmpuri.

(i) Câmpul scalar se defineşte prin invarianţa

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{2.42}$$

la o transformare de coordonate (2.4), conducându-ne la soluţia

$$T_{ij} = 0 \tag{2.43}$$

pentru (2.36) şi la legea de transformare a derivatelor

$$\phi'_{,i} = \phi_{,i} - \phi_{,j}\,\omega^j_{\cdot i}\,. \tag{2.44}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(ii) Câmpul vectorial se transformă după (2.4), adică

$$V'^k = V^k + \omega^k_{\cdot l} V^l \,, \tag{2.45}$$

care, prin utilizarea simbolului lui Kronecker δ, devine

$$V'^k = V^k + \omega^{ij}\eta_{jl}\delta^k_i V^l = V^k + \frac{1}{2}\omega^{ij}\left(\eta_{lj}\delta^k_i - \eta_{li}\delta^k_j\right) V^l, \tag{2.46}$$

punând în evidenţă operatorul

$$(T_{ij})^k_l = \eta_{lj}\delta^k_i - \eta_{li}\delta^k_j \tag{2.47}$$

ce aduce pe (2.40) la forma

$$V'^k{}_{,r} = V^k{}_{,r} - V^k{}_{,l}\,\omega^l_{\cdot r} + \omega^k_{\cdot s} V^s{}_{,r} \,. \tag{2.48}$$

(iii) Câmpul tensorial de ordinul al doilea se va transforma cu câte o matrice $A(\Lambda)$ pentru fiecare indice, adică după relaţia

$$\phi'_{rs} = A^{\cdot p}_{r} A^{\cdot q}_{s} \phi_{pq} \,, \tag{2.49}$$

din care, ţinând cont de (2.15), obţinem relaţia

$$\begin{aligned}
\phi'_{rs} &= \phi_{rs} + \left(\omega^{\cdot p}_{r}\delta^q_s + \omega^{\cdot q}_{s}\delta^p_r\right)\phi_{pq} = \\
&= \phi_{rs} + \omega^{ij}\left(\eta_{ir}\delta^p_j\delta^q_s + \eta_{is}\delta^q_j\delta^p_r\right)\phi_{pq} = \\
&= \phi_{rs} + \frac{1}{2}\omega^{ij}\left(\eta_{ir}\delta^p_j\delta^q_s - \eta_{jr}\delta^p_i\delta^q_s + \eta_{is}\delta^q_j\delta^p_r - \eta_{js}\delta^q_i\delta^p_r\right)\phi_{pq} \,,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

unde în paranteză am pus în evidenţă operatorul

$$(T_{ij})^{pq}_{rs} = \eta_{ir}\delta^p_j\delta^q_s - \eta_{jr}\delta^p_i\delta^q_s + \eta_{is}\delta^q_j\delta^p_r - \eta_{js}\delta^q_i\delta^p_r \,, \tag{2.51}$$

care ne va permite să scriem legea de transformare a derivatelor sub forma

$$\phi'_{rs,l} = \phi_{rs,l} - \phi_{rs,k}\omega^k_{\cdot l} + \omega^{\cdot p}_{r}\phi_{ps,l} + \omega^{\cdot q}_{s}\phi_{rq,l} \,. \tag{2.52}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(iv) Câmpul spinorial. Vom deduce legile de transformare atât pentru

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi^3(x) \\ \psi^4(x) \end{pmatrix}$$

şi

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \beta\,, \text{ cu } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,, \quad \beta = -i\gamma^4\,, \tag{2.53}$$

unde cu 1 am notat matricea unitate (2×2), iar cu 0 matricea zero (2×2), cât şi pentru derivatele acestora. Astfel, scriem (2.37) în forma matriceală

$$\delta\Psi = B\Psi \tag{2.54}$$

şi avem

$$\delta\bar{\Psi} = (B\Psi)^\dagger\beta = \bar{\Psi}\beta B^\dagger\beta = \bar{\Psi}\bar{B} \quad (\beta^2 = 1)\,, \tag{2.55}$$

cu

$$\bar{B} = \beta B^\dagger \beta\,. \tag{2.56}$$

Urmează să determinăm forma explicită a matricei infinitezimale B, deci a operatorilor $\{T_{ij}\}$. Pentru aceasta, impunem ca $\bar{\Psi}\Psi$ să fie un invariant (scalar Lorentz), iar produsul $\bar{\Psi}\gamma_i\Psi$, unde γ_i sunt matricele Dirac, să fie un cuadrivector, deci cele două combinaţii să se transforme după (2.42) şi respectiv (2.45), adică

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \delta\left(\bar{\Psi}\Psi\right) = 0\,; \\ &\text{b)}\quad \delta\left(\bar{\Psi}\gamma_i\Psi\right) = \omega_i^{\ j}\bar{\Psi}\gamma_j\Psi\,. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Din (2.57.a), utilizând (2.54) şi (2.55), rezultă

$$\bar{\Psi}\delta\Psi + \left(\delta\bar{\Psi}\right)\Psi = \bar{\Psi}B\Psi + \bar{\Psi}\bar{B}\Psi = 0\,,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică, pentru Ψ şi $\bar{\Psi}$ arbitrar, avem

$$\bar{B} = -B \,. \tag{2.58}$$

Din (2.57.b), scrisă sub forma

$$\bar{\Psi}\bar{B}\gamma_i\Psi + \bar{\Psi}\gamma_i B\Psi = \omega_i^{\cdot j}\bar{\Psi}\gamma_j\Psi \,,$$

adică

$$\bar{\Psi}\left[\gamma_i \,, B\right]\Psi = \omega_i^{\cdot j}\bar{\Psi}\gamma_j\Psi \,,$$

obţinem pentru Ψ şi $\bar{\Psi}$ arbitrar următoarea ecuaţie pentru B

$$\left[\gamma_i \,, B\right] = \omega_i^{\cdot j}\gamma_j \,, \tag{2.59}$$

care, după înmulţirea la stânga cu γ^i, adică

$$\gamma^i\gamma_i B - \gamma^i B\gamma_i = \omega^{ij}\gamma_i\gamma_j \,, \tag{2.60}$$

este satisfăcută de o alegere a lui B de forma

$$B = \frac{1}{4}\omega^{ls}\gamma_l\gamma_s = \frac{1}{8}\omega^{ls}\left[\gamma_l \,, \gamma_s\right] \,. \tag{2.61}$$

Într-adevăr, înlocuind (2.61) în membrul stâng al lui (2.60), vom obţine

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\omega^{ls}\left[\gamma^i\gamma_i\gamma_l\gamma_s - \gamma^i\gamma_l\gamma_s\gamma_i\right] = \\
&= \frac{1}{4}\omega^{ls}\left[\gamma^i\gamma_i\gamma_l\gamma_s - 4\,\eta_{ls} + 4\,\gamma_l\gamma_s - \gamma^i\gamma_i\gamma_l\gamma_s\right] = \\
&= \frac{1}{4}\omega^{ls}\left[-4\,\eta_{ls} + 4\,\gamma_l\gamma_s\right] = \omega^{ls}\gamma_l\gamma_s \,,
\end{aligned}$$

unde am ţinut cont de proprietatea

$$\left\{\gamma_l \,, \gamma_s\right\} = 2\,\eta_{ls}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi de rezultatul nul al contracţiei tensorului antisimetric ω^{ls} cu tensorul simetric η_{ls}. Introducând acum cele şase matrice de spin

$$S_{ij} = \frac{1}{4}[\gamma_i, \gamma_j] , \tag{2.62}$$

ce satisfac, la rândul lor, algebra Lorentz, punem matricea B sub forma

$$B = \frac{1}{2}\omega^{ij} S_{ij} , \tag{2.63}$$

astfel încât (2.54) devine

$$\delta\Psi = \frac{1}{2}\omega^{ij} S_{ij}\,\Psi . \tag{2.64}$$

De aici, se obţine relaţia de transformare a componentelor spinoriale

$$\psi'^r = \psi^r + \frac{1}{2}\omega^{ij}\,(S_{ij})^r_p\,\psi^p \tag{2.65}$$

şi, prin derivare, legea de transformare a derivatelor

$$\psi'^r{}_{,k} = \psi^r{}_{,k} - \psi^r{}_{,j}\,\omega^j_{\cdot k} + \frac{1}{2}\omega^{ij}\,(S_{ij})^r_p\,\psi^p{}_{,k} . \tag{2.66}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.3 Simetrii interne

Transformările care acţionează asupra funcţiilor de undă, lăsând neschimbate coordonatele spaţio-temporale, poartă numele de transformări interne. Dintre acestea, transformările unitare, păstrând invarianţa normei şi a produsului scalar, sunt deosebit de importante pentru teoriile de câmp.

Pe lângă transformările uzuale de fază

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-i\alpha}\phi(x) \tag{3.1}$$

ce formează grupul abelian uniparametric $U(1)$, matricele unitare $U_{N\times N}$, satisfăcând

$$U^{\dagger}U = 1 \tag{3.2}$$

şi

$$\det U = 1 \tag{3.3}$$

alcătuiesc grupul special unitar $SU(N)$. Evident, condiţiile (3.2) şi (3.3) limitează numărul parametrilor prin a căror variaţie continuă (finită) sunt generate elementele grupului. Astfel, în loc de $2N^2$, există

$$2N^2 - N^2 \text{ (condiţia (3.2))} - 1 \text{ (condiţia (3.3))} = N^2 - 1$$

parametri reali independenţi, numiţi *parametri esenţiali.*

Prin scrierea elementelor $U \in SU(N)$ sub forma

$$U = \exp[-iX] \tag{3.4}$$

se face trecerea de la grupul Lie $SU(N)$ la algebra Lie $\mathcal{SU}(N)$ asociată acestuia, unde $X \in \mathcal{SU}(N)$ se exprimă ca o combinaţie liniară de cei n generatori $\{X_a\}_{a=\overline{1,n}}$ (al căror număr este egal cu numărul parametrilor esenţiali ai grupului) prin

$$X = \theta^a X_a\ ,\ a = \overline{1,n}\ ,\ n = N^2 - 1\ . \tag{3.5}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Generatorii $\{X^a\}_{a=\overline{1,n}}$ satisfac relaţiile de comutatori

$$\left[X^a, X^b\right] = i f^{abc} X_c \,, \tag{3.6}$$

unde constantele de structură f^{abc} sunt reale şi complet antisimetrice. Pentru transformări infinitezimale, elementele grupului Lie (fiind funcţii analitice de parametrii infinitezimali) se scriu ca dezvoltări în serie în jurul elementului unitate $e = U(0)$, adică

$$U(\theta) = e - i\theta^a X_a + \mathcal{O}(\theta^2) \,, \tag{3.7}$$

generatorii fiind astfel

$$X_a = i \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta^a}\bigg|_{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n=0} . \tag{3.8}$$

O reprezentare a grupului Lie $SU(N)$ asociază fiecărui element $U \in SU(N)$ un operator $D(U)$ cu proprietăţile:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad D(U_1 \cdot U_2) = D(U_1) \cdot D(U_2) \\ &\text{(ii)} \quad D(e) = 1 \text{ (operator unitar)} \,, \end{aligned} \tag{3.9}$$

din care rezultă imediat că

$$D\left(U^{-1}\right) = [D(U)]^{-1} \,.$$

De asemenea, prin

$$D(U) = \exp\left[-i\theta^a T(X_a)\right] \tag{3.10}$$

asociem generatorilor $\{X_a\}$, în reprezentarea T, operatorii $T_a = T(X_a)$ satisfăcând algebra (3.6), adică

$$\left[T^a, T^b\right] = i f^{abc} T_c \,. \tag{3.11}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

De exemplu, reprezentarea adjunctă a unei algebre Lie se defineşte prin

$$\begin{aligned} &ad : \mathcal{S} \to \mathcal{S} \\ &ad : X \to ad\,X \\ &(ad\,X)Y = [X, Y], \end{aligned} \tag{3.12}$$

unde $\mathcal{S}$ este un spaţiu liniar oarecare.

În continuare, vom prezenta succint câteva rezultate utile în formularea teoriilor de câmp clasice şi cuantice, cunoscute din teoria grupurilor Lie, pentru a căror demonstraţie şi detaliere recomandăm cititorului [18, 71], acestea depăşind cu mult cadrul prezentei cărţi. După cum am văzut în paragraful anterior, în construirea reprezentărilor unei algebre sunt importanţi operatorii care comută cu toţi generatorii acesteia. Din teoria grupurilor Lie, se cunoaşte că orice algebră Lie semisimplă asociată unui grup Lie compact admite mai multe subalgebre abeliene maximale, numite *subalgebre Cartan*, notate cu $\mathcal{C}$, a căror dimensiune comună poartă numele de *rangul algebrei Lie*. Astfel, pentru algebra n dimensională $\mathcal{SU}(N)$, cu $n = N^2 - 1$, rangul este $r = N - 1$. În reprezentarea adjunctă (3.12), operatorii asociaţi generatorilor $\{h_A\}_{A=\overline{1,r}}$ ai algebrei Cartan sunt simultan diagonalizabili, satisfăcând relaţiile de vectori şi valori proprii

$$(ad\,h_A)e_\alpha = \alpha_A\, e_\alpha \tag{3.13}$$

sau, ţinând cont de (3.12),

$$[h_A, e_\alpha] = \alpha_A e_\alpha . \tag{3.14}$$

Ansamblurile $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, în număr de $n-r$, poartă numele de *rădăcini*, iar e_α – de *vectori rădăcină*. Extindem baza algebrei Cartan, $\{h_A\}_{A=\overline{1,r}}$, adăugând cei $n-r$ vectori rădăcină e_α şi obţinem n vectori liniar independenţi ce formează o bază pentru algebra Lie n dimensională, cu relaţiile de comutatori

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ [h_A, h_B] = 0; \\ &\text{b)}\ [h_A, e_\alpha] = \alpha_A e_\alpha . \end{aligned} \tag{3.15}$$

BCU IAŞI CENTRALA CARTII

În continuare, să particularizăm relaţiile de mai sus pentru cazurilor unor grupuri Lie de interes pentru fizica particulelor elementare.

- Grupul $SU(2)$, cu $N = 2$, este caracterizat de $n = 3$ parametri infinitezimali esenţiali $\{\theta^\mu\}_{\mu=\overline{1,3}}$ şi de trei generatori $\{X^\mu\}_{\mu=\overline{1,3}}$, ca bază a algebrei $\mathcal{SU}(2)$ asociate, satisfăcând relaţiile de comutatori

$$[X^\mu\,,\,X^\nu] = i\varepsilon^{\mu\nu\gamma}X_\gamma\,. \tag{3.16}$$

Rangul $r = N - 1 = 1$ selectează trei subalgebre abeliene maximale monodimensionale, dintre care o vom alege pe cea generată de $h = X^3$, diagonalizabil în orice reprezentare.

A construi o reprezentare a algebrei $\mathcal{SU}(2)$ înseamnă să asociem generatorilor X^μ operatorii $T(X^\mu) = T^\mu$, prin (3.9, 10), satisfăcând, de asemenea, algebra (3.16), adică

$$[T^\mu\,,\,T^\nu] = i\varepsilon^{\mu\nu\gamma}T_\gamma\,. \tag{3.17}$$

Fiecare din cei $n - r = 2$ vectori rădăcină, fiind un element al algebrei, se scrie ca o combinaţie

$$e = C_1T_1 + C_2T_2 + C_3T_3 \tag{3.18}$$

şi impunând (3.15.b), adică

$$[T_3\,,\,e] = \alpha e\,,$$

şi (3.17), punem în evidenţă următoarea relaţie între constantele $C_1\,,\,C_2\,,\,C_3$

$$C_2 = i\alpha C_1 \tag{3.19}$$

precum şi rădăcinile

$$\alpha = \pm 1\,. \tag{3.20}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În concluzie, luând $C_1 = 1$, cei doi vectori rădăcină

$$\begin{aligned} e_+ \equiv T_+ &= T_1 + iT_2 \quad \text{pentru } \alpha = 1\,, \\ e_- \equiv T_- &= T_1 - iT_2 \quad \text{pentru } \alpha = -1\,, \end{aligned} \tag{3.21}$$

împreună cu $h = T_3$ formează o bază pentru algebra $\mathcal{SU}(2)$, cu relaţiile de comutatori

$$\begin{aligned} [T_3\,, T_+] &= T_+ \\ [T_3\,, T_-] &= -T_- \\ [T_+\,, T_-] &= 2T_3 \end{aligned} \tag{3.22}$$

a căror similaritate cu cele de la momentul cinetic (datorită izomorfismului algebrelor $\mathcal{O}(3)$ şi $\mathcal{SU}(2)$) ne permite să utilizăm direct relaţiile

$$\begin{aligned} J_3\,|j,m\rangle &= m\,|j,m\rangle \\ J_\pm\,|j,m\rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,|j, m \pm 1\rangle \end{aligned} \tag{3.23}$$

în construirea matricelor asociate generatorilor, în diferite reprezentări. Acestea trebuie să satisfacă algebra (3.17) şi pot avea, în principiu, orice dimensiune întreagă şi pozitivă. Astfel:

(i) Pentru dubleţii de izospin de tipul dubletului proton-neutron sau dubletului *quark up - quark down*,

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

unde $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$ sunt bispinori Lorentz corespunzând valorilor proprii $t_3 = \pm 1/2$ ale lui T^3, vom utiliza o reprezentare bidimensională, asociind generatorilor matricele

$$T^\mu = \frac{\sigma^\mu}{2}\,, \tag{3.25}$$

satisfăcând algebra (3.17) ($\{\sigma^\mu\}_{\mu=\overline{1,3}}$ sunt matricele Pauli).

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

(ii) Pentru izotripleţii

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^1(x) \\ \phi^2(x) \\ \phi^3(x) \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

corespunzători lui $t_3 = 0, \pm 1$, unde cele trei câmpuri scalare $\{\phi^1(x), \phi^2(x), \phi^3(x)\}$ pot fi asociate, de exemplu, tripletului mezonic $\{\pi^0, \pi^\pm\}$, vom avea o reprezentare 3-dimensională, cu matricele generatorilor obţinute din (3.23) sub forma

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

(iii) Pentru multipletul rezonanţelor $N^*_{\frac{3}{2}}\left(t_3 = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}\right)$ vom considera, evident,

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi^3(x) \\ \psi^4(x) \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

şi vom asocia generatorilor, într-o reprezentare 4-dimensio-

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

nală, matricele

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}. \qquad (3.29)$$

- Grupul $SU(3)$ are $n = N^2 - 1 = 8$ parametri independenţi, $\{\theta^a\}_{a=\overline{1,8}}$, iar algebra Lie 8-dimensională asociată este dată de

$$[F_a, F_b] = if_{abc}F^c, \qquad (3.30)$$

constantele de structură nenule fiind

$$f_{123} = 1, \; f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$f_{147} = f_{246} = f_{345} = f_{516} = f_{257} = f_{637} = \frac{1}{2}. \qquad (3.31)$$

Într-o reprezentare 3-dimensională, ce acţionează asupra tripleţilor

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi^3(x) \end{pmatrix} \qquad (3.32)$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

reprezentând, de exemplu, primii trei cuarci introduşi, $\{u, d, s\}$, generatorilor li se vor asocia matricele $F_a = \frac{\lambda_a}{2}$ satisfăcând (3.30), unde $\{\lambda_a\}_{a=\overline{1,8}}$, de forma

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

sunt denumite *matricele Gell-Mann* [26].

Grupul $SU(3)$ având rangul $r = N - 1 = 2$, subalgebra Cartan este bidimensională, fiind generată de operatorii diagonali F_3 şi F_8 ce corespund operatorului de izospin $T_3 = F_3$ şi respectiv de hipersarcină $Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8$. Prin valorile proprii ale acestor operatori, $\{t_3, y\}$, putem indexa stările unei reprezentări ireductibile. Astfel, pentru $t_3 = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ şi $y = 0, \pm 1$ vom obţine următoarele opt stări

$$\{0, 0\}, \{(0, \pm 1), 0\}, \left\{\pm\frac{1}{2}, 1\right\}, \left\{\pm\frac{1}{2}, -1\right\}$$

ocupate de mezoni (octetul mezonic) sau de barioni (octetul barionic), trecerea dintr-o stare în alta realizându-se prin intermediul celor şase vectori rădăcină, după modelul (3.23).

Pentru $t_3 = 0, \pm\frac{1}{2}$ şi $y = \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ se vor obţine stările

$$\left\{\pm\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}, \left\{0, -\frac{2}{3}\right\}$$

BCU IAŞI SERIAL UNIVERSITY LIBRARY

ocupate de cuarcii u, d, s. În sfârşit, stările corespunzătoare lui $t_3 = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}$ şi $y = 0, \pm 1, -2$ sunt ocupate de *decupletul barionic*, conţinând rezonanţele $N^*_{\frac{3}{2}}$.

- Grupul $SU(5)$ este deosebit de important, el stând la baza primei teorii de unificare (*Grand Unified Theory*, pe scurt, "GUT") propuse de Georgi şi Glashow [28, 56], pe baza unui grup Lie unic, cu o singură constantă de cuplaj. $SU(5)$ este grupul de dimensiune minimă conţinând subgrupurile $SU(3)$ şi $SU(2) \times U(1)$, ce se dovediseră esenţiale în descrierea interacţiunilor tari şi, respectiv, electroslabe. Fără a intra în amănunte, să observăm doar că $SU(5)$ are $n = 24$ de parametri esenţiali, algebra sa fiind deci 24-dimensională şi admiţând subalgebre Cartan cu $r = 4$ generatori. Cea mai simplă reprezentare a lui $SU(5)$ este, evident, cea de dimensiune cinci, ea transformând funcţii de undă

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \\ \psi^5 \end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

în care spinorii $\{\psi^1, \psi^2, \psi^3\}$ pot fi asociaţi celor trei cuarci, iar $\{\psi^4, \psi^5\}$ dubletului electron-neutrino, după legea

$$\psi^s \to \psi^s = [\exp(-i\beta^a L_a)]^s_r \psi^r \ , \text{ cu } r, s = \overline{1,5}\,, \tag{3.35}$$

unde $\{L^a\}_{a=\overline{1,24}}$ satisfac o algebră de tipul (3.16).

BCU IAŞI / CENTRALA / LIBRARY

Simetrii interne globale

Pentru un câmp fizic oarecare, plecăm de la densitatea de lagrangeian $\mathcal{L}[\Phi^\dagger, \Phi]$ şi construim lagrangeianul

$$L = \int \mathcal{L}[\Phi^\dagger, \Phi]\, d\vec{x}\,. \tag{3.36}$$

Impunând acţiunii

$$S = \int \mathcal{L}\, d^4x \tag{3.37}$$

condiţia de extrem

$$\delta S = 0 \tag{3.38}$$

ajungem, după aplicarea ecuaţiilor Euler-Lagrange, la anularea unei 4-divergenţe, şi anume

$$\partial_i \left[\delta\Phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_i \Phi^\dagger\right)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_i \Phi\right)} \delta\Phi \right] = 0\,. \tag{3.39}$$

Aplicăm acum transformările unitare

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi' = e^{ig\theta^a X_a}\Phi \\ \Phi^\dagger &\rightarrow \Phi'^\dagger = \Phi^\dagger e^{-ig\theta^a X_a}\,, \end{aligned} \tag{3.40}$$

din a căror exprimare infinitezimală obţinem

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= ig\theta^a X_a \Phi \\ \delta\Phi^\dagger &= -ig\theta^a \Phi^\dagger X_a\,, \end{aligned} \tag{3.41}$$

unde g este constanta de cuplaj, $\{\theta^a\}_{a=\overline{1,n}}$ sunt parametrii esenţiali ai grupului special unitar, iar $\{X_a\}_{a=\overline{1,n}}$ sunt generatorii algebrei Lie asociate acestuia, satisfăcând relaţiile de comutatori (3.6). Folosind (3.41), aducem relaţia (3.39) la forma

$$\theta^a \partial_i \left[ig \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_i \Phi\right)} X_a \Phi - \Phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_i \Phi^\dagger\right)} X_a \right) \right] = 0\,, \tag{3.42}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde, θ^a fiind liniar independenţi, rezultă legea de conservare

$$\partial_i J_a^i = 0 \tag{3.43}$$

a cuadricurenţilor

$$J_a^i = ig\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \Phi)} X_a \Phi - \Phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_i \Phi^\dagger\right)} X_a\right], \tag{3.44}$$

ale căror sarcini asociate

$$Q_a = \int J_a^4 d\vec{x} \tag{3.45}$$

vor satisface, la rândul lor, algebra (3.6).

Să considerăm, de exemplu, drept grup de simetrie internă, grupul $SU(2)$, cu algebra asociată (3.17). Dacă

(i) Φ este tripletul de izospin (3.26), iar generatorilor $\{T_\mu\}_{\mu=\overline{1,3}}$ le corespund matricele de reprezentare (3.27), atunci transformările (3.41) se scriu, pe componente, sub forma

$$\begin{aligned} \delta\phi^\alpha &= ig\vec{\theta}\cdot\vec{T}_\beta^\alpha \phi^\beta \\ \delta\phi_\alpha^\dagger &= -ig\phi_\beta^\dagger \vec{\theta}\cdot\vec{T}_\alpha^\beta , \end{aligned} \tag{3.46}$$

conducând pentru densitatea de lagrangeian $SU(2)$ global-invariantă

$$\mathcal{L} = \partial_i \Phi^\dagger \partial^i \Phi = \partial_i \phi_\alpha^* \cdot \partial^i \phi^\alpha \tag{3.47}$$

la conservarea curenţilor

$$J_\mu^i = ig\left[\partial^i \Phi^\dagger T_\mu \Phi - \Phi^\dagger T_\mu \partial^i \Phi\right], \tag{3.48}$$

adică

$$J_\mu^i = ig\left[\partial^i \phi_\alpha^* (T_\mu)_\beta^\alpha \phi^\beta - \phi_\beta^* (T_\mu)_\alpha^\beta \partial^i \phi^\alpha\right], \tag{3.49}$$

ale căror sarcini satisfac, într-adevăr, algebra (3.17);

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(ii) Ψ este dubletul spinorial de izospin (3.24), atunci transformările (3.41) au expresiile

$$\begin{aligned} \delta\psi^A &= i\frac{g}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}^A_B\psi^B \\ \delta\psi^\dagger_A &= -i\frac{g}{2}\psi^\dagger_B\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}^B_A \end{aligned} \tag{3.50}$$

care, înlocuite în (3.44), împreună cu densitatea de lagrangeian a câmpului spinorial fără masă,

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\gamma^i\partial_i\Psi = \sum_{A=1}^{2}\bar{\psi}_A\gamma^i\partial_i\psi^A\,, \tag{3.51}$$

ne conduc la curenţii

$$V^i_\mu = i\frac{g}{2}\bar{\psi}_A\gamma^i(\sigma_\mu)^A_B\psi^B = i\frac{g}{2}\bar{\Psi}\gamma^i\sigma_\mu\Psi\,, \tag{3.52}$$

cu sarcinile

$$Q_\mu = \int V^4_\mu\, d\vec{x}\,, \tag{3.53}$$

generând o algebră $\mathcal{SU}(2)$. Dar o altă transformare care lasă invariantă densitatea de lagrangeian este

$$\delta\psi^A = i\frac{g}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}^A_B\gamma^5\psi^B \tag{3.54}$$

împreună cu conjugata sa hermitică, unde γ^5 este o matrice hermitică ce va fi introdusă ulterior. Acestora le sunt asociate curenţii

$$A^i_\mu = i\frac{g}{2}\bar{\psi}_A\gamma^i\gamma^5(\sigma_\mu)^A_B\psi^B = i\frac{g}{2}\bar{\Psi}\gamma^i\gamma^5\sigma_\mu\Psi\,, \tag{3.55}$$

ale căror sarcini

$$Q^5_\mu = \int A^4_\mu\, d\vec{x}\,, \tag{3.56}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

precum se poate constata, nu închid o algebră $\mathcal{SU}(2)$. O analiză mai atentă a relaţiilor de comutatori

$$\begin{aligned} [Q_\mu , Q_\nu] &= i\varepsilon_{\mu\nu\eta} Q^\eta \\ [Q_\mu , Q^5_\nu] &= i\varepsilon_{\mu\nu\eta} Q^{5\eta} \\ [Q^5_\mu , Q^5_\nu] &= i\varepsilon_{\mu\nu\eta} Q^\eta \end{aligned} \tag{3.57}$$

ne sugerează combinaţiile *left* şi *right*

$$\begin{aligned} Q^\mu_L &= \frac{1}{2}\left(Q^\mu - Q^{5\mu}\right) \\ Q^\mu_R &= \frac{1}{2}\left(Q^\mu + Q^{5\mu}\right). \end{aligned} \tag{3.58}$$

Acestea satisfac

$$\begin{aligned} [Q^\mu_L , Q^\nu_L] &= i\varepsilon^{\mu\nu\eta} Q_{\eta L} \\ [Q^\mu_R , Q^\nu_R] &= i\varepsilon^{\mu\nu\eta} Q_{\eta R} \\ [Q^\mu_L , Q^\nu_R] &= 0 , \end{aligned} \tag{3.59}$$

fiind deci bazele componentelor produsului direct $SU(2)_L \times SU(2)_R$.

Ajunşi aici, să comentăm puţin această separare a algebrei iniţiale în două subalgebre generate de curenţii *left-handed* $J^\mu = V^\mu - A^\mu$ şi *right-handed* $J^\mu = V^\mu + A^\mu$, fapt ce conferă teoriei proprietatea de *chiralitate*.

Pentru a pune în evidenţă separarea spinorilor după elicitate în componente *left* şi *right*, să explicităm ecuaţiile de câmp asociate lagrangeianului (3.51). Se utilizează pentru matricele γ^i *reprezentarea Weyl*, numită şi *reprezentare chirală*, anume

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &= \gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^\mu \\ i\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^4 &= -\gamma_4 = i\beta_W \ , \ \text{cu} \ \beta_W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \end{aligned} \tag{3.60}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

având proprietăţile

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu)^\dagger &= \gamma^\mu \\ \left(\gamma^4\right)^\dagger &= -\gamma^4\,,\end{aligned} \tag{3.61}$$

cu matricea γ^5 definită prin

$$\gamma^5 = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.62}$$

Aceasta ne permite construirea operatorilor de proiecţie

$$\begin{aligned}P_R &= \frac{1}{2}(1+\gamma^5) \\ P_L &= \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\,,\end{aligned} \tag{3.63}$$

care vor selecta spinorii ξ şi χ (cu două componente), din bispinorul

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{3.64}$$

după valorile proprii ale operatorului de elicitate (2.32). Astfel, lagrangeianul (3.51) pentru particula de masă nulă va conduce la ecuaţia

$$\gamma^i \partial_i \psi = 0 \tag{3.65}$$

de unde, efectuând înlocuirea $p^i \to -i\partial_i$, avem

$$\left(\gamma^\mu p^\mu - \gamma^4 E\right)\psi = 0\,. \tag{3.66}$$

Ţinând cont de (3.60) şi (3.64), obţinem sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\xi &= E\xi \\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\chi &= -E\chi,\end{aligned} \tag{3.67}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

în care particula de elicitate pozitivă $\left(h = \frac{1}{2}\right)$, descrisă de

$$\frac{\vec{S}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\xi = \frac{1}{2}\xi \tag{3.68}$$

şi numită spinor Weyl *right-handed*, s-a separat de cea cu elicitate negativă $\left(h = -\frac{1}{2}\right)$, descrisă de

$$\frac{\vec{S}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\chi = -\frac{1}{2}\chi \tag{3.69}$$

şi numită spinor Weyl *left-handed* [68].

Separarea spinorilor după elicitate este absolut necesară în teoriile ce conţin particula neutrino, deoarece aceasta are numai elicitate negativă şi în toate procesele în care intervine, spinorii trebuie descompuşi în componente *left* şi *right-handed* [49, 68, 47]. Ca urmare, curenţii (3.52) şi (3.55) vor apărea în combinaţii de tipul

$$J^i \doteq V^i - A^i$$

şi

$$J^i = V^i + A^i\,,$$

deoarece

$$\begin{aligned}
i\bar{\psi}\gamma^i\psi &= i\psi^\dagger\beta\gamma^i\psi = \left(\psi_L^\dagger + \psi_R^\dagger\right)\gamma^4\gamma^i\left(\psi_L + \psi_R\right) = \\
&= \psi_L^\dagger\gamma^4\gamma^i\psi_L + \psi_R^\dagger\gamma^4\gamma^i\psi_R = \\
&= \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\psi\right)^\dagger\gamma^4\gamma^i\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\psi\right) + \\
&\quad + \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\right)^\dagger\gamma^4\gamma^i\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\right) = \\
&= \psi^\dagger\gamma^4\gamma^i\frac{1-\gamma^5}{2}\psi + \psi^\dagger\gamma^4\gamma^i\frac{1+\gamma^5}{2}\psi = \\
&= i\bar{\psi}\gamma^i\frac{1-\gamma^5}{2}\psi + i\bar{\psi}\gamma^i\frac{1+\gamma^5}{2}\psi\,,
\end{aligned} \tag{3.70}$$

BCU IASI / CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

unde am utilizat faptul că

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \beta_W = -i\psi^\dagger \gamma^4 . \tag{3.71}$$

Într-adevăr, în Modelul Weinberg-Salam ce descrie interacţiunile electroslabe, curenţii leptonici, care se cuplează la bozonii masivi $W_i^\pm$ şi Z_i^0 ce mediază aceste interacţiuni, sunt de tip *left-handed*, adică

$$J^i = ig\bar{\nu}_e \gamma^i (1-\gamma^5) e + ig\bar{\nu}_\mu \gamma^i (1-\gamma^5)\mu$$

(pentru $W_i^\pm$) şi

$$J^i = ig_1 \bar{\nu}_e \gamma^i (1-\gamma^5)\nu_e ,$$

sau

$$J^i = ig_1 \bar{e}\gamma^i (1-\gamma^5) e$$

pentru Z_i^0, unde e, μ şi ν_e, ν_μ reprezintă funcţiile de undă pentru electron, leptonul μ şi neutrinii corespunzători.

În încheiere, să precizăm că notaţiile utilizate pentru curenţi, adică "V" pentru cei de tip (3.52) şi "A" pentru cei de tip (3.55), provin de la caracterul acestora de curenţi vectoriali şi, respectiv, axiali. Amintim că un curent de tip vectorial se transformă sub acţiunea operatorului de paritate ca un vector, adică

$$\begin{aligned} P &: V^\mu \to -V^\mu \\ P &: V^4 \to V^4 , \end{aligned} \tag{3.72}$$

iar unul de tip axial se transformă ca un pseudovector, adică

$$\begin{aligned} P &: A^\mu \to A^\mu \\ P &: A^4 \to -A^4 . \end{aligned} \tag{3.73}$$

În cazul nostru, operatorul de paritate este

$$P = \beta_W = -i\gamma^4 , \tag{3.74}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sub acţiunea căruia funcţiile de undă devin

$$\begin{aligned} \psi(-h) &= -i\gamma^4\psi(h) \\ \bar{\psi}(-h) &= -i\bar{\psi}\gamma^4 . \end{aligned} \tag{3.75}$$

Curenţii (3.52) se transformă după legea

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(-h)\gamma^\mu\psi(-h) &= -\bar{\psi}(h)\gamma^4\gamma^\mu\gamma^4\psi(h) = -\bar{\psi}(h)\gamma^\mu\psi(h) \\ \bar{\psi}(-h)\gamma^4\psi(-h) &= -\bar{\psi}(h)\gamma^4\gamma^4\gamma^4\psi(h) = \bar{\psi}(h)\gamma^4\psi(h), \end{aligned} \tag{3.76}$$

adică sunt de tip vectorial, în timp ce (3.55), transformându-se după legea

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(-h)\gamma^\mu\gamma^5\psi(-h) &= -\bar{\psi}(h)\gamma^4\gamma^\mu\gamma^5\gamma^4\psi(h) = \bar{\psi}(h)\gamma^\mu\psi(h) \\ \bar{\psi}(-h)\gamma^4\gamma^5\psi(-h) &= -\bar{\psi}(h)\gamma^4\gamma^4\gamma^5\gamma^4\psi(h) = -\bar{\psi}(h)\gamma^4\gamma^5\psi(h), \end{aligned} \tag{3.77}$$

sunt de tip axial.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.4 Principiul teoriilor de etalonare

Fie G grupul Lie $SU(N)$ cu algebra Lie asociată $\mathcal{SU}(N)$ ai cărei generatori $\{X^a\}_{a=\overline{1,n}}$, în număr de $n = N^2-1$, satisfac relaţiile de comutare (3.6). Sub acţiunea transformărilor globale

$$\begin{aligned}\Psi(x) &\rightarrow \Psi'(x) = U(\theta)\Psi(x) = e^{-iX^a\theta_a}\Psi(x)\\ \bar{\Psi}(x) &\rightarrow \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)U^\dagger(\theta) = \bar{\Psi}(x)e^{iX^a\theta_a}, \text{ cu } \theta = const.,\end{aligned} \tag{4.1}$$

densitatea de lagrangeian a câmpului spinorial liber

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(\gamma^i\partial_i + m)\Psi \tag{4.2}$$

rămâne invariantă. Considerăm acum transformările *gauge*, în care parametrii infinitezimali din (4.1), $\{\theta_a\}_{a=\overline{1,n}}$, devin funcţii de punct, adică

$$\begin{aligned}\Psi(x) &\rightarrow \Psi'(x) = U(\theta(x))\Psi(x) = e^{-iX^a\theta_a(x)}\Psi(x)\\ \bar{\Psi}(x) &\rightarrow \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)U^\dagger(\theta(x)) = \bar{\Psi}(x)e^{iX^a\theta_a(x)}\end{aligned} \tag{4.3}$$

şi asociem, într-o reprezentare de dimensiune N, generatorilor $\{X^a\}_{a=\overline{1,n}}$ matricele pătratice $\{T(X^a)\}_{a=\overline{1,n}}$. Cele N componente ale matricei coloană $\Psi(x)$ transformându-se după legea

$$\begin{aligned}\psi^r(x) &\rightarrow \psi'^r(x) = U^r_s(\theta(x))\psi^s(x) \approx (\delta^r_s - i\,(T^a)^r_s\theta_a(x))\,\psi^s(x)\\ \bar{\psi}_r(x) &\rightarrow \bar{\psi}'_r(x) = \bar{\psi}_s(x)U^{\dagger s}_r(\theta(x)) \approx \bar{\psi}_s(x)\,(\delta^s_r + i\,(T^a)^s_r\theta_a(x))\,,\end{aligned} \tag{4.4}$$

lagrangeianul Dirac capătă forma

$$\mathcal{L}' = \bar{\Psi}'\left(\gamma^i\partial_i + m\right)\Psi' = \mathcal{L} - i\bar{\Psi}\gamma^i(T^a)\Psi\partial_i\theta_a\,, \tag{4.5}$$

care, din cauza termenului derivativ, este evident diferită de cea de la care am plecat. Pentru a păstra invarianţa locală a lagrangeianului

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

faţă de transformările (4.3), trebuie să înlocuim derivata obişnuită cu o derivată *gauge*-covariantă, ce o generalizează pe cea din electromagnetism

$$D_i\Psi(x) = (\partial_i + ieA_i(x))\,\Psi(x)\,, \tag{4.6}$$

unde e este chiar sarcina electronului, iar $A_i(x)$ este câmpul electromagnetic. Derivata *gauge*-covariantă va fi de forma

$$D_i\Psi(x) = (\partial_i - igA_i(x))\,\Psi(x)\,, \tag{4.7}$$

unde g este o constantă de cuplaj caracteristică grupului de etalonare, iar A_i sunt nişte câmpuri compensatoare, în număr de n şi denumite câmpuri *gauge*, contractate cu generatorii algebrei $\mathcal{SU}(2)$, adică

$$A_i(x) = T_a A_i^a(x)\,. \tag{4.8}$$

Impunând condiţia ca această derivată să se transforme după aceleaşi legi ca şi câmpurile

$$(D_i\Psi)' = U(\theta)D_i\Psi\,, \tag{4.9}$$

vom obţine

$$(\partial_i - igA_i')\,U\Psi = U\,(\partial_i - igA_i)\,\Psi\,,$$

adică

$$A_i' = U\,A_i\,U^{-1} - \frac{i}{g}\,(\partial_i U)\,U^{-1}\,. \tag{4.10}$$

Ţinând cont de (4.8) şi (3.6), rezultă relaţia matriceală de transformare a câmpurilor Yang-Mills

$$T_a A_i'^a = U\,T_a A_i^a\,U^{-1} - \frac{i}{g}\,(\partial_i U)\,U^{-1}\,, \tag{4.11}$$

din care, dezvoltând în serie pe U şi U^{-1}

$$\begin{aligned} U &\approx 1 - iT^a\theta_a + \mathcal{O}(\theta^2) \\ U^{-1} &\approx 1 + iT^a\theta_a + \mathcal{O}(\theta^2)\,, \end{aligned} \tag{4.12}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

putem scrie legea infinitezimală de transformare a câmpurilor de etalonare neabeliene

$$A_i'^a = A_i^a + f^{abc}\theta_b A_{ic} - \frac{1}{g}\partial_i\theta^a . \tag{4.13}$$

Astfel, prin înlocuirea derivatei uzuale cu derivata $SU(N)$ *gauge*-covariantă, incluzând câmpurile de etalonare $A_i^a(x)$ ce se tranformă după legea (4.11) sau (4.13), am adus densitatea de lagrangeian (4.2) a câmpului Dirac la forma

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x)\left(\gamma^i D_i + m\right)\Psi(x),$$

invariantă faţă de transformările locale (4.3). Pentru ca să putem considera cele n câmpuri *gauge* ca pe nişte variabile dinamice, trebuie să adăugăm un termen cinetic conţinând derivatele acestora, de tipul celui din electromagnetism, adică

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} . \tag{4.14}$$

Definind tensorul antisimetric de ordin doi al câmpurilor de etalonare, F^{ij}, prin următoarea combinaţie a derivatelor covariante

$$(D_iD_j - D_jD_i)\,\Psi \equiv igF_{ij}\Psi \tag{4.15}$$

vom obţine expresia

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i - ig\,[A_i, A_j] \tag{4.16}$$

în care atât câmpurile de etalonare, cât şi tensorul Yang-Mills sunt contractate cu generatorii T^a. Cu alte cuvinte, relaţia anterioară se scrie detaliat sub forma

$$T_aF_{ij}^a = \partial_i\left(T_aA_j^a\right) - \partial_j\left(T_aA_i^a\right) - ig\left[T_bA_i^b, T_cA_j^c\right], \tag{4.17}$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde, utilizând relaţiile de comutatori (3.6), obţinem, în sfârşit, expresia tensorului Yang-Mills ca fiind

$$F_{ij}^a = \partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + g f^{abc} A_{ib} A_{jc} . \tag{4.18}$$

Cum membrul stâng al relaţiei de definiţie (4.15) se transformă, evident, după

$$[(D_i D_j - D_j D_i)\Psi]' = U(\theta)(D_i D_j - D_j D_i)\Psi ,$$

rezultă imediat că

$$igF_{ij}' U(\theta)\Psi = U(\theta)(igF_{ij})\Psi ,$$

adică

$$F_{ij}' = U(\theta) F_{ij} U^{-1}(\theta) . \tag{4.19}$$

De aici, pentru o transformare infinitezimală, dezvoltând în serie pe $U(\theta)$ şi $U^{-1}(\theta)$, obţinem următoarea lege de transformare pentru tensorul câmpurilor Yang-Mills

$$F_{ij}'^a = F_{ij}^a + f^{abc}\theta_b F_{ijc} . \tag{4.20}$$

În concluzie, lagrangeianul Dirac $SU(N)$ *gauge*-invariant are forma

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\left(\gamma^i D_i + m\right)\Psi + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_a^{ij} \tag{4.21}$$

unde distingem, pe lângă termenul ce descrie câmpul fermionic, în care derivata obişnuită a fost înlocuită cu derivata covariantă, un al doilea termen, corespunzător câmpurilor *gauge* neabeliene, ce conţine o parte cinetică

$$\frac{1}{4}\left(\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a\right)\left(\partial^i A_a^j - \partial^j A_a^i\right)$$

şi o parte de auto-interacţie, de tipul

$$g f^{abc} A_{ib} A_{jc} \partial^i A_a^j + \frac{g^2}{4} f^{abc} f_{ade} A_{ib} A_{jc} A^{id} A^{je} ,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

fiind însă lipsit de un termen de masă pentru aceste câmpuri. După cum vom vedea în subparagraful următor, un astfel de termen apare ca urmare a ruperii spontane a unor simetrii locale, prin *mecanism Higgs*.

Ajunşi aici, să exemplificăm relaţiile obţinute la cazul unor grupuri interne de interes pentru fizica particulelor elementare.

A. Grupul $SU(2)$

Grupul $SU(2)$ este un grup Lie 3-parametric ai cărui generatori $\left\{\frac{\sigma^\mu}{2}\right\}_{\mu=\overline{1,3}}$ satisfac algebra deja cunoscută

$$\left[\frac{\sigma^\mu}{2}, \frac{\sigma^\nu}{2}\right] = i\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\frac{\sigma_\alpha}{2}\,.$$

După cum tocmai am arătat, lagrangeianul câmpului spinorial liber, în care $\Psi(x)$ este acum un dublet $SU(2)$ de forma

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \end{pmatrix},$$

fiecare componentă fiind un bispinor faţă de grupul Lorentz, iar

$$\bar{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} \bar{\psi}^1(x) & \bar{\psi}^2(x) \end{pmatrix},$$

nu rămâne invariant faţă de transformările $SU(2)$ locale

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\to \Psi'(x) = e^{-i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\theta}}\Psi(x)\,, \\ \bar{\Psi}(x) &\to \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{\theta}}\,. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Pentru asigurarea invarianţei, înlocuim derivata obişnuită cu derivata (4.7), în care

$$A_i(x) = \frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{A}_i(x)\,. \tag{4.23}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Impunând acesteia să se transforme după (4.22), vom explicita legea de transformare (4.11) a câmpurilor neabeliene, cu forma sa infinitezimală (4.13), la cazul grupului $SU(2)$, adică

$$A_i'^{\mu} = A_i^{\mu} + \varepsilon^{\mu\alpha\beta}\theta_\alpha A_{i\beta} - \frac{1}{g}\partial_i\theta^{\mu} . \tag{4.24}$$

Introducând acum, prin relaţia de definiţie (4.15), tensorul antisimetric al câmpurilor de etalonare

$$F_{ij}^{\mu} = \partial_i A_j^{\mu} - \partial_j A_i^{\mu} + g\varepsilon^{\mu\alpha\beta}A_{i\alpha}A_{j\beta} \tag{4.25}$$

care se transformă după legea (4.20), adică

$$F_{ij}'^{\mu} = F_{ij}^{\mu} + \varepsilon^{\mu\alpha\beta}\theta_\alpha F_{ij\beta} , \tag{4.26}$$

putem scrie, în sfârşit, lagrangeianul Dirac $SU(2)$ *gauge*-invariant sub forma

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\left(\gamma^i D_i + m\right)\Psi + \frac{1}{4}\vec{F}_{ij}\cdot\vec{F}^{ij} , \tag{4.27}$$

unde

$$D_i\Psi = \left(\partial_i - ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{A}_i\right)\Psi . \tag{4.28}$$

B. Grupul $U(1)$

În cazul grupului uniparametric $U(1)$, sub acţiunea căruia câmpurile suferă transformări locale de fază de forma

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\to \Psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\Psi(x) \\ \bar{\Psi}(x) &\to \bar{\Psi}'(x) = e^{i\alpha(x)}\bar{\Psi}(x) , \end{aligned} \tag{4.29}$$

termenul derivativ al lagrangeianului Dirac va introduce partea suplimentară $-i\bar{\Psi}\gamma^i\Psi\partial_i\alpha(x)$, ce va fi "compensată" prin înlocuirea derivatei obişnuite cu derivata covariantă (4.6), în care constanta de cuplaj este

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

chiar sarcina electronului, $g = -|e|$, iar câmpul *gauge* $A_i(x)$ suferă transformarea de etalon

$$A_i' = A_i + \frac{1}{e}\partial_i\alpha(x)\,. \tag{4.30}$$

Teoria fiind abeliană, tensorul câmpurilor *gauge* (4.16) se reduce la forma uzuală în Electrodinamică,

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i\,, \tag{4.31}$$

fiind local invariantă $U(1)$, adică

$$F_{ij}' = F_{ij}\,. \tag{4.32}$$

În lagrangeianul Dirac $U(1)$ *gauge*-invariant

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \bar{\Psi}\left(\gamma^i D_i + m\right)\Psi + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\,, \tag{4.33}$$

partea fermionică

$$\mathcal{L}_1 = \bar{\Psi}\left(\gamma^i D_i + m\right)\Psi \tag{4.34}$$

conţine, pe lângă termenul "clasic", $\bar{\Psi}\left(\gamma^i\partial_i + m\right)\Psi$, şi un termen

$$\mathcal{L}_2 = eJ_iA^i \tag{4.35}$$

de cuplaj al curentului fermionic $J^i = i\bar{\Psi}\gamma^i\Psi$ la câmpul electromagnetic A_i. În ceea ce priveşte

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} = \frac{1}{4}\left(\partial_iA_j - \partial_jA_i\right)\left(\partial^iA^j - \partial^jA^i\right)\,, \tag{4.36}$$

remarcăm atât absenţa unui termen de masă pentru foton, forma A_iA^i nefiind, de altfel, $U(1)$ *gauge*-invariantă, cât şi a termenilor de self-interacţiune.

BCU "SI CONTRA" UNIVERSITY LIBRARY

În încheiere, să precizăm că, urmând algoritmul dezvoltat pentru grupul $SU(N)$, se poate scrie forma *gauge*-invariantă a lagrangeienilor Dirac şi Klein-Gordon pentru diferite grupuri Lie particulare, fiecare dintre acestea având câte o constantă unică de cuplaj. Dacă se lucrează cu produse directe de grupuri Lie simple, de exemplu $SU(2) \times U(1)$ sau $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, atunci se ţine cont de algebra Lie (închisă) a fiecărui grup în parte şi de constantele de cuplaj corespunzătoare.

În cazul Modelului Weinberg-Salam de unificare a interacţiunilor electromagnetice cu cele slabe [3, 10, 11, 15, 16] grupul de simetrie utilizat este $SU(2) \times U(1)$.

C. Grupul $SU(2) \times U(1)$

Lagrangeienii Dirac şi Klein-Gordon, pentru câmpurile de masă nulă, cu simetrie locală $SU(2) \times U(1)$, au forma

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}\gamma^i D_i \Psi + \frac{1}{4}\vec{F}_{ij} \cdot \vec{F}^{ij} + \frac{1}{4}G_{ij}G^{ij} \tag{4.37}$$

$$\mathcal{L}_{KG} = (D_i\Phi)^\dagger \left(D^i\Phi\right) + \frac{1}{4}\vec{F}_{ij} \cdot \vec{F}^{ij} + \frac{1}{4}G_{ij}G^{ij}\,, \tag{4.38}$$

unde derivatele covariante

$$D_i\Psi = \left(\partial_i - ig\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_i + ieB_i\right)\Psi \tag{4.39}$$

$$D_i\Phi = \left(\partial_i - ig\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_i + ieB_i\right)\Phi \tag{4.40}$$

$$(D_i\Phi)^\dagger = \Phi^\dagger\left(\overleftarrow{\partial}_i + ig\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{A}_i - ieB_i\right) \tag{4.41}$$

conţin cele patru câmpuri de etalonare, trei asociate generatorilor lui $SU(2)$, notate cu $\vec{A}_i$, şi al patrulea, notat cu B_i, pentru $U(1)$. În (4.37) şi (4.38) sunt prezenţi atât lagrangeianul câmpurilor Yang-Mills, cât

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi cel electromagnetic, exprimaţi în funcţie de tensorii corespunzători (4.25) şi (4.31), acesta din urmă fiind scris ca

$$G_{ij} = \partial_i B_j - \partial_j B_i \, .$$

După cum vom vedea în secţiunea următoare, câmpurile ce mediază interacţiunile slabe şi electromagnetice, notate cu $\{W_i^{\pm}, Z_i^0, A_i\}$, vor fi obţinute din $\{A_i^1, A_i^2, A_i^3, B_i\}$ printr-o rotaţie de unghi Weinberg, θ_W. Trei dintre acestea, anume $\{W_i^{\pm}\}$ şi Z_i^0 (corespunzătoare interacţiunii slabe), vor căpăta masă prin *mecanism Higgs*, iar al patrulea, fotonul, fiind asociat unei *simetrii reziduale* $U(1)$, va rămâne de masă nulă.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.5 Ruperea spontană de simetrie

Există o legătură strânsă între invarianţa *stării de vid*, definită ca stare de energie minimă, şi invarianţa lagrangeianului faţă de acelaşi grup de transformări, globale sau locale. Astfel, simetria exactă se defineşte pentru cazul în care atât lagrangeianul, cât şi starea de vid sunt invariante. Dacă lagrangeianul este invariant, dar starea de vid nu este invariantă, atunci suntem în cazul ruperii spontane de simetrie (*spontaneous symmetry breaking*). Dacă atât lagrangeianul, cât şi starea de vid sunt neinvariante, atunci avem o simetrie ruptă explicit.

Spunem că hamiltonianul H este simetric faţă de grupul $SU(N)$, dacă el rămâne invariant la transformările generate de acesta,

$$UHU^{\dagger} = H\,,\; U \in SU(N)\,, \tag{5.1}$$

deci el comută cu toate elementele grupului,

$$UH = HU\,, \tag{5.2}$$

sau, utilizând dezvoltarea în serie (4.12), dacă el comută cu generatorii algebrei Lie asociate grupului,

$$T^a H = HT^a\,,\; (\forall)\; \{T^a\}_{a=\overline{1,n}}\,. \tag{5.3}$$

Pentru starea de energie minimă, notată cu Φ_0 şi denumită *stare de vid*, condiţia de neinvarianţă faţă de grupul $SU(N)$

$$U\Phi_0 \neq \Phi_0 \tag{5.4}$$

revine, după aplicarea dezvoltării (4.12), la

$$T^a\Phi_0 \neq 0\,. \tag{5.5}$$

Cum mecanismul ruperii spontane de simetrie pare să fie agreat de natură şi, prin consecinţele sale, este intens exploatat în explicarea

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unor fenomene din fizica corpului solid (tranziţia de la para- la feromagnetism), în teoria supraconductivităţii (efectul Meissner) şi, mai ales, în teoria interacţiunilor electroslabe (Modelul Weinberg-Salam), fiind singura cale prin care bozonii vectoriali intermediari masivi capătă masă (fără a strica renormabilitatea teoriei), considerăm necesară o scurtă prezentare a sa.

A. Ruperea spontană a simetriei globale

Considerăm un lagrangeian cu termen de auto-interacţiune $\lambda\left(\Phi^\dagger\Phi\right)^2$, de tipul

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= (\partial_i\Phi)^\dagger(\partial_i\Phi)^\dagger - m^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda\left(\Phi^\dagger\Phi\right)^2 = \\ &= (\partial_i\Phi)^\dagger(\partial_i\Phi)^\dagger - V\,,\end{aligned} \tag{5.6}$$

pentru dubletul scalar complex

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4\end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Datorită schimbării semnului din faţa termenului de masă, (5.6) ar descrie un câmp *tachyonic*[4]. Verificarea invarianţei acestui lagrangeian faţă de grupul $SU(2)$ global fiind imediată, să trecem acum la determinarea stării de energie minimă. Din condiţiile

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial\Phi} &= \Phi^\dagger\left[m^2 - 2\lambda|\Phi|^2\right] = 0\,, \\ \frac{\partial V}{\partial\Phi^\dagger} &= \left[m^2 - 2\lambda|\Phi|^2\right]\Phi = 0\,,\end{aligned} \tag{5.8}$$

rezultă imediat că

$$|\Phi_0| = \pm\frac{v}{\sqrt{2}}\chi\,, \tag{5.9}$$

[4]Cuante ipotetice de câmp, având mase pur imaginare şi care se deplasează cu viteză supraluminică.

unde am introdus notaţia

$$v = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}\,, \tag{5.10}$$

iar χ este o matrice (2×1) oarecare. Starea de vid (5.9) fiind infinit degenerată, ne fixăm asupra valorii

$$\Phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

şi observăm că toţi generatorii algebrei $\mathcal{SU}(2)$ îi rup simetria conform criteriului (5.5), deoarece

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^1}{2}\Phi_0 &= \frac{v}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0\,, \\ \frac{\sigma^2}{2}\Phi_0 &= \frac{-iv}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0\,, \\ \frac{\sigma^3}{2}\Phi_0 &= \frac{v}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0\,, \end{aligned} \tag{5.12}$$

situându-ne în cazul *simetriei* $SU(2)$ *globale rupte spontan.*

Efectuând translaţia faţă de minim

$$\Phi \;\rightarrow\; \Phi' = \Phi - \Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 - v + i\phi_4 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

aducem lagrangeianul (5.6) la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}\left[(\partial_i\phi_1)\left(\partial^i\phi_1\right) + (\partial_i\phi_2)\left(\partial^i\phi_2\right) + (\partial_i\phi_4)\left(\partial^i\phi_4\right)\right] + \\ + \frac{1}{2}(\partial_i\phi_3)\left(\partial^i\phi_3\right) + m^2(\phi_3)^2 + \textit{termeni interactivi}\,, \end{aligned} \tag{5.14}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

în care am utilizat (5.10) şi ne-am limitat, pentru moment, doar la partea corespunzătoare câmpurilor libere. Acest ultim rezultat ilustrează aşa-numita *teoremă Goldstone*, care spune că ruperea spontană a simetriei globale are drept consecinţă apariţia unor particule fără ma să şi fără spin, denumite *bozoni Nambu-Goldstone* sau, simplu, *goldstoni*. Este important să observăm că numărul acestora este egal cu numărul generatorilor care rup simetria stării de vid. În cazul nostru, aceştia ar fi chiar câmpurilor scalare reale $\{\phi_1, \phi_2, \phi_4\}$ din (5.7) şi ar corespunde celor trei generatori ce rup simetria $SU(2)$ a lui (5.11). De asemenea, se constată dispariţia *tachyonului* şi restaurarea semnului corect pentru termenul de masă al câmpului ϕ_3.

B. Ruperea spontană a simetriei locale

Transformăm lagrangeianul (5.6) într-unul local invariant $SU(2)$, prin înlocuirea derivatelor obişnuite cu derivatele covariante

$$\begin{aligned} D_i\Phi &= \left(\partial_i - ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{A}_i\right)\Phi \\ (D_i\Phi)^\dagger &= \Phi^\dagger\left(\overleftarrow{\partial}_i + ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{A}_i\right) \end{aligned} \tag{5.15}$$

şi includerea părţii corespunzătoare câmpurilor *gauge* $\{A^\mu\}_{\mu=\overline{1,3}}$, adică

$$\mathcal{L}_3 = (D_i\Phi)^\dagger\left(D^i\Phi\right) - m^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda\left(\Phi^\dagger\Phi\right)^2 + \frac{1}{4}\vec{F}_{ij}\cdot\vec{F}^{ij}\,, \tag{5.16}$$

unde F^μ_{ij} are expresia (4.25). Acest lagrangeian este invariant la transformările de tipul (4.22), dar, în virtutea relaţiilor (5.12), starea de vid (5.11) nefiind invariantă, suntem în cazul simetriei locale $SU(2)$ ruptă spontan. După efectuarea translaţiei (5.13), termenul cinetic din

BCU SIBIU / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

lagrangeianul $\mathcal{L}_3$ devine, prin simpla înlocuire a lui Φ cu $\Phi' + \Phi_0$,

$$\left(\Phi'^{\dagger} + \Phi_0^{\dagger}\right)\left(\overleftarrow{\partial_i} + ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{A}_i\right)\left(\partial^i - ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{A}^i\right)(\Phi' + \Phi_0) =$$

$$= \partial_i\Phi'^{\dagger}\partial^i\Phi' + ig\Phi_0^{\dagger}\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{A}_i\partial^i\Phi' - ig\partial_i\Phi'^{\dagger}\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{A}^i\Phi_0 +$$

$$+ g^2\Phi_0^{\dagger}\left(\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{A}^i\right)^2\Phi_0 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\partial_i\phi_1)\left(\partial^i\phi_1\right) + (\partial_i\phi_2)\left(\partial^i\phi_2\right) +\right.$$

$$\left. + (\partial_i\phi_3)\left(\partial^i\phi_3\right) + (\partial_i\phi_4)\left(\partial^i\phi_4\right)\right] +$$

$$+ \frac{g^2v^2}{8}\vec{A}_i\cdot\vec{A}^i - \frac{gv}{2}\left[A_i^1\partial^i\phi_2 + A_i^2\partial^i\phi_1 - A_i^3\partial^i\phi_4\right]\ldots \tag{5.17}$$

în care omitem termenii de interacţiune. Pe lângă termenul de masă pentru câmpurile de etalonare

$$\frac{g^2v^2}{8}\vec{A}_i\cdot\vec{A}^i\,,$$

remarcăm în (5.17) cuplajele nefizice

$$-\frac{gv}{2}\left[A_i^1\partial^i\phi_2 + A_i^2\partial^i\phi_1 - A_i^3\partial^i\phi_4\right]\,.$$

Pentru eliminarea acestora, vom rescrie câmpul translat (5.13) ca

$$\Phi' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\phi_2 + i\phi_1\\ H - v - i\phi_3\end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

în care am notat pe ϕ_3 cu H şi le-am redefinit pe celelalte, astfel încât să recunoaştem în acestă formă primul termen al dezvoltării exponenţialei

$$\Phi' = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-i\frac{\vec{\sigma}}{v}\cdot\vec{\phi}\right)\begin{pmatrix}0\\ H - v\end{pmatrix}, \tag{5.19}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cu $\langle 0|\phi^\mu|0\rangle = 0$. Câmpul Φ poate fi scris acum sub forma

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(i\frac{\vec{\sigma}}{v}\cdot\vec{\phi}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ H+v \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

sugerând-ne transformarea de etalon

$$\phi = U\Phi\,,\ \text{cu}\ U = \exp\left(-i\frac{\vec{\sigma}}{v}\cdot\vec{\phi}\right), \tag{5.21}$$

care îl aduce pe Φ la forma deosebit de simplă

$$\phi = \frac{v+H}{\sqrt{2}}\chi\,,\ \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

Înlocuind (5.22) în lagrangeianul (5.16), observăm că:

- din termenul cinetic

$$\begin{aligned}
&(D_i\Phi)^\dagger\left(D^i\Phi\right) = (D_i\phi)^\dagger\left(D^i\phi\right) = \\
&= \frac{1}{2}\chi^\dagger\left[\left(\partial_i + ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{B}_i\right)(v+H)\right] \\
&\left[\left(\partial^i - ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{B}^i\right)(v+H)\right]\chi = \\
&= \frac{1}{2}\partial_i H\partial^i H + \frac{g^2v^2}{8}\left(B_i^1B^{1i} + B_i^2B^{2i} + B_i^3B^{3i}\right) + \ldots,
\end{aligned} \tag{5.23}$$

în care am neglijat termenii de interacţiune, au fost eliminate cuplajele nefizice de tipul $B_i\partial^i\Phi$. În schimb, a apărut câte un termen de masă $\frac{g^2v^2}{8}B_iB^i$ pentru fiecare dintre cele trei câmpuri *gauge* asociate celor trei generatori care au rupt simetria stării de vid şi un termen cinetic pentru scalarul real H. De asemenea, o dată cu efectuarea transformării (5.21) pentru câmpul Φ,

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

am transformat şi câmpurile de etalonare $\{A_i^\mu\}_{\mu=\overline{1,3}}$ după relaţia (4.24), adică

$$B_i^\mu = A_i^\mu + \frac{1}{v}\varepsilon^{\mu\alpha\beta}\phi_\alpha A_{i\beta} - \frac{1}{gv}\partial_i\phi^\mu ; \tag{5.24}$$

- termenul $-m^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda\left(\Phi^\dagger\Phi\right)^2$ devine

$$-m^2\phi^\dagger\phi + \lambda\left(\phi^\dagger\phi\right)^2 =$$

$$= -\frac{m^2}{2}(v+H)^2 + \frac{\lambda}{4}(v+H)^4 = m^2H^2 + \ldots, \tag{5.25}$$

reprezentând, după neglijarea termenilor de interacţiune, termenul de masă, cu semn corect,

$$\frac{1}{2}\mu^2H^2 = m^2H^2 \tag{5.26}$$

al câmpului scalar real H, denumit *scalar Higgs*;

- lagrangeianul câmpurilor Yang-Mills $\frac{1}{4}\tilde{F}_{ij}\tilde{F}^{ij}$ conţine acum, în locul câmpurilor $\{A_i^\mu\}_{\mu=\overline{1,3}}$, câmpurile transformate $\{B_i^\mu\}_{\mu=\overline{1,3}}$, date de (5.24).

Sintetizând, observăm că, plecând de la un lagrangeian $SU(2)$ *gauge*-invariant, (5.16), în care avem un câmp scalar de tip *tachyonic* şi trei câmpuri de etalonare de masă nulă, prin ruperea spontană a simetriei am ajuns la un nou lagrangeian, cu următorul conţinut de particule: trei câmpuri Yang-Mills de mase egale, corespunzând celor trei generatori care au rupt simetria, şi un câmp scalar real, de masă $\sqrt{2}m$, denumit câmp Higgs. Evident, ruperea spontană a simetriei locale implică (automat) şi ruperea spontană a simetriei globale, care are ca efect apariţia celor trei "bozoni *Goldstone*". Dispariţia completă a acestora, în cazul simetriei locale rupte spontan, a fost explicată în felul

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

următor: fiecare dintre cele trei câmpuri *gauge*, corespunzătoare generatorilor care au rupt simetria locală $SU(2)$, a "înghiţit" câte un bozon *Goldstone*, transformându-se dintr-un câmp fără masă, într-unul masiv. Acest mecanism a primit denumirea de *mecanismul Higgs-Kibble* sau simplu, *mecanismul Higgs*. Genialitatea teoriei constă în următoarele: interacţiunea slabă, după cum vom vedea în subparagraful următor, este mediată de bozoni vectoriali masivi. Dar se poate demonstra că, prin introducerea, de la început, în lagrangeianul Yang-Mills, a unui termen de masă pentru câmpurile vectoriale, distrugem renormabilitatea teoriei. În schimb, ruperea spontană de simetrie nu strică renormabilitatea. Astfel, dacă se pleacă cu un lagrangeian renormabil (şi lagrangeianul Yang-Mills de forma (4.14) este renormabil) în care câmpurile vectoriale asociate generatorilor unui grup de transformări *gauge* capătă masă prin ruperea spontană a simetriilor locale, lagrangeianul rămâne renormabil şi în urma mecanismului Higgs. S-a considerat că această descoperire, aparţinând lui 't Hooft [40], a schimbat istoria fizicii teoretice, conferind teoriei interacţiunilor electroslabe, în formularea lui Weinberg şi Salam, statutul de fi una dintre cele mai importante teorii ale secolului nostru.

C. Modelul Weinberg-Salam

Teoria interacţiunilor electroslabe, ce unifică electrodinamica şi teoria interacţiunilor slabe, elaborată de S. Weinberg [66] şi A. Salam [57], a înlocuit cu succes "teoria celor patru fermioni" (Fermi, 1934). Aceasta, având indicele de divergenţă 2, nu era renormabilă, în sensul că divergenţele din cadrul ei nu puteau fi absorbite prin redefinirea constantelor de cuplaj [11].

Dacă în cazul interacţiunilor electromagnetice lagrangeianul (4.36) asociat fotonului nu conţine termen de masă, în schimb, interacţiunile slabe având rază mică de acţiune, $r_W \approx 2 \cdot 10^{-16}$ cm, reclamă câmpuri

vectoriale masive, cu

$$m_{1W} = \frac{h}{2\pi r_{1W} c} = \approx 81 \text{ GeV},$$

descrise de lagrangeianul nerenormabil

$$\mathcal{L}_W = \frac{1}{4}\left(\partial_i W_j^\dagger - \partial_j W_i^\dagger\right)\left(\partial^i W^j - \partial^j W^i\right) + m_{1W}^2 W_i^\dagger W^i .$$

Cum un lagrangeian asociat unor câmpuri vectoriale de masă nulă este renormabil, singura soluţie prin care el rămâne astfel şi în cazul câmpurilor vectoriale masive este ca acestea să capete masă prin mecanismul Higgs.

Scopul nostru nefiind prezentarea Modelului Weinberg-Salam, ci doar mecanismul ruperii spontane de simetrie din cadrul său, ne vom limita doar la termenii din lagrangeian ce sunt implicaţi în acest proces, şi anume

$$\mathcal{L}_{WS} = (D_i\Phi)^\dagger\left(D^i\Phi\right) - m^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda\left(\Phi^\dagger\Phi\right)^2 + \frac{1}{4}\vec{F}_{ij}\cdot\vec{F}^{ij} + \frac{1}{4}G_{ij}G^{ij} . \tag{5.27}$$

Teoria are la bază produsul direct al grupurilor de etalonare $SU(2)$ şi $U(1)$, prezentat deja în paragraful precedent, cu constantele de cuplaj g şi g' şi generatorii $\left\{\frac{\sigma^\mu}{2}\right\}_{\mu=\overline{1,3}}$ şi, respectiv, hipersarcina Y. Astfel, derivata *gauge*-covariantă are expresia

$$D_i\Phi = \left(\partial_i - ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{A}_i - ig'\frac{Y}{2}B_i\right)\Phi , \tag{5.28}$$

cu $Y(\Phi) = 1$, iar tensorii câmpurilor de etalonare vor fi (4.25) şi (4.31), adică

$$\begin{aligned} F_{ij}^\mu &= \partial_i A_j^\mu - \partial_j A_i^\mu + g\varepsilon^{\mu\alpha\beta}A_{i\alpha}A_{j\beta} \\ G_{ij} &= \partial_i B_j - \partial_j B_i . \end{aligned} \tag{5.29}$$

BCU IAŞI / CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

Condiţiile de minim (5.8) pun în evidenţă starea de vid (5.11), a cărei simetrie este ruptă atât de generatorii grupului $SU(2)$, conform (5.12), cât şi de hipersarcina Y. În schimb, combinaţia corespunzătoare sarcinii electrice

$$Q = \frac{1}{2}(\sigma_3 + Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.30}$$

satisfăcând

$$Q\chi = 0\,, \tag{5.31}$$

lasă invariantă starea de vid, care are, deci, simetria reziduală $U(1)_{em}$. După cum vom vedea, acestei simetrii îi va corespunde un câmp *gauge* (fotonul) care rămâne de masă nulă. Deci numărul câmpurilor *gauge* ce capătă masă prin mecanism Higgs este egal cu numărul generatorilor simetriei iniţiale minus numărul generatorilor simetriei finale.

Efectuând translaţia (5.18) şi transformarea (5.21), adică lucrând cu un dublet scalar de forma (5.22), vom obţine pentru termenul cinetic din lagrangeianul (5.27) expresia

$$\begin{aligned}
&(D_i\Phi)^\dagger \left(D^i\Phi\right) = (D_i\phi)^\dagger \left(D^i\phi\right) = \\
&= \frac{1}{2}\chi^\dagger \left[\left(\partial_i + ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{A}'_i + i\frac{g'}{2}B'_i\right)(v+H)\right] \\
&\left[\left(\partial^i - ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\vec{A}'^i - i\frac{g'}{2}B'^i\right)(v+H)\right]\chi\,,
\end{aligned}$$

adică

$$
\begin{aligned}
&(D_i\Phi)^\dagger \left(D^i\Phi\right) = (D_i\phi)^\dagger \left(D^i\phi\right) = \\
&= \frac{1}{2}\partial_i H \partial^i H + \frac{g^2v^2}{8}\left(\vec{A}_i'\right)^2 - \frac{gg'v^2}{4}A_i'^3 B'^i + \frac{g'^2v^2}{8}B_i'B'^i = \\
&= \frac{1}{2}\partial_i H \partial^i H + \frac{g^2v^2}{8}\left[\left(A_i'^1\right)^2 + \left(A_i'^2\right)^2\right] + \frac{v^2}{8}\left(gA_i'^3 - g'B_i'\right)^2 = \\
&= \frac{1}{2}\partial_i H \partial^i H + \frac{g^2v^2}{8}\left[\left(A_i'^1\right)^2 + \left(A_i'^2\right)^2\right] + \\
&+ \frac{v^2}{8}\begin{pmatrix} A_i'^3 & B_i' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_3'^i \\ B'^i \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

în care am păstrat doar termenii corespunzători câmpurilor libere şi am transformat câmpurile *gauge* iniţiale. Pentru a decupla câmpurile $A_i'^3$ şi B_i', vom diagonaliza matricea pătratică din (5.32) printr-o rotaţie de "unghi Weinberg"

$$
\tan\theta_W = \frac{g'}{g} \tag{5.33}
$$

şi, redefinind câmpurilor de etalonare prin

$$
\begin{aligned}
W_i^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_i'^1 - iA_i'^2\right) \\
W_i^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_i'^1 + iA_i'^2\right) \\
Z_i &= A_i'^3\cos\theta - B_i'\sin\theta \\
A_i &= A_i'^3\sin\theta + B_i'\cos\theta\,,
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

ultimul termen din (5.32) devine

$$
\frac{1}{2}\begin{pmatrix} Z_i & A_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{(g^2+g'^2)v^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z^i \\ A^i \end{pmatrix}. \tag{5.35}
$$

BCU IASI / CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

În sfârşit, aducem relaţia (5.32), din care eliminăm termenii de interacţiune, la forma

$$\frac{1}{2}\partial_i H \partial^i H + M_W^2 W_i^+ W^{i-} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_i Z^i \,, \tag{5.36}$$

unde, pe lângă termenul cinetic al scalarului Higgs, au apărut termenii de masă

$$\begin{aligned} M_W &= \frac{gv}{2} \\ M_Z &= \frac{\sqrt{g^2+g'}\,v}{2} \end{aligned} \tag{5.37}$$

ai bozonilor $W_i^{\pm}$ şi Z_i^0. Aşa cum era de aşteptat, modelul prezentând o simetrie reziduală $U(1)_{em}$, câmpul *gauge* asociat acesteia, A_i (fotonul), a rămas fără masă. Celelalte trei câmpuri de etalonare, corespunzătoare simetriilor rupte spontan, au "înghiţit" cele trei particule *Goldstone*, apărute ca urmare a ruperii simetriei globale $SU(2)$, devenind masive.

În ceea ce priveşte câmpul Higgs H, acesta este descris de lagrangeianul

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}\partial_i H \partial^i H + m^2 H^2 \tag{5.38}$$

în care, pe lângă termenul cinetic din (5.32), a apărut termenul de masă (cu semn corect) (5.26). Până la descoperirea sa experimentală, o estimare a masei acestuia

$$m_H = m\sqrt{2} = v\sqrt{2\lambda} \tag{5.39}$$

se poate face considerând cuplajul particulelor *Goldstone* la scalarul Higgs $\lambda/4 \approx 1$ şi

$$v = \frac{2M_W}{g} = 246 \text{ GeV} \,, \tag{5.40}$$

adică

$$m_H \approx 693 \text{ GeV} \,. \tag{5.41}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Modelul Weinberg-Salam este considerat, alături de Electrodinamica Cuantică în formularea ei originală, una dintre cele mai valoroase teorii ale acestui secol, nu numai prin eleganţa şi coerenţa sa, ci mai ales prin numeroasele confirmări experimentale. Fără a detalia acest subiect, el depăşind cu mult cadrul prezentei lucrări, vom încheia prin a da valorile experimentale ale celor mai importanţi parametri ai săi:

$$\begin{aligned} \sin^2\theta_W &= 0.2325 \pm 0.008\,, \\ M_Z &= 91.173 \pm 0.020\ \mathrm{GeV/c^2}\,, \\ M_W &= 80.22 \pm 0.26\ \mathrm{GeV/c^2}\,. \end{aligned} \tag{5.42}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul 2

PROBLEME GENERALE ALE CUANTIFICĂRII CÂMPULUI

2.1 Necesitatea cuantificării câmpului

Cu toate succesele sale remarcabile, Mecanica Cuantică, cunoscută de noi prin lucrările lui de Broglie, Heisenberg, Schrödinger, Dirac etc., conţine unele inconsecvenţe şi contradicţii interne. Astfel, ea se rezumă la studiul proceselor cuantice în care numărul şi felul particulelor nu se modifică în decursul interacţiunii, variind doar starea lor energetică şi de impuls. Formalismul Mecanicii Cuantice nu este capabil să descrie variaţia numărului de particule, transformarea unui tip de particulă în altele etc. Totuşi, în studiul cuantic al unor procese, se utilizează fenomenul de variaţie a numărului de particule, dar acest lucru este realizat în mod forţat şi inconsecvent. De pildă, Mecanica Cuantică nu poate oferi o explicaţie satisfăcătoare fenomenului de emisie spontană,

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

prin care un electron aflat pe un nivel energetic excitat emite un foton γ şi trece pe un nivel energetic inferior.

Apare astfel necesitatea unui nou formalism, care să permită explicarea fenomenelor de transformare a particulelor. Acest formalism constă în cuantificarea undelor de Broglie asociate particulelor şi poartă numele de Teoria Cuantică a Câmpurilor.

Pentru precizarea ideilor, să considerăm un sistem format din n particule aflate într-o stare cuantică nestaţionară, descrisă de vectorul *ket* $|\psi\rangle$ şi fie $|\varphi_i\rangle$ şirul complet şi ortonormal de vectori proprii ai operatorului $\hat{A}$, corespunzător unei mărimi fizice A, cu spectru discret. Avem atunci

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i|\varphi_i\rangle \,, \tag{1.1}$$

unde c_i sunt coeficienţii dezvoltării în serie a lui $|\psi\rangle$ după vectorii proprii $|\varphi_i\rangle$. În interpretarea obişnuită, $c_i^* c_i$ este probabilitatea ca, la momentul t, un număr n_i de particule, din numărul total n, să se găsească în starea $|\varphi_i\rangle$. Întrucât, conform ipotezei, starea nu este staţionară, probabilitatea se modifică în decursul procesului. Astfel, cel puţin una dintre particulele aflate iniţial în starea $|\varphi_i\rangle$ va trece, după intervalul de timp Δt, într-o altă stare, $|\varphi_k\rangle$. Normând, acum, funcţia de stare $|\psi\rangle$ la n, avem

$$\langle\psi|\psi\rangle = n \,, \tag{1.2}$$

sau

$$\sum_i \langle\varphi_i|c_i^* c_i|\varphi_i\rangle = \sum_i n_i = n \,, \tag{1.3}$$

de unde, presupunând că $|\varphi_i\rangle$ este normat la unitate, rezultă

$$\sum_i |c_i|^2 = n \tag{1.4}$$

şi încă

$$|c_i|^2 = n_i \,. \tag{1.5}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

De aici, observăm că, la trecerea particulei din starea $|\varphi_i\rangle$ în starea $|\varphi_k\rangle$, numărul de particule $n_i = c_i^* c_i$ scade cu o unitate, iar numărul de particule $n_k = c_k^* c_k$ creşte cu o unitate. Cu alte cuvinte, vom avea de-a face cu o variaţie discretă a lui c_i, deci şi $|\psi\rangle$ va varia discontinuu. Dar Mecanica Cuantică consideră atât vectorul de stare $|\psi\rangle$, cât şi coeficienţii c_i, ca fiind funcţii continue şi chiar derivabile. Am ajuns astfel la contradicţia despre care am pomenit mai sus.

Variaţia discretă a funcţiei de stare $|\psi\rangle$ şi a coeficienţilor c_i conduce la necesitatea cuantificării acestora. Prin urmare, lui $|\psi\rangle$ şi c_i le vor corespunde nişte operatori. De pildă, numărului n_i de particule în starea cuantică $|\varphi_i\rangle$ îi corespunde operatorul

$$c_i^\dagger c_i = n_i \,. \tag{1.6}$$

Consideraţiile de mai sus au fost, în mod ingenios, ilustrate şi dezvoltate într-o experienţă imaginată de către Louis de Broglie. Fie, deci, un sistem de n particule identice, descris de vectorul *ket* $|\psi\rangle$, normat la n (vezi (1.2)). Fie, de asemenea, A şi B două mărimi observabile, fiecare conţinând mărimile ce determină starea cuantică a particulelor. Presupunem că operatorii $\hat{A}$ şi $\hat{B}$, ataşaţi lui A, respectiv B, nu comută, altfel spus, cele două mărimi nu sunt simultan măsurabile. Avem

$$\hat{A}|\varphi_i\rangle = \alpha_i|\varphi_i\rangle \tag{1.7}$$

şi

$$\hat{B}|\chi_k\rangle = \beta_k|\chi_k\rangle \,, \tag{1.8}$$

în care am presupus că vectorii proprii $|\varphi_i\rangle$ şi $|\chi_k\rangle$ formează câte un şir complet şi ortonormal

$$\langle\varphi_i|\varphi_{i'}\rangle = \delta_{ii'} \,, \tag{1.9}$$

respectiv

$$\langle\chi_k|\chi_{k'}\rangle = \delta_{kk'} \,. \tag{1.10}$$

BCU IAŞI CENTRU UNIVERSITAR

Dezvoltarea în serie a lui $|\psi\rangle$ poate fi efectuată fie după vectorii proprii $|\varphi_i\rangle$, adică

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i|\varphi_i\rangle\,, \tag{1.11}$$

fie după vectorii proprii $|\chi_k\rangle$, deci

$$|\psi\rangle = \sum_k d_k|\chi_k\rangle\,, \tag{1.12}$$

după cum vrem să măsurăm sistemul de mărimi A sau sistemul de mărimi B. Din (1.7) şi (1.8) rezultă atunci că numărul de particule pentru care α_i este o valoare proprie a lui $\hat{A}$ va fi

$$c_i^\dagger c_i = n_i\,, \tag{1.13}$$

iar numărul de particule pentru care β_k este o valoare proprie a lui $\hat{B}$ este

$$d_k^\dagger d_k = n'_k \tag{1.14}$$

în relaţia evidentă

$$\sum_i n_i = \sum_k n'_k = n. \tag{1.15}$$

Ţinând seama de modul în care am definit mărimile A şi B, numărul de particule n_i (respectiv n'_k) se va supune uneia din cele două statistici cuantice, Bose-Einstein sau Fermi-Dirac, adică n_i poate fi orice număr natural (inclusiv zero) în cazul bozonilor şi zero sau unu în cazul fermionilor (datorită principiului de excluziune al lui Pauli).

Trecerea de la reprezentarea $|\varphi_i\rangle$ la reprezentarea $|\chi_k\rangle$

$$|\varphi_i\rangle = \sum_k S_{ki}|\chi_k\rangle \tag{1.16}$$

realizându-se cu ajutorul unei matrice unitare S, cu elementele S_{ki}

$$\sum_k S^*_{ki}S_{kj} = \delta_{ij} \tag{1.17}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

avem, din (1.11) şi (1.12),

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i|\varphi_i\rangle = \sum_i \sum_k c_i S_{ki}|\chi_k\rangle = \sum_k \left(\sum_i c_i S_{ki}\right)|\chi_k\rangle = \\ = \sum_k d_k|\chi_k\rangle ,$$

de unde rezultă

$$d_k = \sum_i c_i S_{ki} . \tag{1.18}$$

Pentru a determina coeficienţii c_i, să presupunem acum că cele n particule, ce formează sistemul considerat, sunt conţinute într-un domeniu finit R şi se deplasează într-o direcţie dată. În calea acestui fascicul putem aşeza două dispozitive D_A şi D_B, ca în figură, care măsoară sistemele de mărimi A, respectiv B.

Scriind mărimile c_i şi $c_i^\dagger$ sub forma

$$c_i = |c_i|\, e^{i\theta_i} \; ; \; c_i^\dagger = |c_i|\, e^{-i\theta_i} , \tag{1.19}$$

unde prin $|c_i|$ am notat amplitudinea, iar prin θ_i–faza mărimii c_i, distingem următoarele posibilităţi:

a) Dacă în calea fasciculului se introduce numai dispozitivul D_A, atunci putem determina numai numărul de particule n_i şi amplitudinile c_i, pe baza relaţiei (1.13), ca fiind

$$|c_i| = \sqrt{n_i} , \tag{1.20}$$

fără a putea cunoaşte însă şi fazele θ_i.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) Dacă în calea fasciculului se introduce numai dispozitivul D_B, atunci vom determina numărul de particule n'_k şi, ţinând cont de (1.14), (1.18) şi (1.19), avem

$$n'_k = \sum_i \sum_k S^*_{ki} S_{kj} c_i^\dagger c_j = \\ = \sum_{i=j} |S_{ki} c_i|^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} S^*_{ki} S_{kj} |c_i||c_j| e^{i(\theta_j - \theta_i)} , \quad (1.21)$$

de unde rezultă că, în lipsa dispozitivului D_A, am putea cunoaşte diferenţele de fază $\theta_j - \theta_i$, dar nu şi amplitudinile $|c_i|$.

c) Intercalând ambele dispozitive, de pildă în ordinea $D_A\ D_B$ indicată în figură, constatăm că dispozitivul D_A distinge n_i particule în starea $|\varphi_i\rangle$, descrise de vectorul *ket*

$$c_i|\varphi_i\rangle = \sum_k S_{ki} c_i |\chi_k\rangle . \quad (1.22)$$

Între cele n_i particule care ajung la D_B, există un număr de

$$n'_{ik} = |S_{ki} c_i|^2 \quad (1.23)$$

cu valoarea proprie β_k a mărimii B. Prin urmare, numărul tuturor particulelor cu valoare proprie β_k este

$$n''_k = \sum_i n'_{ik} = \sum_i |S_{ki} c_i|^2 = \sum_i |S_{ki}|^2 |c_i|^2 \neq n'_k , \quad (1.24)$$

iar numărul total de particule fiind, din nou,

$$\sum_k n''_k = \sum_i \sum_k S^*_{ki} S_{ki} c_i^\dagger c_i = \sum_i c_i^\dagger c_i = \sum_i |c_i|^2 = \sum_i n_i = n , \quad (1.25)$$

rezultă că, în acest caz, nu putem determina decât amplitudinile $|c_i|$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

d) În mod cu totul similar, se poate arăta că, dacă cele două dispozitive sunt intercalate în ordine inversă, adică $D_B\ D_A$, rezultatul este acelaşi.

Concluzie. Faptul că mărimile $|c_i|$ şi θ_i nu pot fi determinate simultan, se traduce în limbajul Mecanicii Cuantice prin aceea că $|c_i|$ şi θ_i sunt operatori care nu comută, adică

$$[|c_i|\,,\,\theta_i] \neq 0\,. \tag{1.26}$$

Dar, dacă $|c_i|$ şi θ_i sunt operatori, atunci, cu necesitate, şi funcţia de stare $|\psi\rangle$ este un operator. Ajungem astfel, din nou, la necesitatea cuantificării câmpului.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.2 Relaţii de comutare şi anticomutare. Operatori de emisie şi de absorbţie

Pentru a fi mai aproape de semnificaţia fizică a operatorului c_i, să alegem comutatorul

$$\left[|c_i|^2, \theta_i\right] = [n_i, \theta_i] \neq 0 . \tag{2.1}$$

Pe baza experienţei teoretice acumulate în cadrul Mecanicii Cuantice, ştim că, dacă doi operatori nu comută, atunci există cazuri când unul dintre ei poate fi un operator diferenţial în raport cu mărimea exprimată de cel de al doilea. (Ne amintim, de pildă, de relaţia lui Heisenberg $[p_x, x] = \frac{\hbar}{i}$, unde $p_x \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$). Să alegem, atunci, θ_i ca fiind un operator diferenţial, canonic conjugat cu operatorul n_i. Prin analogie cu expresia operatorului impuls generalizat

$$\hat{\vec{P}} = \frac{\hbar}{i}\nabla - e\vec{A}, \tag{2.2}$$

vom alege operatorul θ_i de forma

$$\hat{\theta}_i = \frac{\kappa}{i}\frac{\partial}{\partial n_i} + \lambda_i , \tag{2.3}$$

unde κ este o constantă al cărei sens va rezulta din considerente fizice. Aici, n_i trebuie conceput ca o variabilă continuă care, după efectuarea calculelor, va lua valori numere naturale, doar acestea având semnificaţie fizică.

Odată cunoscut faptul că operatorii n_i şi θ_i nu comută, trebuie să alegem, în mod corespunzător, ordinea modulului şi a argumentului în expresia operatorilor c_i şi $c_i^\dagger$, pentru a putea asigura satisfacerea relaţiei

$$c_i^\dagger c_i = |c_i|^2 = n_i .$$

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Astfel, în locul relaţiilor (1.19), vom alege

$$\begin{aligned} c_i &= e^{i\theta_i}|c_i| \\ c_i^\dagger &= |c_i| e^{-i\theta_i} \end{aligned} \tag{2.4}$$

şi, înlocuind (2.3) în (2.4), obţinem

$$\text{a)}\quad c_i = e^{\kappa\frac{\partial}{\partial n_i}} \mu_i |c_i|$$

$$\text{b)}\quad c_i^\dagger = |c_i| \mu_i^\dagger e^{-\kappa\frac{\partial}{\partial n_i}}, \tag{2.5}$$

unde

$$\begin{aligned} \mu_i &= e^{i\lambda_i} \\ \mu_i^\dagger &= e^{-i\lambda_i}, \text{ cu } \mu_i^\dagger \mu_i = \mu_i \mu_i^\dagger = 1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Observăm că operatorul $e^{\kappa\frac{\partial}{\partial n_i}}$ acţionează numai asupra mărimilor ce depind de numărul de particule n_i. Considerând deci o funcţie $f(n_i)$, ce depinde doar de numărul de particule n_i, avem

$$\begin{aligned} & e^{\kappa\frac{\partial}{\partial n_i}} f(n_i) = \\ &= \left(1 + \frac{\kappa}{1!}\frac{\partial}{\partial n_i} + \frac{\kappa^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial n_i^2} + \ldots + \frac{x^q}{q!}\frac{\partial^q}{\partial n_i^q} + \ldots\right) f(n_i) = \\ &= f(n_i + \kappa). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Procedând exact în acelaşi mod, găsim că aplicarea operatorului $e^{-\kappa\frac{\partial}{\partial n_i}}$ funcţiei $f(n_i)$ este echivalentă cu dezvoltarea în serie a funcţiei $f(n_i - \kappa)$. Sintetizând, putem scrie acum

$$e^{\pm\kappa\frac{\partial}{\partial n_i}} f(n_i) = f(n_i \pm \kappa). \tag{2.8}$$

Deoarece argumentul funcţiei $f(n_i)$ are semnificaţia unui număr de particule, κ este, în mod obligatoriu, un număr întreg.

BCU IASI - CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

Operatorul $c^\dagger$ se numeşte *operator de emisie* (sau *de creare*), iar c este *operator de absorbţie* (sau *de anihilare*), denumiri ce vor fi justificate ulterior.

În continuare, să stabilim relaţiile de comutare pe care le satisfac operatorii de emisie şi de absorbţie, atât în cazul bozonilor, cât şi al fermionilor.

a) Dacă particulele considerate sunt bozoni, atunci n_i poate fi orice număr întreg (inclusiv zero), condiţie ce poate fi îndeplinită dacă alegem $\kappa = 1$. Atunci, din (1.20) şi (2.5), avem

$$c_i = e^{\frac{\partial}{\partial n_i}} \mu_i \sqrt{n_i}$$

$$c_i^\dagger = \sqrt{n_i}\, \mu_i^\dagger e^{-\frac{\partial}{\partial n_i}}, \tag{2.9}$$

de unde, ţinând cont de (2.6) şi (2.8), putem scrie

$$c_i c_i^\dagger = e^{\frac{\partial}{\partial n_i}}(n_i)\, e^{-\frac{\partial}{\partial n_i}} = n_i + 1$$

$$c_i^\dagger c_i = \sqrt{n_i}\sqrt{n_i} = n_i,$$

care ne conduc la

$$\left[c_i, c_i^\dagger\right] = 1, \tag{2.10}$$

unde 1 este operatorul unitate. În cazul a doi operatori independenţi, c_i şi $c_k^\dagger$, corespunzători la două stări diferite sau la două categorii diferite de particule, n_i şi n_k, avem

$$\left[c_i, c_k^\dagger\right] = 0. \tag{2.11}$$

Regulile de comutare (2.10) şi (2.11) pot fi scrise într-una singură, sub forma

$$\left[c_i, c_k^\dagger\right] = \delta_{ik}. \tag{2.12}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Evident, mai avem şi relaţiile

$$[c_i, c_k] = \left[c_i^\dagger, c_k^\dagger\right] = 0\,, \tag{2.13}$$

în stabilirea cărora am presupus că μ_i nu depinde de n_k şi comută cu acesta din urmă. Deoarece μ_i satisface relaţia $\mu_i^\dagger \mu_i = 1$ şi observând că nu avem alte condiţii pe care μ_i trebuie să le satisfacă, putem alege $\mu_i = 1$ şi atunci, din (2.6), rezultă $\lambda_i = 0$.

b) În cazul fermionilor, datorită principiului lui Pauli, numărul de particule n_i poate lua numai valorile 0 şi 1. În consecinţă, din (2.5.a), rezultă pentru operatorul c_i că, dacă $n_i = 1$, atunci poate acţiona numai operatorul $e^{-\frac{\partial}{\partial n_i}}$, deci $\kappa = -1$, iar dacă $n_i = 0$, atunci nu poate acţiona decât operatorul $e^{\frac{\partial}{\partial n_i}}$, deci $\kappa = +1$. Sintetizând aceste două posibilităţi, putem scrie pe κ sub forma unei funcţii liniare de n_i

$$\kappa = a n_i + b\,,$$

în care, ţinând cont de condiţiile de mai sus, trebuie să alegem pentru coeficienţii a şi b valorile :

$$\begin{aligned} a &= -2 \\ b &= 1\,, \end{aligned}$$

de unde

$$\kappa = 1 - 2n_i = \begin{cases} -1 & \text{pentru } n_i = 1 \\ +1 & \text{pentru } n_i = 0\,. \end{cases}$$

În cazul operatorului $c_i^\dagger$, având, din nou, în vedere principiul lui Pauli, observăm că, dacă $n_i = 1$, atunci trebuie să punem $\kappa = 1$, iar dacă $n_i = 0$, atunci trebuie să avem $\kappa = -1$, adică

$$-\kappa = \begin{cases} -1 & \text{pentru } n_i = 1 \\ +1 & \text{pentru } n_i = 0\,. \end{cases}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Înlocuind, deci, în (2.5.a), $\kappa = 1-2n_i$, iar în (2.5.b), $-\kappa = 1-2n_i$, operatorii c_i şi $c_i^\dagger$ vor căpăta forma

$$c_i = e^{(1-2n_i)\frac{\partial}{\partial n_i}} \mu_i \sqrt{n_i}$$

$$c_i^\dagger = \sqrt{n_i}\, \mu_i^\dagger\, e^{(1-2n_i)\frac{\partial}{\partial n_i}} . \qquad (2.14)$$

Înainte de a efectua produsele $c_i c_i^\dagger$ şi $c_i^\dagger c_i$, să observăm că

$$\left[e^{(1-2n_i)\frac{\partial}{\partial n_i}}\right]^2 f(n_i) = e^{(1-2n_i)\frac{\partial}{\partial n_i}}\, e^{(1-2n_i)\frac{\partial}{\partial n_i}}\, f(n_i) =$$

$$= e^{(1-2n_i)\frac{\partial}{\partial n_i}}\, f(1-n_i) = f(n_i) ,$$

adică

$$\left[e^{(1-2n_i)\frac{\partial}{\partial n_i}}\right]^2 = 1 . \qquad (2.15)$$

Ţinând cont de (2.6), (2.14) şi (2.15), avem

$$c_i c_i^\dagger = e^{(1-2n_i)\frac{\partial}{\partial n_i}}\, \mu_i (n_i)\, \mu_i^\dagger\, e^{(1-2n_i)\frac{\partial}{\partial n_i}} =$$

$$= n_i + (1-2n_i) = 1 - n_i$$

$$c_i^\dagger c_i = \sqrt{n_i}\sqrt{n_i} = n_i ,$$

de unde, prin adunare, rezultă

$$c_i c_i^\dagger + c_i^\dagger c_i \equiv \left\{c_i , c_i^\dagger\right\} = 1 . \qquad (2.16)$$

Acolada definită mai sus poartă numele de anticomutator. Ca şi în cazul bozonilor, pentru doi operatori independenţi, c_i şi $c_k^\dagger$, vom impune, ca o generalizare naturală a lui (2.16), relaţia de anticomutare

$$\left\{c_i , c_k^\dagger\right\} = 0 , \qquad (2.17)$$

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

care, împreună cu (2.16), pot fi sintetizate în

$$\left\{ c_i , c_k^\dagger \right\} = \delta_{ik} , \tag{2.18}$$

la care se adaugă şi

$$\{ c_i , c_k \} = \left\{ c_i^\dagger , c_k^\dagger \right\} = 0 . \tag{2.19}$$

Pentru a satisface (2.17) şi (2.19) apelăm la o idee a lui Jordan şi Wigner [31], care au definit funcţia μ_i sub forma

$$\mu_i = (-1)^{n_1+n_2+\ldots+n_i} = (-1)^{\sum_{j=1}^{i} n_j} . \tag{2.20}$$

Vom explicita expresia

$$c_i c_k^\dagger = \left[e^{(1-2n_i)\frac{\partial}{\partial n_i}} \mu_i \sqrt{n_i} \right] \left[\sqrt{n_k}\, \mu_k^\dagger e^{(1-2n_k)\frac{\partial}{\partial n_k}} \right] . \tag{2.21}$$

Pentru fixarea ideilor să presupunem $i < k$ şi avem

$$e^{(1-2n_i)\frac{\partial}{\partial n_i}} \mu_k = (-1)^{n_1+\ldots+n_{i-1}+[n_i+(1-2n_i)]+n_{i+1}+\ldots+n_k} = -\mu_k , \tag{2.22}$$

unde am ţinut seama că $(-1)^{-2n_i} = 1$, pentru orice n_i. Deoarece $k > i$, operatorul $\frac{\partial}{\partial n_k}$ nu acţionează asupra lui μ_i şi atunci, inversând ordinea unor factori în (2.21), obţinem

$$c_i c_k^\dagger = \left[-\sqrt{n_k}\, \mu_k^\dagger e^{(1-2n_k)\frac{\partial}{\partial n_k}} \right] \left[e^{(1-2n_i)\frac{\partial}{\partial n_i}} \mu_i \sqrt{n_i} \right] = -c_k^\dagger c_i , \tag{2.23}$$

adică tocmai regula de anticomutare (2.18). Avem, de asemenea,

$$\begin{aligned} c_i c_i &= \left[e^{(1-2n_i)\frac{\partial}{\partial n_i}} \mu_i \sqrt{n_i} \right] \left[e^{(1-2n_i)\frac{\partial}{\partial n_i}} \mu_i \sqrt{n_i} \right] = \\ &= \left[-\mu_i \sqrt{1-n_i}\, e^{(1-2n_i)\frac{\partial}{\partial n_i}} \right] \left[e^{(1-2n_i)\frac{\partial}{\partial n_i}} \mu_i \sqrt{n_i} \right] = \\ &= -\sqrt{n_i(1-n_i)} , \end{aligned} \tag{2.24}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde am ţinut seama de (2.15) şi de faptul că $\mu_i\mu_i = 1$.

Examinând relaţia (2.24), observăm că, întotdeauna, $c_ic_i = 0$, deoarece n_i nu poate lua decât valorile 0 şi 1, adică întotdeauna avem $\sqrt{n_i(1-n_i)} = 0$. În felul acesta, este satisfăcută şi relaţia de anticomutare (2.19) (pentru cazul $i \neq k$, indicaţiile de mai sus sunt suficiente).

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.3 Relaţiile de comutare. Statistica Bose-Einstein

După cum am văzut în paragraful anterior, în cazul unui câmp ale cărui cuante sunt particule ce se supun statisticii cuantice Bose-Einstein, mărimile c_i şi $c_i^\dagger$ sunt operatori şi satisfac anumite reguli de comutare. În cele ce urmează, vom încerca să parcurgem acelaşi raţionament în sens invers, adică: fiind date anumite relaţii de comutare, să arătăm că acestea conduc (fără alte ipoteze suplimentare) la statistica cuantică Bose-Einstein. Această metodă oferă posibilitatea aprofundării semnificaţiei operatorilor c_i şi $c_i^\dagger$, a studiului funcţiilor şi al valorilor proprii ale acestora şi, ceea ce este deosebit de important, permite reprezentarea lor matriceală.

Să scriem relaţia de comutare (2.10) sub forma

$$cc^\dagger - c^\dagger c = 1\,, \tag{3.1}$$

în care, pentru comoditate, am renunţat la indicele i. Înmulţind la dreapta cu operatorul c avem, după gruparea termenilor în mod convenabil,

$$(c^\dagger c)c = c(c^\dagger c - 1)\,. \tag{3.2}$$

Să presupunem, acum, că $|\alpha\rangle$ este un vector propriu al operatorului hermitic $c^\dagger c$, corespunzător valorii proprii α, adică

$$(c^\dagger c)|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle\,. \tag{3.3}$$

Aplicând relaţia operaţională (3.2) vectorului propriu α şi ţinând cont de (3.3), obţinem

$$(c^\dagger c)(c|\alpha\rangle) = c(c^\dagger c - 1)|\alpha\rangle = (\alpha - 1)(c|\alpha\rangle)\,, \tag{3.4}$$

de unde rezultă că, dacă $|\alpha\rangle$ este un vector propriu al operatorului $c^\dagger c$, aparţinând valorii proprii α, atunci şi $c|\alpha\rangle$ este un vector propriu

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

al aceluiaşi operator, corespunzător valorii proprii $(\alpha - 1)$. Cu alte cuvinte, vectorul $c|\alpha\rangle$ este un multiplu al vectorului $|\alpha - 1\rangle$:

$$c|\alpha\rangle = k|\alpha - 1\rangle\,, \tag{3.5}$$

unde k este o constantă. Într-adevăr, înlocuind (3.5) în (3.4), rezultă

$$(c^\dagger c)|\alpha - 1\rangle = (\alpha - 1)|\alpha - 1\rangle\,,$$

adică (3.3). Pentru a determina constanta k, să luăm conjugata hermitică a lui (3.5), adică

$$\langle\alpha|c^\dagger = \langle\alpha - 1|k^*\,.$$

Efectuând produsul scalar al ultimelor două relaţii

$$\langle\alpha|c^\dagger c|\alpha\rangle = k^*k\langle\alpha - 1|\alpha - 1\rangle = |k|^2\langle\alpha - 1|\alpha - 1\rangle$$

obţinem, având în vedere (3.3) şi presupunând vectorii proprii $|\alpha\rangle$ normaţi la unitate,

$$|k|^2 = \alpha\,. \tag{3.6}$$

Deoarece nu există alte condiţii, putem alege constanta k reală şi atunci, din (3.5), rezultă

$$c|\alpha\rangle = \sqrt{\alpha}\,|\alpha - 1\rangle\,. \tag{3.7}$$

Înmulţind acum relaţia (3.1) la stânga cu operatorul $c^\dagger$ şi grupând termenii, obţinem relaţia

$$(c^\dagger c)c^\dagger = c^\dagger(c^\dagger c + 1) \tag{3.8}$$

care, aplicată vectorului propriu $|\alpha\rangle$ şi ţinând cont de (3.3), ne conduce la

$$(c^\dagger c)(c^\dagger|\alpha\rangle) = c^\dagger(c^\dagger c + 1)|\alpha\rangle = (\alpha + 1)(c^\dagger|\alpha\rangle)\,. \tag{3.9}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Astfel, se evidenţiază faptul că şi $c^\dagger|\alpha\rangle$ este un vector propriu al operatorului $c^\dagger c$, corespunzător valorii proprii $\alpha+1$. Putem scrie, atunci,

$$c^\dagger|\alpha\rangle = k'|\alpha+1\rangle\,, \tag{3.10}$$

unde k' este, din nou, o constantă. Pentru determinarea lui k', să considerăm adjuncta relaţiei (3.10), adică

$$\langle\alpha|c = \langle\alpha+1|k'^*\,.$$

Efectuând produsul scalar

$$\langle\alpha|cc^\dagger|\alpha\rangle = |k'|^2\langle\alpha+1|\alpha+1\rangle\,,$$

sau, folosind (3.1),

$$\langle\alpha|(1+cc^\dagger)|\alpha\rangle = (\alpha+1)\langle\alpha|\alpha\rangle\,,$$

obţinem

$$|k'|^2 = \alpha+1\,, \tag{3.11}$$

cu ajutorul căreia relaţia (3.10) capătă forma

$$c^\dagger|\alpha\rangle = \sqrt{\alpha+1}\,|\alpha+1\rangle\,. \tag{3.12}$$

Din relaţiile (3.3), (3.4) şi (3.9) rezultă, deci, că $\alpha-1$, α, $\alpha+1$ sunt valori proprii ale operatorului $c^\dagger c$, adică α poate varia numai cu câte o unitate, iar din (3.6), observăm că întotdeauna $\alpha \geq 0$, adică $c^\dagger c$ nu poate avea valori proprii negative. Se pune însă întrebarea: care este cea mai mică valoare proprie α a operatorului $c^\dagger c$? Întrucât $\alpha \geq 0$, să încercăm cu valoarea minimă posibilă, adică $\alpha = 0$ şi, ţinând cont de (3.7) şi (3.12), obţinem din (3.1)

$$(cc^\dagger - c^\dagger c)|0\rangle = c(c^\dagger|0\rangle) - c^\dagger(c|0\rangle) = \sqrt{1}\,c|1\rangle - 0|0\rangle = |0\rangle\,,$$

BCU "AL. I. CUZA" IAŞI UNIVERSITY LIBRARY

deci valoarea proprie $\alpha = 0$ satisface relaţia de comutare (3.1). În concluzie, α poate fi orice număr natural (inclusiv zero), deci valorile proprii α sunt, atunci,

$$\alpha = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Aceasta sugerează imediat ideea că α este un număr de particule, $\alpha = n$, iar $\alpha = 0$ ar corespunde "stării de vid". Relaţiile (3.7) şi (3.12) se scriu atunci sub forma

$$c|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \tag{3.13}$$

respectiv

$$c^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,, \tag{3.14}$$

şi se verifică uşor că acestea satisfac regula de comutare (3.1), deoarece

$$(cc^\dagger - c^\dagger c)|n\rangle = \sqrt{n+1}\,c|n+1\rangle - \sqrt{n}\,c^\dagger|n-1\rangle = \\ = (\sqrt{n+1})^2\,|n\rangle - (\sqrt{n})^2\,|n\rangle = |n\rangle\,.$$

Sintetizând consideraţiile de mai sus, observăm că regula de comutare (3.1) conduce, între altele, la definirea vectorului *ket* $|n\rangle$ care descrie starea unui sistem format din n particule. Acţiunea operatorilor c şi $c^\dagger$ asupra vectorului $|n\rangle$ are ca efect scăderea, respectiv mărirea, numărului de particule. Din acest motiv, $c^\dagger$ poate fi numit operator de emisie, iar c–operator de absorbţie. Având în vedere că numărul n de particule dintr-o anumită stare cuantică este arbitrar, conchidem că regula de comutare (3.1) ne conduce, în mod necesar, la statistica Bose-Einstein.

Cu această ocazie am justificat şi denumirile de operatori de emisie şi absorbţie. Dacă, însă, considerăm, de exemplu, un proces de transformare a unui tip de particule într-un alt tip de particule, va trebui să aplicăm stării cuantice ce descrie sistemul primului tip de particule mai întâi operatorul corespunzător de absorbţie şi apoi operatorul de emisie al celui de al doilea tip. Din acest motiv, operatorii de emisie

şi de absorbţie se mai numesc şi *operatori de creare* şi, respectiv, *de anihilare.*

Reprezentarea matriceală

Să presupunem că vectorii $|n\rangle$ formează un şir complet şi ortonormal ce constituie baza în care vom reprezenta matriceal operatorii $c^\dagger c$, $cc^\dagger$, c şi $c^\dagger$.

Ţinând seama de (3.3), unde $\alpha = n$, observăm, pentru început, că operatorul $c^\dagger c$ fiind în reprezentare proprie, este o matrice diagonală ale cărei elemente sunt chiar valorile proprii 0, 1, 2, ...,

$$\langle c^\dagger c\rangle_{n'n} = \langle n'|c^\dagger c|n\rangle = n\langle n'|n\rangle = n\,\delta_{n'n}\,,$$

adică

$$(c^\dagger c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Având în vedere (3.13), putem scrie pentru operatorul c relaţia

$$(c)_{n'n} = \langle n'|c|n\rangle = \sqrt{n}\,\langle n'|n-1\rangle = \sqrt{n}\,\delta_{n',n-1}\,, \tag{3.16}$$

din care rezultă că (c) este o matrice în care elementele diferite de zero sunt aranjate după o paralelă la diagonala principală, adică

$$(c) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

În mod analog, pentru operatorul $c^\dagger$, obţinem (din (3.14))

$$(c^\dagger)_{n'n} = \langle n'|c^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,\langle n'|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1}\,, \tag{3.18}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică

$$(c^\dagger) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \end{pmatrix} . \tag{3.19}$$

Din relaţiile (3.17), (3.19) şi proprietatea

$$(cc^\dagger)_{n'n} = \sum_m (c_{n'm})(c^\dagger_{mn}) ,$$

rezultă imediat matricea

$$(cc^\dagger) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

care, împreună cu (3.15), ne permit să verificăm regula de comutare (3.1), adică

$$(cc^\dagger) - (c^\dagger c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix} = (\mathrm{I}) . \tag{3.21}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.4 Relaţiile de anticomutare. Statistica Fermi-Dirac

Utilizând, din nou, metoda din paragraful precedent, să înmulţim relaţia de anticomutare (2.16), scrisă sub forma

$$cc^\dagger + c^\dagger c = 1\,, \tag{4.1}$$

la dreapta cu c, obţinând, după o grupare convenabilă a termenilor,

$$(c^\dagger c)c = c(1 - c^\dagger c)\,. \tag{4.2}$$

Presupunând şi aici că $|\alpha\rangle$ este un vector propriu al operatorului $c^\dagger c$, corespunzător valorii proprii α, adică

$$(c^\dagger c)|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle\,, \tag{4.3}$$

obţinem, aplicând relaţia (4.2) vectorului propriu $|\alpha\rangle$,

$$(c^\dagger c)(c|\alpha\rangle) = c(1 - c^\dagger c)|\alpha\rangle = (1 - \alpha)(c|\alpha\rangle)\,. \tag{4.4}$$

Aşadar, dacă $|\alpha\rangle$ este un vector propriu al operatorului $c^\dagger c$, corespunzător valorii proprii α, atunci şi $c|\alpha\rangle$ este un vector propriu al aceluiaşi operator, corespunzând valorii proprii $(1 - \alpha)$. Atunci, putem scrie relaţia

$$c|\alpha\rangle = k\,|1 - \alpha\rangle\,, \tag{4.5}$$

al cărei produs scalar cu conjugata sa hermitică

$$\langle\alpha|c^\dagger c|\alpha\rangle = |k|^2\langle 1 - \alpha|1 - \alpha\rangle$$

ne conduce, ţinând cont şi de (4.3), la

$$|k|^2 = \alpha\,, \tag{4.6}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică (4.5) devine

$$c|\alpha\rangle = \sqrt{\alpha}\,|1-\alpha\rangle\,. \tag{4.7}$$

În continuare, prin înmulţirea regulii de comutare (4.1), la stânga, cu $c^\dagger$, obţinem, după gruparea termenilor, relaţia

$$(c^\dagger c)c^\dagger = c^\dagger(1-c^\dagger c)\,, \tag{4.8}$$

pe care o aplicăm vectorului propriu $|\alpha\rangle$:

$$(c^\dagger c)(c^\dagger|\alpha\rangle) = c^\dagger(1-c^\dagger c)|\alpha\rangle = (1-\alpha)(c^\dagger|\alpha\rangle)\,.$$

Deci, $c^\dagger|\alpha\rangle$ fiind un vector propriu al operatorului $c^\dagger c$, corespunzător valorii proprii $(1-\alpha)$, avem

$$c^\dagger|\alpha\rangle = k'|1-\alpha\rangle\,, \tag{4.9}$$

unde constanta k' se determină după procedeul deja cunoscut: se consideră conjugata hermitică a ultimei relaţii şi se scrie produsul scalar

$$\langle\alpha|cc^\dagger|\alpha\rangle = \langle\alpha|(1-c^\dagger c)|\alpha\rangle = |k'|^2\langle 1-\alpha|1-\alpha\rangle\,,$$

de unde rezultă

$$|k'|^2 = 1-\alpha \tag{4.10}$$

şi, în consecinţă,

$$c^\dagger|\alpha\rangle = \sqrt{1-\alpha}\,|1-\alpha\rangle\,. \tag{4.11}$$

Din (4.6) şi (4.10) observăm că $\alpha \geq 0$ şi $1-\alpha \geq 0$, adică

$$0 \leq \alpha \leq 1\,. \tag{4.12}$$

Analizând relaţia de anticomutare

$$(cc^\dagger + c^\dagger c)|\alpha\rangle = |\alpha\rangle\,, \tag{4.13}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

constatăm că aceasta este satisfăcută pentru $\alpha = 0$ şi $\alpha = 1$. Aceste două valori proprii, 0 şi 1, indică faptul că $\alpha = n$ este un număr de particule şi în plus, că într-o stare cuantică putem avea cel mult o particulă. Folosind (4.7) şi (4.11), mai putem scrie

$$c|n\rangle = \sqrt{n}\,|1-n\rangle\,, \tag{4.14}$$

respectiv

$$c^\dagger|n\rangle = \sqrt{1-n}\,|1-n\rangle\,, \tag{4.15}$$

de unde, dând lui n valorile 0 şi 1, găsim

$$c|0\rangle = 0|0\rangle \;;\; c|1\rangle = |0\rangle \;;\; c^\dagger|0\rangle = |1\rangle \;;\; c^\dagger|1\rangle = 0|0\rangle\,.$$

Este uşor de arătat că relaţia de comutare (4.13) este verificată de (4.14) şi (4.15). Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned}(cc^\dagger + c^\dagger c)|n\rangle &= \sqrt{1-n}\,c|1-n\rangle + \sqrt{n}\,c^\dagger|1-n\rangle = \\ &= (\sqrt{1-n})^2\,|n\rangle + (\sqrt{n})^2\,|n\rangle = |n\rangle\,.\end{aligned}$$

În concluzie, din faptul că într-o stare cuantică nu se poate găsi mai mult de o particulă, rezultă că regula de anticomutare (4.1) conduce, în mod necesar, la statistica Fermi-Dirac.

Reprezentarea matriceală

Presupunând şi aici că baza în care dorim să efectuăm reprezentarea matriceală a operatorilor $c^\dagger c$, $cc^\dagger$, c şi $c^\dagger$ este şirul complet şi ortonormal al vectorilor $|n\rangle$, şir format din doi vectori, $|0\rangle$ şi $|1\rangle$, avem

$$\begin{aligned}(c)_{n'n} &= \langle n'|c|n\rangle = \sqrt{n}\,\langle n'|1-n\rangle = \sqrt{n}\,\delta_{n',1-n} \\ (c^\dagger)_{n'n} &= \langle n'|c^\dagger|n\rangle = \sqrt{1-n}\,\langle n'|1-n\rangle = \sqrt{1-n}\,\delta_{n',1-n}\,,\end{aligned} \tag{4.16}$$

BCU IAŞI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

adică (c) şi $(c^\dagger)$ sunt matricele cu două linii şi două coloane

$$(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(c^\dagger) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

De asemenea, mai obţinem

$$(cc^\dagger) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

şi

$$(c^\dagger c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

satisfăcând

$$(cc^\dagger) + (c^\dagger c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.18}$$

adică regula de anticomutare (4.1).

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.5 Alte metode de cuantificare

În paragrafele precedente ale acestui capitol, am justificat necesitatea celei de a doua cuantificări, utilizând metoda dezvoltării unei funcţii de stare $|\psi\rangle$ după funcţiile proprii $|\varphi_i\rangle$. Coeficienţii c_i ai acestei dezvoltări sunt nişte operatori, care se supun unor reguli de comutare în cazul bozonilor şi de anticomutare în cazul fermionilor, după cum $|\psi\rangle$ este vectorul de stare al celei dintâi, respectiv al celei de a doua categorii de particule.

Metoda menţionată nu este însă singura posibilă. În cele ce urmează, vom prezenta încă două metode de cuantificare a câmpului, bazate pe generalizarea şi "formalizarea" (matematic riguroasă) a unor rezultate fundamentale din Mecanica Cuantică.

a) Prima dintre acestea utilizează expresia care ne dă variaţia în timp a unui operator $\hat{F}$, şi anume:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{F}\right] . \tag{5.1}$$

Presupunând $\hat{F} = \hat{F}(p_i, q_i, t)$, în care impulsul generalizat p_i şi coordonata generalizată q_i sunt variabile canonic conjugate, adică satisfac ecuaţiile canonice

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial \hat{H}}{\partial q_i} , \end{aligned} \tag{5.2}$$

putem scrie

$$\frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \dot{q}_i \frac{\partial \hat{F}}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \hat{F}}{\partial p_i} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_i}\frac{\partial \hat{F}}{\partial q_i} - \frac{\partial \hat{H}}{\partial q_i}\frac{\partial \hat{F}}{\partial p_i} . \tag{5.3}$$

BCU "M. EMINESCU" IAŞI

Comparând (5.1) cu (5.3), avem

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial p_i}\frac{\partial \hat{F}}{\partial q_i} - \frac{\partial \hat{H}}{\partial q_i}\frac{\partial \hat{F}}{\partial p_i} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}\,,\,\hat{F}\right] \tag{5.4}$$

unde, în membrul stâng, nu am folosit notaţia adecvată parantezei Poisson pentru a evita confuzia cu comutatorul din membrul drept. Alegem, de pildă, $\hat{F} = q_j$ şi avem, din (5.4),

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial p_j} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}\,,\,q_j\right]. \tag{5.5}$$

Vom presupune q_j ca având semnificaţia unei funcţii de stare de forma

$$q_j = c_j e^{-i\omega t} \tag{5.6}$$

şi dacă $\hat{H}$ nu depinde explicit de timpul t (cum este, de exemplu, cazul câmpurilor libere), găsim

$$p_j = -\int \frac{\partial \hat{H}}{\partial q_j}dt = -\int \frac{\partial \hat{H}}{\partial c_j}e^{i\omega t}dt = \frac{i}{\omega}f_j e^{i\omega t}, \tag{5.7}$$

unde am introdus notaţia

$$f_j = \frac{\partial \hat{H}}{\partial c_j}. \tag{5.8}$$

Ţinând cont de (5.7) în (5.5), rezultă atunci

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial p_j} = -i\omega\frac{\partial \hat{H}}{\partial f_j}e^{-i\omega t} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}\,,\,c_j\right]e^{-i\omega t},$$

de unde obţinem imediat

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial f_j} = -\frac{1}{\hbar\omega}\left[\hat{H}\,,\,\hat{c}_j\right]. \tag{5.9}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Într-un caz concret se procedează în felul următor: se calculează componenta T_{44} a tensorului energie-impuls care, integrată pe întregul spaţiu tridimensional, ne dă valoarea hamiltonianului H. Se dezvoltă apoi în serie vectorul de stare $|\hat{\psi}\rangle$ asociat cuantelor câmpului respectiv, după formula uzuală

$$|\hat{\psi}\rangle = \sum_j \hat{c}_j |\varphi_j\rangle ,$$

în care am ţinut seama că, dacă mărimile $\hat{c}_j$ sunt operatori, atunci $|\hat{\psi}\rangle$ este tot un operator ce acţionează asupra numărului de particule. În continuare, se determină f_j şi $\frac{\partial \hat{H}}{\partial f_j}$. În sfârşit, impunând mărimilor $\frac{\partial \hat{H}}{\partial f_j}$, $\hat{H}$ şi $\hat{c}_j$ să satisfacă regula de comutare (5.9), se obţine cuantificarea câmpului respectiv.

b) A doua, numită *metoda canonică de cuantificare* a câmpului, are ca punct de plecare relaţia lui Heisenberg

$$[p_i , q_k] = \frac{\hbar}{i} \delta_{ik} , \tag{5.10}$$

în care p_i sunt componentele impulsului în punctul de coordonate q_i, ambele fiind considerate în acelaşi moment, t. În cazul unui câmp vom alege drept coordonată generalizată, q_k, mărimea de câmp $U_{(k)}$, adică

$$q_k \equiv U_{(k)} . \tag{5.11}$$

Pe de altă parte, integrând densitatea de impuls generalizat

$$\pi^{\dagger(i)m} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_{(i),m}} \tag{5.12}$$

pe hiperplanul $t = const.$, vom obţine cuadrivectorul impuls ca fiind

$$p^i \equiv \int \pi^{\dagger(i)4} dS_4 = \int \pi^{\dagger(i)4} d^3x , \text{ cu } d^3x = dx\,dy\,dz . \tag{5.13}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Înlocuind (5.11) şi (5.13) în (5.10), obţinem următoarea generalizare a relaţiei Heisenberg

$$\left[\int \pi^{\dagger(i)4}(\vec{x},t)\,d^3x\,,\,U_{(k)}(\vec{x}',t)\right] = \frac{\hbar}{i}\,\delta^{(i)}_{(k)}\,. \tag{5.14}$$

Deoarece mărimile $\pi^{\dagger(i)4}$ şi $U_{(k)}$ sunt definite în locuri diferite la momentul t, între acestea nu există nici o legătură cauzală şi atunci comutatorul din (5.14) este diferit de zero numai pentru $\vec{x} = \vec{x}'$, ceea ce ne permite să aducem relaţia (5.14) la forma *relaţiei Bohr-Heisenberg de comutare la timp egal*

$$\left[\pi^{\dagger(i)4}(\vec{x},t)\,,\,U_{(k)}(\vec{x}',t)\right] = \frac{\hbar}{i}\,\delta^{(i)}_{(k)}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\,, \tag{5.15}$$

unde $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ este funcţia generalizată a lui Dirac, satisfăcând condiţia

$$\int \delta(\vec{x}-\vec{x}')\,d^3x = 1\,, \tag{5.16}$$

integrala extinzându-se pe întregul spaţiu R^3.

În următoarele trei capitole ale prezentei lucrări, vom aplica metoda cuantificării canonice, al cărei avantaj constă în faptul că numai stările fizice sunt cuantificate, pentru câmpurile de spin 0, 1/2 şi 1. Din păcate, în cazul câmpurilor de spin 1, cuantificarea directă, canonică, fără nici un fel de alte condiţii suplimentare, distruge invarianţa Lorentz, afectând serios interpretarea relativistă a rezultatelor. Din acest motiv, a fost necesară introducerea unei metode covariante de cuantificare, generic cunoscută ca *metoda Bleuler-Gupta* [7, 33]. Deşi această metodă respectă, din plin, la toate nivelurile ei, simetriile externe Lorentz-Poincaré, ea are dezavantajul apariţiei unor stări nefizice, de normă negativă, aşa-numitele *ghosts*[1], ce trebuie eliminate prin impunerea

[1] fantome

unor constrângeri asupra vectorilor de stare. O dată cu creşterea complexităţii sistemelor, cum ar fi pentru teoriile *gauge* neabeliene, gravitaţia cuantică sau teoria superstringurilor, chiar şi această metodă eşuează, impunându-se înlocuirea sa cu alte metode de cuantificare.

Dintre acestea, cel mai puternic şi elegant s-a dovedit a fi formalismul integralei de drum, dezvoltat de Feynman, după o idee a lui Dirac şi care constituie subiectul ultimului capitol al prezentei cărţi.

În încheierea acestei treceri în revistă a diferitelor metode de cuantificare a câmpurilor, menţionăm că, în cazul teoriilor *gauge*, o alternativă la cuantificarea canonică o constituie teoria Becchi-Rouet-Stora-Tyupin (*BRST*), ce reprezintă cea mai reuşită fuziune între formalismul funcţional şi cuantificarea Bleuler-Gupta. În plus, toate informaţiile sunt cuprinse într-un singur operator, vestitul *BRST-operator*, care, aplicat vectorilor de stare, conduce la eliminarea "fantomelor" [43, 60].

Destul de apropiată ca formulare, dar mai perfecţionată, metoda Batalin-Vilkovisky (*BV*) se dovedeşte a fi cel mai complet program de cuantificare a celor mai complicate acţiuni, cum ar fi cele din teoriile de tip string şi membrană [43, 67].

In ceea ce priveşte lucrarea de faţă, după cum vom vedea, metoda canonică, generalizarea ei Lorentz-covariantă de tip Bleuler-Gupta şi formalismul integralei de drum se dovedesc a fi suficiente în realizarea completă a cuantificării câmpurilor libere uzuale, inclusiv a câmpurilor de etalonare ce mediază principalele tipuri de interacţiuni.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul 3

CUANTIFICAREA CÂMPULUI SCALAR

Dintre toate câmpurile asociate particulelor elementare, scalarul este cel mai simplu. Cu toate acestea, modalitatea concretă de definire a acestuia nu este lipsită de interes, ea stând la baza relaţiilor de definiţie a celorlalte câmpuri fizice, de "varianţă" mai înaltă. Să începem cu un exemplu care demonstrează netrivialitatea problemei. Fie R dreapta reală şi ϕ o aplicaţie definită pe ea cu valori în R (privit ca un corp algebric). Simplist, se spune adesea că ϕ este un câmp scalar dacă este invariant. În sensul ei strict, această afirmaţie este cel puţin incompletă, apărând imediat întrebarea "invariant la ce"? Să presupunem că eliminăm această ambiguitate, precizând că avem în vedere invarianţa la translaţii infinitezimale, adică la transformări de forma $x \to x' = x + \varepsilon$, cu ε o constantă reală şi $|\varepsilon|$ suficient de mic, astfel încât, pentru orice număr natural $n \geq 2$, termenii în ε^n să fie neglijabili. Acum se pune a doua întrebare, care este, de fapt, cea mai importantă: cum definim invarianţa ? Dacă ne grăbim, având în minte invarianţa

BCU IAŞI - UNIVERSITY LIBRARY

unui scalar, şi confundăm câmpul (ca aplicaţie) cu scalarul, am putea spune : "foarte simplu, cerem ca $\phi(x')$ să fie egal cu $\phi(x)$". Atunci, însă, obţinem

$$\phi(x') = \phi(x+\varepsilon) = \phi(x) + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi(x)\,,$$

adică

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0\,, \quad (\forall)\, x \in \mathbf{R}\,,$$

deci

$$\phi(x) = \phi_0\,,$$

constant peste tot în R. Prin urmare, a defini un câmp scalar printr-o asemenea relaţie de invarianţă înseamnă a elimina, din start, cazul fizic cel mai interesant, reprezentând în mod general însăşi noţiunea de câmp, anume cel al aplicaţiilor dependente de punct. Condiţia $\phi(x') = \phi(x), (\forall)x \in \mathbf{R}$, este prea tare, ea restrângând clasa câmpurilor scalare la clasa câmpurilor absolut invariante sau, pe scurt, a invarianţilor absoluţi. Deşi, la prima vedere, această sintagmă poate părea un pleonasm, atributul "absolut" îşi are rolul său neredundant, specificând faptul că numai aplicaţiile constante $\phi : \mathbf{R} \to \phi_0 \in \mathbf{R}$ îndeplinesc condiţia de invarianţă $\phi(x') = \phi(x)$, peste tot în R, oricare ar fi transformările nesingulare

$$h_\varepsilon : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ prin } x' = h_\varepsilon(x) = x'(x,\varepsilon),\ h_0(x) = x'(x,0) = x$$

formând un grup Lie unidimensional (în cazul de faţă). Desigur, această proprietate rămâne valabilă şi pe varietăţile de dimensiune mai mare. Acolo, însă, pot apărea şi câmpuri cu valori într-un corp de scalari care, deşi respectă invarianţa tare $\phi(x') = \phi(x)$ faţă de un grup de transformări $x' = x'(x,\varepsilon)$, nu sunt constante pe M (varietatea respectivă). Acestea poartă tot numele de "câmpuri absolut invariante", dar cu specificarea "faţă de grupul G al transformărilor considerate", în

sensul că forma funcţională a aplicaţiei ϕ este invariantă la acţiunea grupului.

Două exemple, mai puţin triviale, vor lămuri eventualele neclarităţi. Fie spaţiul euclidian $\mathbf{R}^2$, pe care definim acţiunea infinitezimală

$$\begin{aligned} x' &= x + \lambda x + \lambda k y \\ y' &= y + \lambda y - \lambda k x \,, \end{aligned}$$

cu $k \in \mathbf{R}$ oarecare, λ suficient de mic, a grupului uniparametric G_k (de parametru λ) al "k-rotaţiilor dilatonice". Singurul generator al grupului se exprimă, în reprezentare operatorială pe $\mathbf{R}^2$, prin

$$\hat{X}_{(k)} = \left(\frac{\partial x'}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial y'}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \frac{\partial}{\partial y} = (x+ky)\frac{\partial}{\partial x} + (y-kx)\frac{\partial}{\partial y} \,,$$

astfel încât condiţia de invarianţă pentru $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, anume

$$\phi(x', y') = \phi(x, y) \,,$$

revine la ecuaţia liniară şi omogenă, cu derivate parţiale de ordinul I,

$$\hat{X}_{(k)}\phi = (x+ky)\frac{\partial \phi}{\partial x} + (y-kx)\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \,.$$

Integrând ecuaţia caracteristică

$$\frac{\mathrm{d}x}{x+ky} = \frac{\mathrm{d}y}{y-kx} \,,$$

rezultă

$$\sqrt{x^2+y^2}\, \exp\left[k^{-1} \arctan(y/x)\right] = const. \,,$$

ajungând astfel la concluzia că orice funcţie $\phi(\rho e^{\varphi/k}) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, cu $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ şi $\varphi = \arctan(y/x)$, este absolut invariantă la acţiunea grupului G_k (satisfăcând $\hat{X}_{(k)}\phi = 0$) deşi depinde, evident, de punct.

BCU "ŞTIINŢĂ" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Al doilea exemplu este pe spaţiul Minkowski M_4 şi se referă la aplicaţiile ϕ (cu valori scalare) absolut invariante faţă de grupul Lorentz, reprezentat prin transformările infinitezimale (vezi Capitolul 1)

$$x'^i = x^i + \omega_{lk}\,\eta^{li}x^k\ ;\ i,l,k = \overline{1,4}\ ;\ \{\omega_{lk} + \omega_{kl} = 0\} - 6 \text{ parametri reali}\,.$$

Cum ω este antisimetric, rezultă

$$x'^i = x^i + \omega_{lk}\,\eta^{i[l}x^{k]} \text{ cu } 1 \le l < k \le 4\,,$$

adică am ordonat indicii pentru a evidenţia cei şase parametri esenţiali algebrici, astfel încât, generatorii grupului se pot reprezenta sub forma

$$\hat{X}^{lk} = \left(x^k\eta^{li} - x^l\eta^{ki}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

(evident, cu sumare după i de la 1 la 4). Condiţia de invarianţă tare

$$\phi(x'^i) = \phi\left(x^i + \omega_{lk}\,\eta^{i[l}x^{k]}\right) = \phi(x^i)$$

conduce imediat la sistemul liniar şi omogen

$$\left(x^k\eta^{li} - x^l\eta^{ki}\right)\frac{\partial\phi}{\partial x^i} = 0$$

de şase ecuaţii diferenţiale, cu derivate parţiale de ordinul I, ce trebuie satisfăcute de câmpul $\phi : M_4 \to \mathrm{R}$. Fără a intra în alte amănunte, se observă imediat că orice funcţie ϕ de argument $m(x^l) = \eta_{rs}\,x^r x^s$, adică $\phi(\eta_{rs}\,x^r x^s) : M_4 \to \mathrm{R}$, verifică sistemul, deoarece

$$\begin{aligned}\left(x^k\eta^{li} - x^l\eta^{ki}\right)\frac{\partial\phi}{\partial x^i} &= 2\left(x^k\eta^{li} - x^l\eta^{ki}\right)\eta_{is}\,x^s\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}m} = \\ &= 2\left(x^k x^l - x^l x^k\right)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}m} \equiv 0\,,\end{aligned}$$

fiind deci Lorentz-invariantă în sens absolut.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Din aceste trei exemple observăm că, în mod oarecum surprinzător, noţiunea de "invarianţă" (sau de "invariant") este interpretabilă şi când spunem acestea, ne referim la sensul şi nu la rezultatele ei. Este clar că obţinem un invariant, dar sensul condiţiei de invarianţă (proprietăţile ei) trebuie bine specificat(e). Cum definim, aşadar, un câmp scalar (de fapt, clasa câmpurilor scalare) pentru a păstra un grad de generalitate rezonabil? Condiţia $\phi(x') = \phi(x)$ este prea tare, ea restrângând prea mult clasa acestor câmpuri. Pentru relaxarea ei, vom insista asupra elementului logic cel mai sensibil. Dacă avem în vedere o transformare de coordonate $h : (x) \in \mathrm{R}^n \to (x') \in \mathrm{R}^n$, unde R^n este "spaţiul model" al unei varietăţi M_n (de dimensiune n), atunci rezultă, pentru invarianţa absolută, condiţia funcţională

$$\phi \circ h = \phi \Leftrightarrow \phi = \phi \circ h^{-1} ,$$

care este îndeplinită numai de aplicaţiile constante $\phi = \phi_0$, când

$$\phi \circ h = \phi_0 \circ h = \phi_0$$

şi de cele invariant funcţionale, când

$$\delta_h(\phi \circ h) = \frac{\delta\phi}{\delta h}\delta h = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta\phi}{\delta h} = 0 .$$

De altfel, acest aspect rezultă şi din înlocuirea lui $\phi = \phi \circ h^{-1}$ în ecuaţia $\phi \circ h = \phi$, obţinând astfel

$$\phi = \phi$$

în sens funcţional. "Relaxarea" condiţiei de invarianţă (absolută) se face simplu, observând că, dacă $\phi(x)$ este valoarea aplicaţiei ϕ în punctul x şi "venim" spre acesta din x' prin inversa, h^{-1}, a transformării (diferenţiabile) h, atunci avem

$$\phi(x) = \phi \circ h^{-1}(x') = \phi'(x')$$

şi invers, respectiv

$$\phi'(x') = \phi' \circ h(x) = \phi(x) ,$$

când "venim" în x' din x direct prin aplicaţia h. Altfel spus, obţinem "legea de invarianţă a câmpurilor scalare"

$$\phi'(x') = \phi(x) ,$$

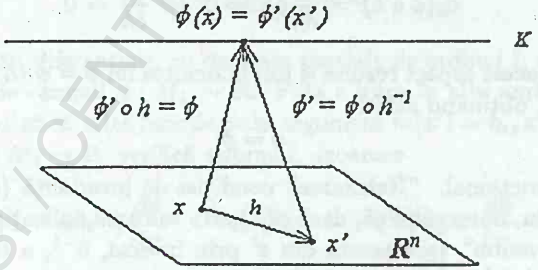
sau funcţional

$$\phi' = \phi \circ h^{-1} \Leftrightarrow \phi = \phi' \circ h ,$$

care este mai generală decât prima, în următorul sens: "valoarea $\phi(x)$ din corpul algebric K a aplicaţiei ϕ în x rămâne aceeaşi sub acţiunea transformării $h : x \to x'$, dar forma funcţională a câmpului în x', adică ϕ', se transformă prin h^{-1}, după regula simplă a compunerii de funcţii".

Definiţie. Un câmp ϕ, pe spaţiul model al unei varietăţi M, se numeşte "scalar", dacă la o schimbare h de coordonate, el se transformă prin compunere (de funcţii) cu h^{-1}.

Sintetizând, putem reprezenta grafic cele enunţate, prin diagrama



De ce atâta filosofie pentru un câmp atât de simplu? Răspunsul este

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unul de principiu, puţin mai lung, dar nicidecum nejustificat. În perioada de început a cercetărilor de "cuantică relativistă", vârsta teoriilor ce urmau să fuzioneze era cam aceasta: Mecanica Cuantică – unu, doi ani, Teoria Relativităţii Restrânse – puţin peste 20 de ani, Relativitatea Generală, deşi avea mai mult de un deceniu, nu fusese explorată, şi nici exploatată, aproape deloc. Prin urmare, orice fel de probleme, fie şi numai potenţiale, legate de o altă structură a spaţiu-timpului decât cea minkowskiană, au fost eliminate din start. S-a trecut, deci, doar la unificarea (evident, prin generalizare a) Mecanicii Cuantice bazate pe ecuaţia Schrödinger, nerelativistă în formularea ei "ortodoxă", cu Relativitatea Specială, având ca suport geometric spaţiul Minkowski. Din cauza marii diferenţe de vârstă dintre cele două teorii, fuziunea a fost, în fazele ei iniţiale, puternic asimetrică. Principiile relativiste dominau în faţa celor cuantice conducând, chiar de la cel mai simplu nivel, acela al utilizării câmpului scalar pentru descrierea stărilor cuantice ale unei microparticule relativiste, la probleme foarte serioase, greu de rezolvat, sau măcar de interpretat, în cadrul, pe atunci, prea strâmt, al tinerei Mecanici Cuantice. Pentru a nu ţine în loc posibilii cititori grăbiţi, amintim că exact soluţionarea acestor probleme (stări de energie negativă, densităţi negative de probabilitate, stări de normă negativă, tratarea sistemelor de microparticule relativiste etc.) a impulsionat dezvoltarea Teoriei Cuantice a Câmpurilor ca o veritabilă unificare (în câmpuri gravitaţionale slabe, liniarizabile) a Mecanicii Cuantice cu Relativitatea einsteiniană.

Pentru cititorul mai răbdător, să revenim la chestiune şi să vedem, într-o manieră ştiinţifică mai puţin pretenţioasă, "ce era să se aleagă din câmpul scalar". Pornind de la ecuaţia Schrödinger pentru o particulă liberă (nerelativistă) lipsită de spin,

$$\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}\,,\ \hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\vec{p}}\cdot\hat{\vec{p}}\,,\ \text{cu}\ \hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\nabla\,,$$

primul deziderat a fost generalizarea ei la o formă Lorentz-invariantă.

Cum hamiltonianul particulei relativiste libere este

$$H = \sqrt{c^2|\vec{p}|^2 + m^2c^4}\,,$$

aplicând principiul corespondenţei, obţinem ca variantă relativistă a ecuaţiei Schrödinger relaţia

$$\sqrt{c^2\,\hat{\vec{p}}\cdot\hat{\vec{p}} + m^2c^4}\,\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi\,,$$

unde $\Psi(\vec{r},t) = \Psi(x)$ este un scalar Lorentz, în sensul

$$\Psi'(\Lambda x) = \Psi(x)\,,\ \text{cu}\ x' = \Lambda x\,,\ \Lambda^T\eta\Lambda = \eta\,,\ \det\Lambda = 1\,.$$

Dar cum se poate extrage rădăcina pătrată dintr-un operator precum "$-\hbar^2\Delta + m^2c^2$ "? Răspunsul corect a fost dat de Dirac, în 1928, trebuind însă să se renunţe la caracterul scalar al câmpului Ψ, în favoarea unuia cu mult mai special, şi anume, bispinorial. Cu studiul şi cuantificarea unor astfel de câmpuri, descriind particule relativiste de spin 1/2, ne vom ocupa în capitolul următor. Deocamdată, să observăm că, în mod oarecum ironic, soarta a făcut ca prima tentativă de unificare "după carte" a Mecanicii Cuantice "ortodoxe" cu Relativitatea Specială să excludă practic posibilitatea utilizării câmpului scalar, pentru a modela "funcţia de undă". Cum s-ar spune, chiar de la început, el nu a intrat uşor în joc. Înaintea lui Dirac, Gordon a observat că putem "scăpa" de radical şi păstra natura scalară a câmpului dacă, formal, ridicăm la pătrat ambii membri ai ecuaţiei, lăsându-l la o parte, iniţial, pe Ψ şi adăugându-l pe urmă, adică

$$\sqrt{c^2\,\hat{\vec{p}}\cdot\hat{\vec{p}} + m^2c^4} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\Delta + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Psi = 0\,,$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

obţinând, în unităţi naturale, ecuaţia

$$\left(\Box - m^2\right)\Psi = 0$$

care îi poartă numele. O motivaţie mai serioasă pentru acest artificiu a fost următoarea. Din moment ce energia nu este un scalar relativist, de ce să aplicăm principiul corespondenţei ecuaţiei

$$H = E\,,$$

în sensul

$$\hat{H}\Psi = \hat{E}\Psi$$

şi să nu îl aplicăm ecuaţiei obţinute din $H^2 = E^2$, adică

$$E^2 - c^2|\vec{p}|^2 = m^2c^4\,,$$

care este manifest Lorentz-invariantă. Rezultă imediat

$$\left(\hat{E}^2 - c^2\,\hat{\vec{p}}\cdot\hat{\vec{p}}\right)\Psi = m^2\,c^4\Psi\,,$$

adică exact ecuaţia Klein-Gordon. Când a fost anunţată comunităţii ştiinţifice internaţionale, bucuria a fost imensă, dar, în numai câteva luni, au început necazurile... Dacă lucrăm cu ecuaţia

$$\hat{H}\Psi = \hat{E}\Psi\,,$$

căreia îi mai aplicăm o dată, din stânga, în ambii membri, operatorul $\hat{H}$, obţinem ecuaţia

$$\hat{H}^2\Psi = \hat{H}\hat{E}\Psi\,.$$

Astfel, în stânga am "scăpat" de radical, dar, în dreapta, pentru a forma operatorul $\hat{E}^2$, trebuie ca $\hat{H}$ să comute cu $\hat{E}$ fiindcă, atunci,

$$\hat{H}^2\Psi = \hat{H}\hat{E}\Psi = \hat{E}\hat{H}\Psi = \hat{E}^2\Psi \Rightarrow \left[-\Delta + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Psi = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\,.$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă, pentru particula liberă, comutarea celor doi operatori nu ridică nici o problemă, hamiltonianul fiind evident independent de timp, în cazul prezenţei interacţiunilor însă, care din principiu sunt (sau pot fi) variabile în timp, $[\hat{H}, \hat{E}] \neq 0$, astfel încât trecerea de la

$$\hat{H}\Psi = \hat{E}\Psi$$

la

$$\hat{H}^2\Psi = \hat{E}^2\Psi$$

nu mai are nici o acoperire, în sensul strict al formalismului de bază utilizat în Mecanica Cuantică. Fizic, pentru a sesiza rapid gravitatea problemei $[\hat{H}, \hat{E}] \neq 0$ (pentru ecuaţia Klein-Gordon) este suficient să ne gândim la modelarea interacţiunii unei particule relativiste de sarcină q şi hamiltonian

$$H = c\sqrt{(\vec{P} - q\vec{A})^2 + m^2c^2}\,,$$

cu câmpul electric $\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ al unei unde electromagnetice. Este clar că, în principiu, dacă trecerea de la ecuaţia Schrödinger cu $\hat{H}$ la ecuaţia Klein-Gordon cu $\hat{H}^2$ şi E^2 nu mai este justificată, atunci nici rezultatele obţinute prin integrarea ecuaţiei din urmă nu mai prezintă credibilitate, adică, practic, nu am putea analiza interacţiunea cuantică, relativistă, a unei sarcini cu un câmp de radiaţie. La vremea respectivă (1926-1928), susţinătorii ecuaţiei Klein-Gordon, ca ecuaţie de primă cuantificare (aşa cum este şi ecuaţia Schrödinger, dar relativist-invariantă), au afirmat că problema este, de fapt, una falsă. Totul provine din ideea că ecuaţia în $\hat{H}^2$, $\hat{E}^2$ trebuie obţinută din cea în $\hat{H}$, $\hat{E}$. Dar, nici ecuaţia Schrödinger nu a fost demonstrată. Ea a fost, cel mult, justificată, dacă nu, mai rău, postulată ! Exact la fel putem proceda şi cu ecuaţia Klein-Gordon, postulând-o, sau cel mult, justificând-o prin aplicarea principiului corespondenţei direct relaţiei $H^2 = E^2$. În cazul particulei relativiste în câmp electromagnetic, justificarea este chiar

foarte frumoasă. Astfel, din

$$E = c\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2c^2} + qV\,,\quad \vec{p} = \vec{P} - q\vec{A}\,,$$

avem

$$H = c\sqrt{(\vec{P} - q\vec{A})^2 + m^2c^2} + qV = E\,,$$

clasic echivalentă cu

$$c^2\left[(\vec{P} - q\vec{A})^2 + m^2c^2\right] = (E - qV)^2\,,$$

în care, aplicând principiul corespondenţei şi trecând la unităţi naturale ($c = 1$, $\hbar = 1$), obţinem

$$\left[(\nabla - iq\vec{A})^2 - m^2\right]\Psi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + iqV\right)^2\Psi\,.$$

Nu mai explicităm produsul de operatori din cei doi membri, deoarece observăm un aspect fizico-matematic mult mai interesant care, trei decenii mai târziu (în 1954), a stat la baza teoriei *gauge* a câmpurilor Yang-Mills. Având în vedere că $V = -A_4$, iar

$$(\nabla - iq\vec{A})^2 = \delta^{\mu\nu}(\partial_\mu - iqA_\mu)(\partial_\nu - iqA_\nu)$$

şi $t = x^4$, astfel încât

$$\frac{\partial}{\partial t} + iqV = \partial_4 - iqA_4\,,$$

trecând totul în membrul stâng, rezultă ecuaţia Klein-Gordon sub forma

$$\left[\delta^{\mu\nu}(\partial_\mu - iqA_\mu)(\partial_\nu - iqA_\nu) - (\partial_4 - iqA_4)^2 - m^2\right]\Psi = 0\,,$$

ce se mai poate scrie, deosebit de compact şi extrem de asemănător cu ecuaţia particulei libere,

$$\left[\eta^{ik}D_iD_k - m^2\right]\Psi = 0\,.$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aici $(\eta^{ik}) = \text{diag}[1, 1, 1, -1]$ este tensorul Minkowski şi

$$D_i = \partial_i - iqA_i$$

este un operator (de derivare) ce, mai târziu, a fost denumit "derivată $U(1)$ *gauge*-covariantă". În consecinţă, înglobarea interacţiunii electromagnetice în cuantica scalarului relativist, pornind de la o relaţie clasică $H^2 = E^2$, nu numai că nu are nici o carenţă formală, dar şi măreşte gradul de interes şi valoarea estetică a ecuaţiei. Cum avea să spună Dirac, în "crezul" său filosofic, *[...] natura este foarte curioasă. Dacă cineva, într-o teorie a sa, are frumuseţe în ecuaţiile sale, atunci poate avea încredere în teoria respectivă.* Din păcate, la nivelul aşa-numitei "formulări uniparticulă" a Mecanicii Cuantice Relativiste, nici această modalitate de justificare a ecuaţiei Klein-Gordon nu este lipsită de probleme, de această dată, fizico-filosofice. Lăsând la o parte întrebarea deosebit de grea (în cadrul descrierii uniparticulă) şi anume "cum compunem câmpurile Ψ ale fiecărei particule, pentru a modela stările cuantice ale sistemului relativist format din acestea?", să ne concentrăm asupra următoarei chestiuni. Din

$$E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$$

rezultă, deopotrivă, două valori disjuncte,

$$E = \pm E_p\,, \quad E_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}\,,$$

pentru energia particulei. Cum interpretăm energia negativă, $-E_p$, a unei particule libere? În teoria relativistă a fermionilor, dată de Dirac, răspunsul a fost extrem de interesant şi nu mai puţin "isteţ", ca să spunem aşa. Pur şi simplu, toate stările de energie negativă sunt complet ocupate de fermioni, în acord cu principiul lui Pauli, astfel încât, între acestea nu este posibilă nici o tranziţie, fiind deci, fizic, inobservabile. Restul amănuntelor care apar în acest model de completă ocupare a vidului, numit şi modelul mării Fermi-Dirac, le amânăm

pentru capitolul următor. Revenind la particulele scalare, acestea sunt bozoni, nu ascultă de principiul de excluziune, deci, se pot acumula oricâte, pe orice nivel energetic. Pentru a ieşi, parţial, din impas, în acei ani de început, când Teoria Cuantică a Câmpurilor nu apăruse încă, s-a susţinut că este posibilă, în principiu, existenţa a două universuri gemene, dar de energii contrare, atâtă vreme cât, între cele două lumi, nu pot avea loc tranziţii. Pur şi simplu, s-a întâmplat să trăim în "lumea de energie pozitivă". Cum, cel puţin pentru particula liberă, energia (ei) este constantă, înseamnă că, dacă ea a fost "de la început" negativă, va rămâne aşa, neexistând nici o şansă ca acea particulă să apară în universul energiilor pozitive. Problema deosebit de sensibilă cu această explicaţie este aceea a câmpurilor exterioare, extrem de intense, care pot conferi unei particule de energie $-E_p$ un surplus energetic, superior valorii $E_p + mc^2$, făcând-o să apară în lumea energiilor pozitive. Acest efect a primit numele lui Klein şi prezintă interes, chiar şi astăzi, în studiul comportării microparticulelor în câmpuri electromagnetice sau gravitaţionale deosebit de intense [27]. Nu ne propunem acum să lămurim efectul Klein, deoarece complexitatea sa depăşeşte cadrul lucrării de faţă. Am vrut doar să îl semnalăm ca pe o dificultate serioasă în calea "formulării uniparticulă". Cum o nenorocire nu vine niciodată singură, chiar dacă omitem efectul Klein, spunând că lucrăm în limita energiilor joase (sub $2mc^2$, pentru o particulă dată), apare o altă problemă, mai gravă prin simplitatea ei. De îndată ce acceptăm că o particulă liberă se poate afla în stări de energie negativă, atunci trebuie să acceptăm şi faptul că, în aceste stări, probabilitatea (cuantică) de prezenţă a particulei într-un domeniu spaţial este, de asemenea, negativă. Că aşa stau lucrurile, vom vedea imediat. Din ecuaţia Gordon şi conjugata sa complexă

$$\Box\Psi - m^2\Psi = 0 \ , \quad \Box\Psi^* - m^2\Psi^* = 0$$

obţinem, înmulţind-o pe prima cu Ψ^*, pe a doua cu Ψ şi luând diferenţa,

$$\partial^i [\Psi^* \Psi_{,i} - \Psi^*{}_{,i} \Psi] = 0 \ ,$$

unde $\partial^i = \eta^{ik}(\cdot)_{,k} = \eta^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}$. Prin urmare, cuadrivectorul

$$s_i = \Psi^*\Psi_{,i} - \Psi^*{}_{,i}\Psi$$

este conservativ, având 4-divergenţa nulă. Cum însă sub conjugata complexă

$$s_i^* = \Psi^*{}_{,i}\Psi - \Psi^*\Psi_{,i} = -s_i$$

componentele sale se transformă precum numerele pur imaginare, rezultă că mărimea observabilă (deci reală) de acelaşi tip, şi anume *cuadrivectorul curentului de probabilitate*, notat adesea cu j_i, se va obţine din s_i prin înmulţire cu $-i$, adică

$$j_i = -i[\Psi^*\Psi_{,i} - \Psi^*{}_{,i}\Psi] .$$

De ce se înmulţeşte cu $-i$ şi nu cu i, este o chestiune legată de convenţia de fază $\varphi = \frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)$ a undei plane asociate particulei de energie pozitivă în signatura $+2$, adică $\eta = \mathrm{diag}[1, 1, 1, -1]$, a spaţiu-timpului. De ce este o densitate a curentului de probabilitate, se vede imediat, aplicând principiul euristic, adică prin compararea componentelor spaţiale j_μ cu 3-vectorul curentului de probabilitate

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}[\Psi^*(\nabla\Psi) - (\nabla\Psi^*)\Psi]$$

din Mecanica Cuantică nerelativistă. Inexistenţa în j_i a factorului $(2m)^{-1}$ este o problemă legată doar de normarea funcţiei de undă Ψ. Precum ştim din Electrodinamica clasică (relativistă, dar necuantică), componentele contravariante ale 4-vectorului densităţii de curent a unui mediu continuu, de densitate proprie $\rho_0^{(e)}$ a sarcinii electrice, sunt date de expresia

$$j^i = \rho_0^{(e)}u^i ,$$

unde u^i sunt componentele câmpului 4-vectorial al vitezei. În lungul unei linii de curent avem

$$u^4 = \frac{\mathrm{d}x^4}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma} , \text{ cu } d\sigma^2 = (dt)^2 - \delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -ds^2 ,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

deci, din

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{1-|\vec{v}|^2},$$

rezultă imediat

$$j^4 = \frac{\rho_0^{(e)}}{\sqrt{1-|\vec{v}|^2}} = \rho^{(e)},$$

adică exact expresia densităţii de sarcină în referenţialul observatorului faţă de care fluidul încărcat se află în mişcare. Prin analogie, dacă $\vec{j} = -i[\Psi^*(\nabla\Psi) - (\nabla\Psi^*)\Psi]$ este de tipul densităţii de curent

$$j^\mu = \rho_0^{(e)} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \Rightarrow \vec{j} = \rho^{(e)}\vec{v},$$

atunci a patra componentă contravariantă a 4-curentului de probabilitate

$$j^4 = -j_4 = i[\Psi^*\Psi_{,4} - \Psi^*{}_{,4}\Psi]$$

trebuie să fie o densitate, nu proprie, şi anume una de probabilitate. Aşadar, în Mecanica Cuantică relativistă (descriere uniparticulă) locul "tradiţionalei" densităţi de probabilitate

$$\rho_p^{(NR)} = |\Psi|^2$$

este luat de mărimea

$$\rho = i\left[\Psi^*\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)\Psi\right]$$

care se transformă ca o densitate, adică prin $[1-|\vec{v}|^2]^{-1/2}$ ($c = 1$, unităţi naturale), sub acţiunea grupului Lorentz propriu ortocron (definit în Capitolul I). În consecinţă, probabilitatea de detectare a particulei într-un domeniu D din $\mathbf{R}^3$ va fi dată de relaţia

$$\mathcal{P}_D = \int_{D\subset\mathbf{R}^3} \rho\, d^3x.$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITARĂ LIBRARY

Să estimăm această probabilitate mai întâi pentru un tren de unde

$$\Psi(\vec{x},t) = \int d^3p\,\psi(\vec{p})e^{ipx}\ ,\quad px = \vec{p}\cdot\vec{x} - E_p t$$

asociat unei particule *out* (adică de impuls $\vec{p}$ aliniat vectorului de poziţie $\vec{x}$, spre $|\vec{x}| \to \infty$) de energie pozitivă $E = E_p$. Avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= -i\int d^3p\,E_p\,\psi(\vec{p})e^{ipx}\\ \frac{\partial\Psi^*}{\partial t} &= i\int d^3p\,E_p\,\psi^*(\vec{p})e^{-ipx}\ ,\end{aligned}$$

astfel încât expresia probabilităţii devine

$$\mathcal{P}_{\mathrm{D}} = \int_{\mathrm{D}} d^3x \int d^3p'd^3p\,\psi^*(\vec{p}')\psi(\vec{p})\,(E_p + E_{p'})\,e^{-i(p'-p)x}\ .$$

Extinzând D la întregul spaţiu $\mathbf{R}^3$, utilizând şi consecinţa

$$\int_{\mathbf{R}^3} d^3x\,e^{-i(\vec{p}\,'-\vec{p})\cdot\vec{x}}e^{i(E_{p'}-E_p)t} = (2\pi)^3\delta(\vec{p}\,'-\vec{p})\,e^{i(E_{p'}-E_p)t} \equiv (2\pi)^3\delta(\vec{p}\,'-\vec{p})$$

a reprezentării Fourier a funcţionalei δ-Dirac (pe spaţiul impulsurilor), obţinem

$$\mathcal{P} = \int d^3p'd^3p\,(2\pi)^3\delta(\vec{p}\,'-\vec{p})\,(E_{p'}+E_p)\,\psi^*(\vec{p}\,')\psi(\vec{p})\ ,$$

adică

$$\mathcal{P} = \int d^3p\,\left[(2\pi)^3 2E_p\right]|\psi(\vec{p})|^2\ .$$

Prin introducerea amplitudinilor spectrale

$$\varphi(\vec{p}) = \frac{\psi(\vec{p})}{\sqrt{(2\pi)^3\,2E_p}}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi impunerea condiţiei de normare, pe întregul spaţiu R^3, la $\mathcal{P} = 1$, rezultă expresia

$$\int d^3p\,|\varphi(\vec{p})|^2 = 1\,,$$

extrem de încurajatoare, datorită asemănării ei cu condiţia de normare din cuantica "ortodoxă"

$$\sum_n |c_n|^2 = 1$$

a probabilităţilor $|c_n|^2$ de realizare a stării proprii $|n\rangle$ a hamiltonianului unui sistem cuantic aflat în starea "superpozată"

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n|n\rangle\,.$$

Necazul apare când facem exact acelaşi calcul pentru un tren *out*, dar de energie negativă, adică

$$\Psi(\vec{x},t) = \int d^3p\,\psi(\vec{p})e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}+E_pt)}\,.$$

Ca să păstrăm invarianţa fazei, îl trecem pe $\vec{p}$ în $-\vec{p}$ şi notăm $\chi(\vec{p}) = \psi(-\vec{p})$. Rezultă

$$\Psi(\vec{x},t) = \int d^3p\chi(\vec{p})e^{-ipx}\,,\quad \text{cu}\quad px = \vec{p}\cdot\vec{x} - E_pt\,.$$

Avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= i\int d^3p\,E_p\,\chi(\vec{p})e^{-ipx}\\ \frac{\partial\Psi^*}{\partial t} &= -i\int d^3p\,E_p\,\chi^*(\vec{p})e^{ipx}\,,\end{aligned}$$

deci

$$\mathcal{P}_{\mathrm{D}} = -\int_{\mathrm{D}\subset\mathrm{R}^3} d^3x\int d^3p'd^3p\,\chi^*(\vec{p}')\chi(\vec{p})\,(E_p + E_{p'})\,e^{i(p'-p)x}\,.$$

BCU ASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Procedând ca în cazul energiilor pozitive, obţinem

$$\mathcal{P} = -\int d^3p \left[(2\pi)^3 2E_p\right] |\chi(\vec{p})|^2$$

şi, normând amplitudinea spectrală $\chi(\vec{p})$ la $\varphi(\vec{p})$ prin acelaşi tip de relaţie, adică

$$\varphi(\vec{p}) = \frac{\chi(\vec{p})}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}},$$

rezultă de această dată, în mod clar, pentru particula liberă, dar de energie negativă,

$$\mathcal{P} = -\int d^3p\, |\varphi(\vec{p})|^2 = -1.$$

Mai mult decât atât, cum $\mathcal{P}$ corespunde pătratului normei vectorului de stare $|\psi\rangle$, rezultă că ar trebui să avem

$$\mathcal{P} = \sum_{n',n} c^*_{n'} c_n \langle n'|n\rangle = -1$$

adică, păstrând ortogonalitatea stărilor proprii $|n\rangle$, ar rezulta

$$\sum_n |c_n|^2 = +1$$

dar cu preţul unui efort imaginativ deosebit, anume acela de a concepe, cum spun fizicienii, stări proprii de normă negativă,

$$\langle n'|n\rangle = -\delta_{n'n}.$$

Din cauza extremei lor stranietăţi, ele au fost denumite "fantome", *ghost-states*, şi vom reveni mai pe larg asupra lor în capitolul dedicat cuantificării Lorentz-covariante a câmpului electromagnetic. Deocamdată, rămânând la formularea uniparticulă a Mecanicii Cuantice relativiste şi la rolul gnoseologic al câmpului scalar, devine tot mai evidentă

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

afirmaţia că "într-adevăr, el nu a intrat uşor în teorie". Nu numai că ar trebui să acceptăm un univers de energie negativă, dar înseşi probabilităţile în acest univers ar fi fictive. Aşa ceva era (şi încă este) prea mult pentru o teorie fizică. Cu puţin înaintea apariţiei Teoriei Cuantice a Câmpurilor, situaţia devenise atât de gravă, încât unii fizicieni chiar se gândeau că în natură, în stare fundamentală – ca elemente de bază – câmpurile scalare nici nu pot exista. Descoperirea celor trei mezoni, $\pi^{\pm}$ şi π^0, le-a infirmat supoziţiile şi a impulsionat cercetările. Din punct de vedere teoretic, trebuia să existe o cale de ieşire, *a way out of noway*[1]. Aşa cum s-a demonstrat ulterior, aspect de care ne vom ocupa în acest capitol pentru bozonul scalar, şi în cel următor pentru fermionii de spin 1/2, ecuaţia Klein-Gordon şi, respectiv, ecuaţia Dirac, erau în esenţă corecte, conducând la rezultate confirmabile experimental. Din acest moment, al susţinerii experimentale a previziunilor lor, tentativa de conciliere a diverselor metode de justificare a acestor ecuaţii cu alte metode "tradiţionale" în Mecanica Cuantică nerelativistă, nu mai are nici un sens, sub aspectul rigurozităţii. Pur şi simplu, ele pot fi postulate, deci luate ca atare. Ceea ce era în neregulă, era imaginea uniparticulă din cuantica relativistă, la energii mari apărând, inevitabil, "antiparticulele"; deci avem nevoie de o "cuantică a sistemelor cu număr de particule variabil". Această teorie, generic denumită adesea şi *de a doua cuantificare* (referindu-se la necesitatea cuantificării nu numai a observabilelor uzuale, precum energia, impulsul, momentul cinetic etc., dar chiar şi a funcţiei de undă), interpretează câmpul $\Psi(\vec{x}, t)$, sau oricum dorim să-l notăm, ca un operator (sugestiv denumit "de câmp"), nu neapărat hermitic, ce acţionează pe un spaţiu Hilbert special, numit *spaţiul Fock al stărilor multi-particulă*, creând sau anihilând particule. Aşa cum spuneam, în tot restul lucrării ne vom ocupa cu prezentarea cât mai detaliată a acestei teorii de cuantificare a câmpurilor.

[1] O ieşire dintr-o situaţie aparent fără ieşire

3.1 Formalismul lagrangeian

Chiar şi în cel mai simplu caz al formulării unei teorii cuantice a particulei relativiste libere, de spin zero, există două elemente fundamentale: un câmp scalar, în general complex, $\phi : M_4 \to \mathbb{C}$, în relaţie cu particula printr-un sistem logic de reguli de interpretare (dependente de natura teoriei) şi o funcţională cu valori reale $S[\phi^*, \phi]$ definită pe mulţimea $C^{r\geq 2}(M_4; \mathbb{C})$ a funcţiilor complexe r-diferenţiabile pe M_4, prin relaţia

$$S[\phi^*, \phi] = -\int d^4x\, \mathcal{L}(\phi^*, \phi, \partial\phi^*, \partial\phi)\,, \tag{1.1}$$

unde funcţia $-\mathcal{L}$, dependentă explicit numai de câmp, conjugata sa complexă şi derivatele parţiale de ordinul I ale acestora în raport cu coordonatele $(x^i)_{i=\overline{1,4}} = (\vec{x}, t)$ pe M_4, este densitatea invariantă de lagrangeian. Dat fiind că această funcţională, prin "punctele" sale de staţionaritate, stabileşte dinamica sistemului, ea a primit numele de *acţiune* şi este global invariantă faţă de semiprodusului direct al grupurilor Poincaré şi $U(1)$. În toate etapele aplicării procedeului variaţional, densitatea (invariantă) de lagrangeian are, sub aspect "tehnic", rolul principal, de forma ei concretă depinzând atât "desfăşurarea" spaţio-temporală a câmpului, cât şi – într-un sens mai larg – proprietăţile şi valorile observabilelor sale fundamentale, cum ar fi impulsul, energia, momentul cinetic orbital, curentul şi sarcina. Cu un asemenea factor de impact, este lesne de înţeles de ce adepţii axiomatizării teoriilor de câmp preferă postularea formei funcţiei $-\mathcal{L}$ pentru fiecare clasă de câmpuri în parte. Deşi acest punct de vedere are, în mod cert, avantajele sale – eleganţă, cursivitate în formulare, globalitate în tratarea riguroasă a aspectelor matematice esenţiale – cunoaşterea unor metode (sau artificii) de deducere (sau, cel puţin, de justificare) a densităţii de lagrangeian măreşte adesea gradul de înţelegere, favorizează memorarea "punctelor fierbinţi" ale teoriei – prin accentuarea rolului exemplificativ – şi consolidează infrastructura necesară dezvoltării unor teorii mai complicate. În stadiul actual al

Fizicii, asemenea metode sau procedee există pentru toate câmpurile libere şi pentru majoritatea sistemelor de câmpuri ce se supun geometriei de *gauge*-invarianţă. Desigur, în formularea celor mai avansate teorii, cu adevărat situate la frontierele cunoaşterii, există încă anumite ambiguităţi, dar, precum spunea Einstein, "să sperăm că acestea sunt amănunte ce vor fi remediate în vremurile ce au să vină..."

Pentru obţinerea densităţii invariante de lagrangeian a câmpului scalar complex (liber) procedeul este simplu şi elegant, servind, în decursul timpului, ca sursă de inspiraţie şi pentru deducerea unor lagrangeieni mai complicaţi, cum ar fi cei din teoria stringurilor [67]. Se are în vedere, în primul rând, constrângerea geometrică fundamentală

$$\eta_{ik}u^i u^k = -1 \tag{1.2}$$

a 4-vitezei unei particule, pentru ca aceasta să "survoleze" cauzal spaţiu-timpul Minkowski. Înmulţind cu m^2 în ambii membri, obţinem

$$\eta^{ik}p_i p_k + m^2 = 0 \tag{1.3}$$

şi aplicând principiul corespondenţei, $p_i \rightarrow -i\partial_i$, rezultă imediat ecuaţia Gordon

$$\left(\Box - m^2\right)\phi = 0 \tag{1.4}$$

şi conjugata ei complexă

$$\phi^*\left(\Box - m^2\right) = 0 \tag{1.5}$$

pe care am scris-o cu acţiunea operatorului Gordon, $\Box - m^2$, la stânga, pentru a înlesni consideraţiile ce urmează. Cum, intuitiv, în referenţialul propriu şi în termenii descrierii uniparticulă, mărimea $\phi^*\phi$ reprezintă densitatea invariantă de probabilitate, iar funcţionala acţiune se exprimă şi în raport cu aceasta, rezultă că variaţiile ei virtuale vor fi, în cel mai simplu caz, de forma

$$\delta(\phi^*\phi) = (\delta\phi^*)\phi + \phi^*(\delta\phi)\,. \tag{1.6}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aşadar, vom înmulţi ecuaţia Gordon în stânga cu $\delta\phi^*$, conjugata ei complexă, în dreapta cu $\delta\phi$ şi vom integra pe co-volumul d^4x suma celor două rezultate. Obţinem ecuaţia

$$\int \left\{\delta\phi^* \left[\left(\Box - m^2\right)\phi\right] + \left[\phi^* \left(\Box - m^2\right)\right]\delta\phi\right\} d^4x = 0\,, \tag{1.7}$$

adică, separând termenii masici,

$$\int \left[\delta\phi^*(\Box\phi) + (\Box\phi^*)\delta\phi - m^2\,\delta(\phi^*\phi)\right] d^4x = 0\,. \tag{1.8}$$

Integrând prin părţi în primii doi termeni, avem

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \int \delta\phi^*(\Box\phi)\,d^4x = \int \left(\eta^{ik}(\delta\phi^*)\phi_{,k}\right)_{,i} d^4x - \int \eta^{ik}(\delta\phi^*)_{,i}\,\phi_{,k}\,d^4x\,,\\ &\text{b)}\quad \int (\Box\phi^*)\delta\phi\,d^4x = \int \left(\eta^{ik}\phi^*{}_{,k}\,\delta\phi\right)_{,i} d^4x - \int \eta^{ik}\phi^*{}_{,k}\,(\delta\phi)_{,i}\,d^4x\,, \end{aligned} \tag{1.9}$$

ceea ce aduce ecuaţia la forma

$$\oint \eta^{ik}\left[(\delta\phi^*)\phi_{,k} + \phi^*{}_{,k}\,\delta\phi\right] dS_k - \delta \int \left[\eta^{ik}\phi^*{}_{,i}\,\phi_{,k} + m^2\,\phi^*\phi\right] d^4x = 0\,. \tag{1.10}$$

Cum prima integrală (pe 3-suprafaţa netedă pe porţiuni ∂D ce închide domeniul arbitrar D din M_4) se anulează, în virtutea condiţiilor standard $\delta\phi|_{\partial D} = \delta\phi^*|_{\partial D} = 0$ ale procedeului variaţional, obţinem ecuaţia de staţionaritate

$$\delta S = 0 \tag{1.11}$$

a funcţionalei acţiune

$$S[\phi^*, \phi] = -\int d^4x\,\mathcal{L}(\phi^*,\, \phi,\, \partial\phi^*,\, \partial\phi)$$

a câmpului scalar complex, având funcţia caracteristică

$$\mathcal{L}[\phi^*, \phi] = \eta^{ik}\phi^*{}_{,i}\,\phi_{,k} + m^2\,\phi^*\phi \tag{1.12}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de definire a densităţii de lagrangeian. Referitor la convenţiile de semn, se cuvine să facem următoarea observaţie. În aşa-numita signatură $\sigma = -2$, tensorul metric fundamental $\eta_{(-2)}$ este diag$[1, -1, -1, -1]$, cu prima poziţie pentru termenul temporal $(dx^0)^2 = (dt)^2$. Din acest motiv, cele două metrici, respectiv de signatură $\sigma = \pm 2$, vor fi corelate printr-o schimbare de semn şi o reindexare $x^4 \leftrightarrow x^0$. Ca urmare, trecând de la signatura $+2$, în care am formulat funcţia $\mathcal{L}[\phi^*, \phi]$, la signatura -2, densitatea de lagrangeian, $-\mathcal{L}$, capătă expresia

$$-\mathcal{L}_{(2)}[\phi^*, \phi] \to -\left[-\eta^{\mu\nu}_{(-2)}\phi^*{}_{,\mu}\,\phi_{,\nu} + m^2\,\phi^*\phi\right] = \mathcal{L}_{(-2)}[\phi^*, \phi]\,,$$

cu $\mu, \nu = \overline{0,3}$, adică devine exact densitatea de lagrangeian

$$\mathcal{L}[\phi^*, \phi] = \eta^{\mu\nu}\phi^*{}_{,\mu}\,\phi_{,\nu} - m^2\,\phi^*\phi \tag{1.13}$$

întâlnită în majoritatea cărţilor de Fizica Particulelor Elementare ce utilizează, oarecum din motive de tradiţie, convenţia de signatură -2. Desigur, aşa cum de altfel am exemplificat, dacă sunt aplicate consecvent, cele două convenţii conduc la aceleaşi rezultate, dată fiind, de la Einstein încoace, "formularea liberă de coordonate", general (tensorial) covariantă, a ecuaţiilor teoriilor fizice fundamentale. Oricum, "chestiunea de gust" (în adoptarea uneia sau alteia dintre convenţii) rămâne şi adesea, în "traducerea" unor expresii mai complicate, pot să apară probleme. Adepţii signaturii -2 au ca argument de principiu semnul energiei $p^0 = E$, susţinând că este absurd să-l schimbăm când trecem de la contra- la covarianţă, prin intermediul tensorului metric η. Pe de altă parte, cei împătimiţi de signatura $+2$ au argumente ce ţin de intuiţia geometrică : în Univers, sunt "senzorial" percepute, chiar şi în cele mai rudimentare experimente, mărimile "coordonizabile" spaţial. Timpul are un caracter special, insuficient elucidat în natura sa, prezentul este mai mult o noţiune abstractă, din cauza valorii finite a vitezei luminii şi orice evoluţie în Univers are un sens ireversibil de la trecut spre viitor. Pare astfel naturală descrierea metricii Minkowski sub

forma ei iniţială

$$ds^2 = |d\vec{x}|^2 - (dt)^2 ,$$

care subliniază atât diferenţa specifică dintre durată şi lungime, cât şi faptul că metrica indusă pe orice 3-suprafaţă de epocă constantă,

$$ds^2|_{t=const.} = |d\vec{x}|^2 ,$$

este pozitiv definită, întocmai precum distanţa dintre oricare două puncte ale acesteia.

Motivul pentru care, în convenţia +2, este preferată funcţia caracteristică $\mathcal{L}$ de forma (1.12), de exemplu, pentru câmpul scalar complex liber, în locul densităţii (invariante) de lagrangeian $-\mathcal{L}$, este acela că tensorul conservativ impuls-energie, în spaţiul Minkowski, se defineşte prin relaţia

$$T_{ik} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{ik}} \left[\sqrt{-g}\mathcal{L} \right] \right\}_{g=\eta} , \tag{1.14}$$

fără implicarea nici unei schimbări de semn. În cazul general $g \neq \eta$, prin ecuaţiile Einstein (fără constantă cosmologică)

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa_0 T_{ik} ,$$

el descrie contribuţia geometro-dinamică a surselor materiale la structura spaţiu-timpului; în cazul particular $g = \eta$ (pe spaţiul Minkowski), prin integralele sale pe 3-suprafeţele de gen spaţial, oferă observabilele fundamentale ale câmpului. De aceea, este lesne de înţeles de ce adepţii signaturii $\sigma = 2$ preferă să utilizeze pentru $\mathcal{L}$, printr-un uşor abuz de limbaj, denumirea de densitate (invariantă) de lagrangeian, în locul celei absolut corecte $-\mathcal{L}$. De altfel, omiterea semnului "$-$" nu este esenţială decât în estimarea corectă

$$\pi^{\dagger i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,i}}$$

$$\pi^{i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{\dagger}{}_{,i}}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi nu

$$\pi^{\dagger i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,i}}$$
$$\pi^{i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{\dagger}_{,i}}$$

a impulsului canonic conjugat "coordonatei" ϕ şi, respectiv $\phi^{\dagger}$, în universul Minkowski. De asemenea, este importantă în formalismul cuantificării câmpurilor, prin metoda *integralei de drum*, unde rolul fundamental revine "funcţionalei generatoare"

$$W[\phi^*, \phi] = \int [d\phi^*][d\phi]\, e^{iS[\phi^*,\phi]},$$

deci, în principiu, semnul acţiunii contează (vom reveni asupra acestei chestiuni în ultimul capitol)[2].

Dar să ne întoarcem la cursul firesc al discuţiei şi să investigăm în ce măsură forma (1.12) a densităţii de lagrangeian poate fi generalizată la cazul unui sistem cu un spectru mai bogat de particule scalare. Fără a lua în considerare, pentru moment, nici un fel de restricţii de ordin algebric, adică impuse de apartenenţa particulelor la anumite grupuri de simetrii interne, am putea spune aşa: să presupunem că avem n familii de particule scalare, în cadrul fiecărei familii particulele fiind identice până la semnul sarcinii electrice, iar familiile diferind între ele prin masa de repaus a particulelor. Deoarece, în Mecanica Cuantică, particulele identice sunt indiscernabile, rezultă că este suficient să luăm câte o particulă din fiecare familie, ca reprezentantă a întregii familii. Obţinem în acest fel n reprezentanţi, pe care îi vom indexa cu litere de la începutul alfabetului grecesc ($\alpha, \beta, \gamma \ldots = \overline{1,n}$), şi cărora, deoarece sunt încărcaţi electric, le vom asocia câte un câmp scalar complex ϕ^{α}.

[2]Coroborarea dintre Teoria Cuantică a Câmpurilor şi Teoria Relativităţii Generale cere folosirea aceleiaşi convenţii, deci aceeaşi signatură.

BCU ... UNIVERSITY LIBRARY

Atunci, putem "vizualiza" întregul set al celor n familii printr-un singur vector

$$\Phi = \phi^{\alpha} u_{\alpha} \tag{1.15}$$

din spaţiul liniar (abstract) $\mathbf{C}^n$, înzestrat cu baza canonică

$$u_{\alpha} = \left(\delta_{\alpha}^{\beta}\right) \ , \ \alpha, \beta = \overline{1,n} \tag{1.16}$$

a matricelor unicoloană cu un singur element nenul, egal cu 1, pe linia $\beta = \alpha$. Bineînţeles, pe varietatea de bază, adică în spaţiu-timpul Minkowski, vectorul Φ din $\mathbf{C}^n$ este un scalar sau, cum spun matematicienii, Φ este o "zero-formă" pe M_4 cu valori în $\mathbf{C}^n$. Prin aplicarea operaţiei de conjugare hermitică, matricea unicoloană u_{α} trece în matricea unilinie v^{α} cu un singur element nenul, egal cu 1, în coloana $\beta = \alpha$, adică

$$v^{\alpha} = \left(\delta_{\beta}^{\alpha}\right) = (u_{\alpha})^{\dagger} \ . \tag{1.17}$$

După cum se poate constata, produsul oricărei matrice v cu oricare matrice u este scalarul pur δ-Kronecker, adică

$$v^{\alpha} u_{\beta} = \delta_{\gamma}^{\alpha} \delta_{\beta}^{\gamma} = \delta_{\beta}^{\alpha} \ , \tag{1.18}$$

ceea ce ne permite să afirmăm că cele două baze, u şi v, sunt reciproc duale. În acelaşi timp, dacă definim produsul scalar a doi vectori oarecare, Ψ şi Φ din $\mathbf{C}^n$, prin relaţia

$$(\Psi \, , \Phi) = \Psi^{\dagger} \Phi \, , \tag{1.19}$$

atunci obţinem pentru oricare doi vectori ai bazei u

$$(u_{\alpha} \, , u_{\beta}) = g_{\alpha\beta} = (u_{\alpha})^{\dagger} u_{\beta} = v^{\alpha} u_{\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha} \, . \tag{1.20}$$

Deci tensorul metric $(g_{\alpha\beta})$ în spaţiul liniar abstract este chiar $(\delta_{\alpha\beta})$, iar baza u este, evident, ortonormală. Conjugata hermitică a zero-formei Φ pe M_4 se scrie simplu

$$\Phi^{\dagger} = \phi_{\alpha}^{*} v^{\alpha} \tag{1.21}$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

deoarece, metrica fiind δ,

$$\Phi^\dagger = \phi^{*\alpha}(u_\alpha)^\dagger = \phi^{*\alpha}v^\alpha = \phi^*_\alpha v^\alpha .$$

Coborârea sau ridicarea indicelui, atunci când conjugăm complex componentele unui "obiect geometro-algebric" din $\mathbf{C}^n$, este o caracteristică a formalismului tensorial pe spaţii complexe, cu utilizare standard în metoda tensorială de analiză a grupurilor unitare şi asigură aplicarea convenţiei de sumare, formulată de Einstein, numai indicilor cu "repetiţie diagonală". Ca un foarte scurt exemplu, pătratul normei lui Φ se scrie sub forma

$$\| \Phi \|^2 = \Phi^*\Phi = \phi^*_\alpha v^\alpha u_\beta \phi^\beta = \delta^\alpha_\beta \phi^*_\alpha \phi^\beta = \phi^*_\alpha \phi^\alpha \Leftrightarrow \| \Phi \|^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} |\phi^\alpha|^2 .$$

Inspiraţi de funcţia caracteristică (1.12) a densităţii de lagrangeian pentru un singur câmp scalar complex ϕ, putem introduce, pentru a caracteriza dinamica tuturor celor n familii, următoarea densitate de lagrangeian:

$$\mathcal{L}[\Phi^\dagger, \Phi] = \eta^{ik}\Phi^\dagger{}_{,i} K\Phi_{,k} + \Phi^\dagger M\Phi , \qquad (1.22)$$

formulată, sub aspectul dependenţei spaţio-temporale, în termenii câmpului "unificator" $\Phi \in \mathcal{F}(M_4; \mathbf{C}^n)$, K şi M fiind deocamdată două matrice $n \times n$ cu coeficienţi (constanţi) din $\mathbf{C}$, adică $M, K \in GL(n; \mathbf{C})$. Acum urmează prima restricţie de ordin algebric. Deşi $\mathcal{L}$ este o zeroformă pe M_4, un scalar Lorentz nu ştim dacă este real. Pentru aceasta, va trebui să avem

$$\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L} , \qquad (1.23)$$

adică

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\dagger[\Phi^\dagger, \Phi] &= \eta^{ik}\Phi^\dagger{}_{,i} K^\dagger\Phi_{,k} + \Phi^\dagger M^\dagger\Phi = \\ &= \eta^{ik}\Phi^\dagger{}_{,i} K\Phi_{,k} + \Phi^\dagger M\Phi = \mathcal{L}[\phi^\dagger, \Phi] . \end{aligned} \qquad (1.24)$$

BCU IASI / CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

Pentru matricea M de "amestec a maselor" se vede imediat că trebuie să fie hermitică. Aceeaşi proprietate urmează pentru matricea K de "amestec cinetic", deoarece tensorul metric η este simetric. În plus, pentru această matrice, există şi un argument de ordin fizic care îi fixează practic forma la aceea a matricei unitate. Să presupunem că efectuăm în $\mathbf{C}^n$ o transformare unitară cu o anumită matrice U_K. Câmpurile $\Phi, \Phi^\dagger$ devin

$$\Phi = U_K \underline{\Phi} \ , \quad \Phi^\dagger = \underline{\Phi}^\dagger U_K^\dagger \ , \tag{1.25}$$

astfel încât obţinem pentru lagrangeian expresia

$$\mathcal{L}\left[\underline{\Phi}^\dagger, \underline{\Phi}\right] = \underline{\Phi}^\dagger{}_{,i} U_K^\dagger K U_K \underline{\Phi}^{,i} + \underline{\Phi}^\dagger U_K^\dagger M U_K \underline{\Phi} \ . \tag{1.26}$$

Matricea K, hermitică, fiind dată, determinăm matricea de diagonalizare U_K, astfel încât obţinem, pentru cazul nedegenerat,

$$U_K^\dagger K U_K = \mathrm{diag}\,[\kappa_1, \ldots, \kappa_n] \ , \tag{1.27}$$

densitatea de lagrangeian luând forma

$$\mathcal{L}\left[\underline{\Phi}^\dagger, \underline{\Phi}\right] = \kappa_\alpha \underline{\phi}^*_{\alpha,i} \underline{\phi}^{\alpha,i} + \underline{\phi}^*_\alpha \underline{M}^\alpha_\beta \underline{\phi}^\beta \ , \text{ cu } \underline{M} = U_K^\dagger M U_K \ . \tag{1.28}$$

După cum se observă, putem renorma banal funcţia de undă, prin introducerea componentelor complexe

$$\Lambda^\alpha = \sqrt{\kappa_\alpha}\,\phi^\alpha \ , \ \Lambda^*_\alpha = \sqrt{\kappa_\alpha}\,\phi^*_\alpha \ , \tag{1.29}$$

fără sumare după α, astfel încât, în raport cu noul câmp scalar Λ, cu valori în $\mathbf{C}^n$, lagrangeianul devine

$$\mathcal{L}[\Lambda^\dagger, \Lambda] = \eta^{ik} \Lambda^\dagger{}_{,i} \Lambda_{,k} + \Lambda^\dagger \mathcal{M} \Lambda \ , \tag{1.30}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

posedând un termen cinetic standard, de tipul $|\partial\phi|^2$ şi o "matrice de amestec a maselor"

$$\mathcal{M}^{\alpha}_{\beta} = (\kappa_{\alpha}\kappa_{\beta})^{-1/2}\, \underline{M}^{\alpha}_{\beta} \,. \tag{1.31}$$

Existenţa unor valori proprii nule ale matricei K aparent creează probleme în definirea "matricei de masă" $\mathcal{M}$. Dar, după cum se observă din forma (1.28) a lagrangeianului, componentele ϕ^{α} respective nu se propagă, ele reducând numărul componentelor esenţiale ale câmpului Φ la n − *numărul valorilor principale nule.* În unele situaţii, de exemplu în cazul sistemelor conţinând particule cu mase de repaus diferind prin câteva ordine, aspecte de genul celui tocmai semnalat, dar nu atât de tari, ci numai cu $\kappa_{\alpha} \to 0$ (dar $\neq 0$) pentru unele valori ale lui α, pot reprezenta un interes fizic deosebit, în sensul că toate câmpurile cu quasi-absenţa propagării libere pot fi "exterioare", necuantificate, şi permit reformularea teoriei ca o problemă de împrăştiere (cuantică) a celorlalte particule, cu $\kappa_{\beta} \neq 0$ şi ϕ^{β} esenţiale, pe aceste câmpuri exterioare (clasice).

Revenind, pentru a conchide acest raţionament, prin care am obţinut forma (1.30) a lagrangeianului, este clar că puteam lua de la bun început, în lagrangeianul (1.22), $K = 1$ (matricea unitate), rămânând să discutăm în continuare pe marginea densităţii de lagrangeian

$$\mathcal{L}[\Phi^{\dagger}, \Phi] = \eta^{ik}\Phi^{\dagger}{}_{,i}\,\Phi_{,k} + \Phi^{\dagger} M \Phi \,, \quad \text{cu } M^{\dagger} = M \,. \tag{1.32}$$

După cum este uşor de observat, dacă am încerca să facem aceeaşi jonglerie cu diagonalizarea matricei M (de această dată) şi renormarea funcţiei de undă, pentru a aduce termenul masic la un acelaşi coeficient, de forma m^2, am eşua lamentabil, deoarece matricea M are în principiu valori proprii diferite şi am distruge coeficientul unitar din termenul cinetic. Ca implicaţii, această tentativă, deşi poate părea naivă, nu este lipsită de sens. Este clar că trebuie să luăm termenul masic în serios, dar diagonalizarea sa aruncă o lumină nouă atât asupra lagrangeianului

(1.32) şi a dinamicii particulelor din cele n familii, cât şi asupra noţiunii, cu mult mai profunde, de simetrie unitară globală. Desigur, grupul $SU(2)$, de exemplu, a fost discutat pe larg în primul capitol, ceea ce ne interesează, în cazul de faţă, fiind cum anume forma generalizată (1.32) a "densităţii de lagrangeian" (1.12) conduce la introducerea acestor grupuri de tip $SU(n)$. Privind proprietăţile valorilor proprii $\{m_\alpha^2\}_{\alpha=\overline{1,n}}$ ale matricei M, avem două situaţii limită. Prima, când toate valorile proprii au multiplicitatea 1, deci sunt nedegenerate. A doua, când există o singură valoare proprie m^2, de multiplicitate n. În primul caz, după diagonalizare, lagrangeianul (1.32) se reduce la suma a n lagrangeieni de tipul (1.12), adică

$$\text{a)}\quad \mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathcal{L}_\alpha$$

$$\text{b)}\quad \mathcal{L}_\alpha = \eta^{ik}\phi^*_{\alpha,i}\phi^\alpha{}_{,k} + m_\alpha^2 |\phi^\alpha|^2 \,, \tag{1.33}$$

evident fără sumare după α în $\mathcal{L}_\alpha$. Reprezentanţii familiilor au toţi mase diferite, cele n familii nu interacţionează între ele şi orice simetrie unitară $SU(N)$, cu $N \geq 2$, este ruptă. Singura simetrie exactă este $U(1)$, asigurând conservarea sarcinii electrice în sistem. Într-adevăr, toate ecuaţiile Gordon

$$\left(\Box - m_\alpha^2\right)\phi^\alpha = 0 \tag{1.34}$$

(fără sumare după α) sunt decuplate (în ecuaţia pentru ϕ^α, nu avem termeni cu ϕ^β, $\beta \neq \alpha$) şi singura transformare unitară (a tuturor componentelor vectorului $\Phi \in \mathbb{C}^n$) faţă de care $\mathcal{L}$ este un invariant absolut (deci păstrează exact aceeaşi formă) este transformarea de fază $e^{i\chi}$, cu $\chi \in \mathbb{R}$ oarecare. În al doilea caz limită, când

$$M = m^2 1 \,, \tag{1.35}$$

1 reprezentând matricea unitate $n \times n$, lagrangeianul (1.32) devine

$$\mathcal{L}[\Phi^\dagger, \Phi] = \eta^{ik}\Phi^\dagger{}_{,i}\,\Phi_{,k} + m^2\,\Phi^\dagger\Phi \,, \tag{1.36}$$

având exact forma (1.12), dar pentru "întregul obiect" Φ din $\mathbf{C}^n$. De această dată, oricare ar fi matricea unitară $U_{n\times n}$, lagrangeianul este absolut invariant faţă de transformările

$$\Phi \to U\Phi \ , \ \Phi^\dagger \to \Phi^\dagger U^\dagger \ , \tag{1.37}$$

deoarece, în ambii membri ai săi, obţinem $U^\dagger U = 1$. Dacă cerem, în plus, ca $\det U = +1$, spunem că avem o simetrie $SU(n)$ exactă, reprezentarea în $\mathbf{C}^n$ a acţiunii lui $SU(n)$ fiind cea fundamentală. Ca interpretare, simetria fiind exactă, cele n familii iniţiale sunt, de fapt, una singură, toţi membrii ei având aceeaşi masă de repaus, dar aflându-se în stări diferite, indexate de diversele valori ale numerelor cuantice specifice simetriei interne globale ce îi caracterizează. Apare astfel noţiunea de multiplet, acompaniată de proprietatea că toţi membrii acestuia trebuie să posede aceeaşi masă. În (1.37), Φ se transformă ca un vector, desemnând un "n-plet" faţă de $SU(n)$. Aceasta nu este însă singura posibilitate. De exemplu, pentru orice grup $SU(N)$, având dimensiunea N^2-1, putem alege $n = N^2-1$, astfel încât să avem un multiplet faţă de $SU(N)$, în reprezentare autoadjunctă (când dimensiunea spaţiului liniar de reprezentare coincide cu dimensiunea grupului). De asemenea, putem considera o simetrie exactă $SU(2)$ în reprezentarea ireductibilă de ordin $T = \frac{n-1}{2}$, cu $\{T^2, T_3\}$ diagonalizaţi. Dacă n este impar, Φ se va transforma faţă de $SU(2)$ ca un izotensor, iar dacă este par, ca un izospin-tensor. Dintre toate aceste posibilităţi, vom alege, pentru a continua calculele în mod detaliat, cazul grupului $SU(2)$, cu $n = 3$, adică $T = 1$. Avem, aşadar, un triplet de particule scalare descrise de izovectorul Φ, cu trei componente complexe, ϕ^α. Lagrangeianul are forma (1.36), conducând la ecuaţia Gordon

$$\left(\Box - m^2\right)\Phi = 0 \, . \tag{1.38}$$

BCU IASI

A. Setul complet al modurilor de frecvenţă ortonormale şi forma soluţiei generale

Pentru $T = 1$, cu $\{T^2, T_3\}$ diagonali, avem simplu

$$T^2 = 2\,\mathrm{diag}[1, 1, 1]\,, \quad T_3 = \mathrm{diag}[1, 0, -1] \tag{1.39}$$

şi alegem baza u ca fiind formată din cei trei vectori proprii (unicoloană) $\left\{u_\alpha = \left(\delta_\alpha^\beta\right)\right\}_{\alpha,\beta=\overline{1,3}}$ ai operatorului T_3, corespunzători valorilor proprii $(m_T^\alpha) = (1, 0, -1)$. Înlocuind

$$\Phi(x) = \phi^\alpha(x)\, u_\alpha \tag{1.40}$$

în ecuaţia (1.38), obţinem imediat cele trei "imagini scalare" ale sale

$$\left(\Box - m^2\right)\phi^\alpha = 0\,, \tag{1.41}$$

pe care le vom integra, reprezentând componentele $\phi^\alpha(x)$ prin integrala Fourier

$$\phi^\alpha(x) = \int d^4p\, \varphi^\alpha(p) e^{ipx}\,, \tag{1.42}$$

cu $px = \eta_{ik}p^ip^k = p_ix^i$ şi $(p^i) = (\vec{p}, E) \in \mathbb{R}^4$. Cum

$$\left(\Box - m^2\right) e^{ipx} = -\left(p^2 + m^2\right) e^{ipx}\,, \quad \text{cu } p^2 = \eta_{ik}p^ip^k = |\vec{p}|^2 - E^2\,, \tag{1.43}$$

ecuaţia (1.41) devine

$$\int d^3p\, dE\, \left(p^2 + m^2\right) \varphi^\alpha(p) e^{ipx} = 0 \tag{1.44}$$

şi nu poate fi satisfăcută peste tot în M_4, decât dacă $\varphi^\alpha(p)$ se comportă ca o funcţie $\delta(p^2 + m^2)$, deoarece, după cum se ştie din teoria distribuţiilor,

$$x\,\delta(x) \equiv 0\,. \tag{1.45}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cu 4-vectorul p, de componente $(\vec{p}, E)$, argumentul funcţiei δ se scrie

$$p^2 + m^2 = -\left[E^2 - \left(|\vec{p}|^2 + m^2\right)\right] = -\left(E^2 - E_p^2\right), \tag{1.46}$$

cu

$$E_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}\,,\ E_p \in \mathbf{R}_+ \tag{1.47}$$

şi, cum δ este o funcţie pară, vom avea

$$\varphi^\alpha(p) \sim \delta\left(E^2 - E_p^2\right). \tag{1.48}$$

Din proprietatea

$$\delta\left(E^2 - E_p^2\right) = \frac{1}{2E_p}\left[\delta\left(E - E_p\right) + \delta\left(E + E_p\right)\right] \tag{1.49}$$

şi caracterul liniar al ecuaţiei (1.44), rezultă soluţia

$$\varphi^\alpha(p) = \varphi_+^\alpha(\vec{p}, E_p)\,\delta\left(E - E_p\right) + \varphi_-^\alpha(\vec{p}, -E_p)\,\delta\left(E + E_p\right), \tag{1.50}$$

numitorul $2E_p$ fiind inclus în cele două funcţii complexe $\varphi_\pm^\alpha(\vec{p}, \pm E_p)$ definite pe $\mathbf{R}^3$. Înlocuind (1.50) în (1.42), obţinem

$$\begin{aligned}\phi^\alpha(x) &= \int d^3p\,dE\,\delta\left(E - E_p\right)\varphi_+^\alpha(\vec{p}, E_p)\,e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)} + \\ &+ \int d^3p\,dE\,\delta\left(E + E_p\right)\varphi_-^\alpha(\vec{p}, -E_p)\,e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}\end{aligned}$$

adică, integrând după E,

$$\phi^\alpha(x) = \int d^3p\left[\varphi_+^\alpha(\vec{p}, E_p)\,e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - E_p t)} + \varphi_-^\alpha(\vec{p}, -E_p)\,e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} + E_p t)}\right]. \tag{1.51}$$

Argumentul primei exponenţialei este "normal", faza $\vec{p}\cdot\vec{x} - E_p t$ fiind chiar cea a undei plane asociate unei microparticule de 4-impuls $p = (\vec{p}, E_p)$. Se spune atunci că e^{ipx} reprezintă un *mod de frecvenţă*

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

pozitivă. A doua exponenţială, însă, nu are analog în Mecanica Cuantică nerelativistă, aşa cum, de altfel, am mai discutat, deoarece corespunde undei plane asociate unei microparticule de impuls $\vec{p}$ şi energie $-E_p$. Vom spune, în consecinţă, că ea reprezintă un *mod de frecvenţă negativă.* De aici şi indicii celor două amplitudini, $\varphi^{\alpha}_{\pm}(\vec{p}, \pm E_p)$. Dacă intenţia noastră ar fi fost să oferim o prezentare axiomatică a subiectului, am fi trecut acum mai departe fără nici un fel de alte comentarii. Dar, atât cititorul aflat la început de drum în acest domeniu, cât şi fizicienii mai avansaţi, credem noi că nu se pot abţine să nu se întrebe "ce înseamnă, totuşi, un mod de frecvenţă negativă ?" Punându-şi foarte serios această întrebare, Richard Feynman, laureat Nobel, i-a găsit răspunsul şi a revoluţionat întregul mod de gândire a cuanticii relativiste, aducând Teoria Cuantică a Câmpurilor, prin formalismul şi sistemul regulilor de interpretare pe care le-a introdus, la forma ei actuală, de cea mai bună teorie a proceselor din microcosmos. Fără a apela la cea de "a doua cuantificare" nu putem reproduce integral răspunsul dat de Feynman, ci doar esenţa sa. În convenţia de semn al energiei utilizată în Mecanica Cuantică, faza $\vec{p}\cdot\vec{x} - E_p t$ devine cea a unei unde progresive pe axa oz, de îndată ce alegem $\vec{p}/|\vec{p}|$ ca versor al acestei axe. Unda cu $-\vec{p}$ este clar regresivă. Faza acesteia, $-(\vec{p}\cdot\vec{x} + E_p t)$, seamnănă foarte bine cu cea a modului de frecvenţă negativă, $\vec{p}\cdot\vec{x} + E_p t$, astfel încât, dacă am crede că semnul "–" nu are importanţă deoarece "în definitiv, fronturile de undă la momentul t sunt definite de $\vec{p}\cdot\vec{x} + E_p t = const.$ aparţinând lui R şi nu numai lui R_+ sau R_-", am spune că am găsit răspunsul, modurile de frecvenţă negativă corespunzând undelor regresive. Dacă, totuşi, ne îngrijorează diferenţa de semn şi vrem să "scăpăm" de ea, dar într-un mod onorabil (nu printr-o simplă omisiune), atunci trebuie ca în faza undei regresive să-l trecem pe $\vec{x}$ în $-\vec{x}$ şi pe t în $-t$, obţinând "curat" faza modului de frecvenţă negativă. Dar, în ceea ce priveşte termenul $\vec{p}\cdot\vec{x}$ din faza modului de frecvenţă pozitivă, transformările efectuate asupra sa, $\vec{p}\to -\vec{p}$ şi $\vec{x}\to -\vec{x}$, s-au compensat exact, rămânând, global, cu o sin-

gură transformare esenţială, şi anume "inversiunea temporală". Prin urmare, modurile de frecvenţă nu sunt atât de legate de caracterul progresiv sau regresiv al undei, pe cât sunt de felul în care energia este "transportată în timp". Cu aceasta, ne-am apropiat de esenţa răspunsului dat de Feynman [1]: modurile de frecvenţă negativă sunt asociate transportului de energie negativă în trecut. Până aici, cum spuneam, nu am aplicat a doua cuantificare. Nu o vom face nici acum, lăsând-o pentru paragrafele următoare. Totuşi, fie şi numai pentru ca nu cumva vreun pasionat de literatură *SF* să-şi facă vise zadarnice, dorim să adăugăm şi a doua parte a răspunsului. Din tot ce se cunoaşte ca fapt ştiinţific, la nivelul actual al Fizicii, cauzalitatea nu poate fi violată de nici o configuraţie fermiono-bozonică realizabilă sau existentă în universul observabil, deci cu atât mai puţin ar putea fi încălcată de colective simple de particule libere. De fapt, nu există un transport de energie negativă în trecut. El doar modelează transportul ortocron al *antiparticulelor* de energie pozitivă. Vom reveni pe larg asupra acestei echivalenţe formulate de Feynman, dat fiind rolul ei fundamental în înţelegerea câmpurilor cuantice. Să ne întoarcem la forma (1.51) a soluţiei $\phi^{\alpha}(x)$ şi să ne punem următoarea întrebare: "poate ea descrie particulele neutre electric?" Dacă ne amintim principalul rezultat al proprietăţii de invarianţă $U(1)$ a lagrangeianului unui câmp Ψ, anume densitatea

$$j^i = i\left[\pi^{\dagger i}\Psi - \Psi^{\dagger}\pi^i\right]$$

a 4-curentului electric, atunci constatăm imediat că sarcina electrică

$$Q = i\int\left[\pi^{\dagger 4}\Psi - \Psi^{\dagger}\pi^4\right]d^3x$$

a oricărui câmp real (în sensul apartenenţei la R a tuturor componentelor sale) este nulă. Prin urmare, vom putea răspunde afirmativ întrebării puse, dacă

$$\phi^{*\alpha} = \phi^{\alpha}(x)\,.$$

Observăm însă că formele $\exp[i(\vec{p}\cdot\vec{x}-E_pt)]$, $\exp[i(\vec{p}\cdot\vec{x}+E_pt)]$, considerate până acum pentru cele două moduri de frecvenţă, nu se comportă reciproc într-o manieră bine definită, sub acţiunea conjugării complexe, deoarece nu trec una în cealaltă. În locul lor, obţinem alte două forme diferite, $\exp[-i(\vec{p}\cdot\vec{x}-E_pt)]$, $\exp[-i(\vec{p}\cdot\vec{x}+E_pt)]$, corespunzătoare unei perechi de particule de impuls $-\vec{p}$ şi energie $\mp E_p$. Operând în expresia sarcinii Q transformarea de conjugare hermitică a variabilelor canonice ale sistemului, adică

$$\pi^\dagger\,,\ \Psi \leftrightarrow \pi\,,\ \Psi^\dagger\,,$$

fără a conjuga hermitic sarcina Q, obţinem imediat $Q \to -Q$. În particular şi în cazul de conjugare complexă (a variabilelor sistemului) vom ajunge la acelaşi rezultat şi anume schimbarea semnului sarcinii sale electrice, transformarea fiind denumită, din acest motiv, "conjugare de sarcină". După cum se poate remarca, definirea acestei noţiuni este perfect posibilă, fără nici o referire la impulsul $\vec{p}$, şi cu atât mai puţin la transformarea $\vec{p} \to -\vec{p}$. De ce să avem nevoie de reflexia impulsului în lămurirea comportării modurilor (de frecvenţă) sub acţiunea conjugării de sarcină? Fiind siguri că forma modurilor de frecvenţă pozitivă este corectă, fiind fundamentală în toată Mecanica Cuantică, este clar că ceva nu este în regulă cu cea a modurilor de frecvenţă negativă. Dar, din răspunsul lui Feynman, ştim că nu semnul energiei în faza $\vec{p}\cdot\vec{x}+E_pt$ este cel în neregulă. Devine evident că nu poate fi decât cel al impulsului. Se vede clar acum că, dacă în partea de frecvenţe negative

$$\phi^\alpha_{(-)}(x) = \int d^3p\,\varphi^\alpha_-(\vec{p},-E_p)e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}+E_pt)} \tag{1.52}$$

a câmpului $\phi^\alpha(x)$ dat de (1.51), soluţie a ecuaţiei de propagare (1.41), facem de la bun început substituţia $\vec{p} \to -\vec{p}$, pur şi simplu ca o schimbare de variabilă ce nu afectează rezultatul integralei, obţinem

$$\phi^\alpha_-(x) = \int d^3p\,\varphi^\alpha_-(-\vec{p},-E_p)e^{-ipx}\,, \tag{1.53}$$

adică forma corectă, e^{-ipx}, a modurilor de frecvenţă negativă, care trece într-adevăr, sub acţiunea conjugării de sarcină, în forma modurilor de frecvenţă pozitivă, e^{ipx}. Aceste consideraţii explică un fapt remarcabil în imensitatea Meta Galaxiei, particula şi antiparticula vor avea întotdeauna, împreună, sarcina dipolului... adică zero.

Deoarece argumentele funcţiilor de amplitudine $\varphi^{\alpha}_{\pm}$ sunt complet specificate de 3-vectorul impuls $\vec{p}$, este suficient să le scriem ca $\varphi^{\alpha}_{\pm}(\vec{p})$ astfel încât, din (1.53) şi (1.51), obţinem forma

$$\phi^{\alpha}(x) = \int d^3p \left[\varphi^{\alpha}_{+}(\vec{p})e^{ipx} + \varphi^{\alpha}_{-}(\vec{p})e^{-ipx}\right] \tag{1.54}$$

a câmpului ϕ^{α}, soluţie generală a ecuaţiei Gordon (1.41). Cum pentru conjugata complexă avem

$$\phi^{*\alpha}(x) = \int d^3p \left[\varphi^{*\alpha}_{-}(\vec{p})e^{ipx} + \varphi^{*\alpha}_{+}(\vec{p})e^{-ipx}\right], \tag{1.55}$$

condiţia de câmp real, dacă trebuie să fie satisfăcută (adică dacă, în - tr-adevăr, sarcina câmpului este nulă), conduce imediat la proprietatea

$$\varphi^{\alpha}_{-}(\vec{p}) = \varphi^{*\alpha}_{+}(\vec{p}) \tag{1.56}$$

a celor două amplitudini. De aici rezultă şi un alt aspect, anume acela că, o dată ce modurile de frecvenţă sunt corect definite (până la o constantă de normare $\mathcal{N}_{\vec{p}}$ de care ne vom ocupa în cele ce urmează), specificarea indicilor $(\pm)$ ai amplitudinilor devine inutilă, pentru câmpul real fiind suficient să scriem

$$\phi^{\alpha}(x) = \int d^3p \left[\varphi^{\alpha}(\vec{p})e^{ipx} + \varphi^{*\alpha}(\vec{p})e^{-ipx}\right], \tag{1.57}$$

iar pentru un câmp complex vom nota pur şi simplu diferit cele două amplitudini. Înainte de aceasta, însă, trebuie să rezolvăm problema definirii setului complet ortonormal al modurilor de frecvenţă, deoarece, dacă dorim să formulăm o interpretare de tip cuantic a rezultatelor,

chiar şi în cazul descrierii uniparticulă, atunci trebuie să stabilim o analogie, în sensul analizei funcţionale pe spaţii Hilbert, între modurile e^{ipx} şi baza ortonormală de vectori $|\vec{p}\rangle$ a spaţiului Hilbert (uniparticulă). Deoarece masa de repaus se presupune cunoscută, $|\vec{p}|^2$ va determina complet valoarea E_p a energiei, astfel încât este suficient să ne referim la starea $|\vec{p}\rangle$, în locul notării ei cu $|p\rangle$. Din teoria cuantică nerelativistă a particulei libere, ştim că există izomorfismul

$$|\vec{p}\rangle \sim w_{\vec{p}}(\vec{x}) \Leftrightarrow \langle\vec{p}| \sim w^*_{\vec{p}}(\vec{x}) , \text{ cu } w_{\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{(2\pi)^{3/2}} , \tag{1.58}$$

astfel încât

$$\langle\vec{p}'|\vec{p}\rangle = \delta(\vec{p}' - \vec{p}) := \int d^3x\, w^*_{\vec{p}'}(\vec{x}) w_{\vec{p}}(\vec{x}) . \tag{1.59}$$

Ceea ce "deranjează" în această dublă egalitate, din punctul de vedere al Relativităţii Speciale, este forma pregnant euclidiană a integralei ce defineşte produsul scalar. Dar de primul rezultat avem nevoie deoarece impulsul $\vec{p}$, determinând complet modul e^{ipx}, este natural ca prin asocierea $e^{-ip'x} \sim \langle\vec{p}'|$, $e^{ipx} \sim |\vec{p}\rangle$ să obţinem (pentru produsul scalar) $\delta(\vec{p}' - \vec{p})$. O relaţie de definiţie manifest Lorentz-invariantă de forma

$$\langle p'|p\rangle = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{-ip'x} e^{ipx} = \delta(\vec{p}' - \vec{p})\delta(E' - E)$$

nu este posibilă, deoarece modurile e^{ipx} sunt *on-shell* adică, în traducere, pe hipersuprafaţa soluţiei în spaţiul 4-impulsurilor:

$$p^2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2 .$$

Este suficient să avem $\vec{p}' = \vec{p}$ pentru ca $E' = E_{p'} = E_p = E$! Prin urmare, avem nevoie, în cazul relativist, de o altă relaţie de definiţie a produsului scalar, care să înglobeze integrala euclidiană a modurilor $w^*_{\vec{p}'}(\vec{x})$, $w_{\vec{p}}(\vec{x})$, fiindcă numai din aceasta putem obţine $\delta(\vec{p}' - \vec{p})$, dar

să şi provină dintr-o expresie Lorentz-invariantă. Scăzând membru cu membru ecuaţiile

$$\begin{aligned} e^{-ip'x}\left(\Box e^{ipx}\right) &= m^2\, e^{-i(p'-p)x} \\ \left(\Box e^{-ip'x}\right) e^{ipx} &= m^2\, e^{-i(p'-p)x}\,, \end{aligned}$$

luând integrala rezultatului pe un domeniu D din M_4 şi aplicând teorema Green-Gauss-Ostrogradski, obţinem

$$\oint_{\partial \mathrm{D}} \eta^{ik}\left[e^{-ip'x}\left(\partial_k e^{ipx}\right) - \left(\partial_k e^{-ip'x}\right) e^{ipx}\right] dS_i = 0\,. \tag{1.60}$$

Acest rezultat este deosebit de important, deoarece integrala considerată nu numai că este un scalar absolut (în sensul constanţei formei şi valorii) faţă de grupul Lorentz, dar este invariantă şi la deformările continue ale frontierei ∂D. Putem lua atunci, ca domeniu D, produsul direct al bilei $B_R^3 = \{(x^\mu) \mid \delta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \leq R^2\}$ cu intervalul temporal compact $[t_-\,,\, t_+] \subset \mathrm{R}$, adică $\mathrm{D} = B_R^3 \times [t_-\,,\, t_+]$, astfel încât frontiera va fi dată de $B_R^3(\mathrm{la}\, t_-) \cup S_R^2 \times [t_-\,,\, t_+] \cup B_R^3(\mathrm{la}\, t_+) = \partial\mathrm{D}$. Pe fiecare din cele două "capace" B_R^3, normala exterioară (la D) este $n_- = -\frac{\partial}{\partial t}$, la $t = t_-$ şi, respectiv, $n_+ = \frac{\partial}{\partial t}$, la $t = t_+$. În consecinţă, elementele orientate de suprafaţă vor fi

$$\begin{aligned} dS_4 &= I_{\pm\partial_4}\, d\Omega = I_{\pm\partial_4}\left[\frac{1}{4!}\,\varepsilon_{ijkl} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l\right] = \\ &= \pm\langle dt\,,\, \frac{\partial}{\partial t}\rangle\, d^3x = \pm d^3x\,, \end{aligned} \tag{1.61}$$

unde prin I am notat aşa-numitul *produs interior* al covolumului $dt \wedge d^3x$ (deci $\varepsilon_{1234} = -1$) pe vectorii $\pm\frac{\partial}{\partial t}$ [29]. Într-o primă etapă de explicitare,

BCU "ASE" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

relaţia (1.60) devine

$$+ \int_{B^3_R} \left[e^{-ip'x} \left(\partial_4 e^{ipx} \right) - \left(\partial_4 e^{-ip'x} \right) e^{ipx} \right]_{t=t_-} d^3x +$$
$$+ \int_{S^2_R \times [t_-, t_+]} \eta^{ik} \left[e^{-ip'x} \left(\partial_k e^{ipx} \right) - \left(\partial_k e^{-ip'x} \right) e^{ipx} \right] dS_i -$$
$$- \int_{B^3_R} \left[e^{-ip'x} \left(\partial_4 e^{ipx} \right) - \left(\partial_4 e^{-ip'x} \right) e^{ipx} \right]_{t=t_+} d^3x = 0 \qquad (1.62)$$

indicându-ne deja cum anume putem defini produsul scalar al modurilor de frecvenţă în cazul relativist. Dacă, pentru $R \to \infty$, a doua integrală se anulează, atunci cele două integrale pe $B^3_{R\to\infty} = \mathrm{R}^3$ devin egale şi, cum momentele $t_\pm$ sunt arbitrare, rezultă constanţa în timp a integralei

$$\mathcal{S}\left(e^{ip'x}, e^{ipx}\right) = \int_{\mathrm{R}^3} \left[e^{-ip'x} \left(\partial_4 e^{ipx} \right) - \left(\partial_4 e^{-ip'x} \right) e^{ipx} \right] d^3x \,. \qquad (1.63)$$

Deoarece

$$\begin{aligned} e^{ipx} &= (2\pi)^{3/2} w_{\vec{p}}(\vec{x}) e^{-iE_p t} \\ e^{-ip'x} &= (2\pi)^{3/2} w^*_{\vec{p}'}(\vec{x}) e^{iE_{p'} t} \,, \end{aligned} \qquad (1.64)$$

$\mathcal{S}\left(e^{ip'x}, e^{ipx}\right)$ va conţine ca element central $\int d^3x\, w^*_{\vec{p}'}(\vec{x}) w_{\vec{p}}(\vec{x})$, adică exact ceea ce ne trebuie pentru obţinerea funcţionalei Dirac $\delta(\vec{p}' - \vec{p})$. Să arătăm că, într-adevăr, integrala pe $S^2_{R\to\infty} \times [t_-, t_+]$ este zero. În coordonate sferice (r, θ, φ), 4-forma volumului minkovskian se scrie $dt \wedge dr \wedge r d\theta \wedge r \sin\theta d\varphi = r^2 \sin\theta\, dt \wedge dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$ şi, cum normala exterioară este reprezentată de versorul radial $\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}$, rezultă elementul de suprafaţă orientată, (2+1)-dimensională,

$$dS_r = I_{\partial_r} d\Omega = -R^2 \sin\theta\, dt \wedge d\theta \wedge d\varphi \,.$$

Deoarece ne aşteptăm la o valoare nulă a integralei, orientarea lui dS_r nu este importantă, astfel încât vom scrie simplu

$$dS_r = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dt \,. \qquad (1.65)$$

Cu acestea, avem

$$\int_{S^2_R\times[t_-,t_+]} \eta^{ik}\left[e^{-ip'x}\left(\partial_k e^{ipx}\right) - \left(\partial_k e^{-ip'x}\right)e^{ipx}\right] dS_i =$$
$$= R^2\int_{t_-}^{t_+}\int_{S^2}\left\{\frac{\partial x^\mu}{\partial r}\left[e^{-ip'x}(\partial_\mu e^{ipx}) -\right.\right.$$
$$\left.\left. - (\partial_\mu e^{-ip'x})e^{ipx}\right]\right\}_{r=R}\sin\theta d\theta d\varphi dt =$$
$$= R^2\int_{t_-}^{t_+} e^{i(E_{p'}-E_p)t}dt[i(p_\mu+p'_\mu)]$$
$$\int_{S^2}\left\{\frac{\partial x^\mu}{\partial r}e^{-i(\vec{p}\,'-\vec{p})\cdot\vec{x}}\right\}_{r=R}\sin\theta d\theta d\varphi =$$
$$= R^2\omega^{-1}_{p'p}\left(e^{i\omega_{p'p}t_+} - e^{i\omega_{p'p}t_-}\right)s_\mu$$
$$\int_{S^2}\left\{\frac{\partial x^\mu}{\partial r}e^{-iq_\nu x^\nu}\right\}_{r=R}\sin\theta d\theta d\varphi\,, \tag{1.66}$$

unde, pentru simplificarea scrierii, am introdus notaţiile

$$\omega_{p'p} = E_{p'} - E_p\,,\ s_\mu = p'_\mu + p_\mu\,,\ q_\mu = p'_\mu - p_\mu\,. \tag{1.67}$$

Pentru $\vec{p}\,' = \vec{p}$, deci $\vec{q} = 0$, avem

$$\frac{e^{i\omega_{p'p}t_+} - e^{i\omega_{p'p}t_-}}{\omega_{p'p}} = i(t_+ - t_-)\,, \tag{1.68}$$

iar

$$\int_{S^2}\left\{\frac{\partial x^\mu}{\partial r}e^{-iq_\nu x^\nu}\right\}_{r=R}\sin\theta\, d\theta d\varphi = \int_{S^2}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial r}\right)_{r=R}\sin\theta\, d\theta d\varphi \equiv 0\,, \tag{1.69}$$

deci integrala se anulează oricare ar fi $|t_+ - t_-| < \infty$.

Pentru $\vec{q} \neq 0$, să ne concentrăm asupra integralei pe S^2,

$$I^\mu_R(\vec{q}) = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial r}e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\right]_{r=R}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \tag{1.70}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deoarece

$$\left(\frac{\partial x^1}{\partial r}\right)_{r=R} = \sin\theta\cos\varphi$$
$$\left(\frac{\partial x^2}{\partial r}\right)_{r=R} = \sin\theta\sin\varphi$$
$$(\vec{q}\cdot\vec{x})_{r=R} = R\sin\theta\,(q_1\cos\varphi + q_2\sin\varphi) + q_3 R\cos\theta\,, \quad (1.71)$$

integralele $I^1_R(\vec{q})$ şi $I^2_R(\vec{q})$ se anulează în virtutea periodicităţii 2π a variabilei azimutale φ, ceea ce se observă imediat, alegând direcţia vectorului $\vec{q}$ ca axă oz (când $q_1 = q_2 = 0$, $q_3 = |\vec{p}' - \vec{p}|$). Prin urmare, singura integrală posibil diferită de zero rămâne

$$I^3_R(\vec{q}) = 2\pi\int_0^\pi \sin\theta\cos\theta\, e^{-iq_3R\cos\theta}d\theta = 2\pi\int_{-1}^1 \xi e^{-iq_3R\xi}d\xi\,,$$

adică

$$I^3_R(\vec{q}) = \frac{4\pi i}{R^2}\left[R\frac{\cos(q_3R)}{q_3} - \frac{\sin(q_3R)}{q_3^2}\right] = \frac{4\pi i}{R^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_3}\left(\frac{\sin(q_3R)}{q_3}\right), \quad (1.72)$$

ceea ce conduce la

$$\int_{S^2_R\times[t_-,t_+]}\eta^{ik}\left[e^{-ip'x}\left(\partial_k e^{ipx}\right) - \left(\partial_k e^{-ip'x}\right)e^{ipx}\right]dS_i =$$
$$= 4i\pi^2\frac{s_3}{\omega_{p'p}}\left(e^{i\omega_{p'p}t_+} - e^{i\omega_{p'p}t_-}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_3}\left(\frac{\sin(q_3R)}{q_3}\right). \quad (1.73)$$

Dat fiind că, în sensul teoriei distribuţiilor,

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_3}\frac{\sin(q_3R)}{q_3} = \delta'(q_3) = -\frac{\delta(q_3)}{q_3}\,, \quad (1.74)$$

iar $q_3 \neq 0$ (celălalt caz, $q_3 = 0$, fiind deja analizat), obţinem rezultatul scontat,

$$\int_{S^2_\infty\times\mathbf{R}}\eta^{ik}\left[e^{-ip'x}\left(\partial_k e^{ipx}\right) - \left(\partial_k e^{-ip'x}\right)e^{ipx}\right]dS_i = 0\,, \quad (1.75)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

pe care ne-am bazat în definirea integralei (1.63) şi a invarianţei ei temporale. Revenind la aceasta, prin înlocuirea în (1.63) a relaţiilor (1.64), obţinem

$$\mathcal{S}\left(e^{ip'x}, e^{ipx}\right) = i[(2\pi)^3 2E_p]\,\delta(\vec{p}' - \vec{p})\,, \tag{1.76}$$

adică aplicaţia biliniară $(.,.) = -i\mathcal{S}(.,.)$ defineşte produsul scalar pe $\mathcal{F}(M_4; \mathbf{C})$ prin relaţia

$$(f,g) = -i\mathcal{S}(f,g) = -i\int d^3x\,[f^* g_{,4} - f^*{}_{,4}\, g]\,, \tag{1.77}$$

iar modurile ortonormale de frecvenţă pozitivă, respectiv negativă, au forma concretă

$$\begin{aligned} f_{\vec{p}}(x) &= \frac{e^{ipx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \\ f^*_{\vec{p}}(x) &= \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \end{aligned} \tag{1.78}$$

şi, evident, proprietatea fundamentală

$$(f_{\vec{p}'}(x), f_{\vec{p}}(x)) = \delta(\vec{p}' - \vec{p})\,. \tag{1.79}$$

Din suita de relaţii (1.78), (1.55), (1.54), (1.40), (1.21) şi (1.17) rezultă expresiile

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \Phi(x) = \int d^3p\,\left[a^\alpha(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) + b^{*\alpha}(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x)\right] u_\alpha \\ &\text{b)}\quad \Phi^\dagger(x) = \int d^3p\,\left[b_\alpha(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) + a^*_\alpha(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x)\right] v^\alpha \end{aligned} \tag{1.80}$$

ale câmpurilor Φ, $\Phi^\dagger : M_4 \to \mathbf{C}^n$, ca soluţii generale ale ecuaţiei Gordon pentru "n-pletul" de masă m.

Utilizând aceste rezultate, tensorul conservativ impuls-energie şi cuadrivectorii densităţilor de curent $U(1)$ şi de izospin, vom deduce, în continuare, impulsul, energia, sarcina şi izosarcina.

BCU / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

B. Impulsul, energia, sarcina şi izosarcina

Mai întâi, să prelucrăm puţin relaţia de definiţie (1.14) a tensorului conservativ impuls-energie, pentru a o aduce la o formă direct aplicabilă densităţii de lagrangeian (1.36) pe spaţiul Minkowski. După cum se cunoaşte din geometria pseudo-riemanniană, variaţia jacobianului $\sqrt{-g}$, în raport cu componentele contravariante ale tensorului metric fundamental, are expresia

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{ik}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{ik}\,, \tag{1.81}$$

astfel încât tensorul conservativ impuls-energie pentru câmpurile descrise de un lagrangeian $\mathcal{L}$ pe $(M_4\,,\,g)$ devine

$$T_{ik} = 2\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{ik}} - g_{ik}\mathcal{L}\,. \tag{1.82}$$

Dacă $\mathcal{L}$ este independent de derivatele tensorului metric, cum este cazul lagrangeianului (1.36), atunci

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{ik}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{ik}}\,, \tag{1.83}$$

adică derivata funcţională coincide cu cea parţială. Luând limita minkowskiană $g \to \eta$, rezultă formula

$$T_{ik} = 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{ik}} - \eta_{ik}\mathcal{L} \tag{1.84}$$

direct aplicabilă densităţii de lagrangeian

$$\mathcal{L}[\Phi^\dagger, \Phi] = \eta^{lm}\Phi^\dagger{}_{,l}\,\Phi_{,m} + m^2\,\Phi^\dagger\Phi \tag{1.85}$$

a câmpului $\Phi : M_4 \to \mathbf{C}^n$ (în general). Deoarece $\Phi^\dagger{}_{,l}\,\Phi_{,m}$, ca tensor pe M_4, nu este simetric, rezultatul derivării prin η^{ik} nu este $\Phi^\dagger{}_{,i}\,\Phi_{,k}$ ci

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^{ik}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta^{ik}}\left[\eta^{lm}\left(\Phi^\dagger{}_{,l}\,\Phi_{,m} + \Phi^\dagger{}_{,m}\,\Phi_{,l}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\Phi^\dagger{}_{,i}\,\Phi_{,k} + \Phi^\dagger{}_{,k}\,\Phi_{,i}\right]\,.\end{aligned} \tag{1.86}$$

Înlocuind în (1.84), obţinem forma concretă a tensorului (conservativ) impuls-energie

$$T_{ik}[\Phi^\dagger, \Phi] = \Phi^\dagger{}_{,i}\,\Phi_{,k} + \Phi^\dagger{}_{,k}\,\Phi_{,i} - \eta_{ik}\left[\eta^{lm}\,\Phi^\dagger{}_{,l}\,\Phi_{,m} + m^2\,\Phi^\dagger\Phi\right] . \tag{1.87}$$

În ceea ce priveşte cuadricurenţii conservativi ai câmpului, datoraţi unei simetrii unitare, cu algebra "subîntinsă" de generatorii X_a, amintim din Capitolul 1 formula

$$J^i_a = i\,\eta^{ik}\left[\Phi^\dagger{}_{,k}\,X_a\Phi - \Phi^\dagger X_a\Phi_{,k}\right], \tag{1.88}$$

unde $i = \overline{1,4}$, iar $a = \overline{1,\ dim[algebrei]}$. Avem acum toate elementele necesare explicitării mărimilor enunţate în titlul prezentului subparagraf.

Componentele 4-impulsului total al câmpului au, ca relaţie generală de definiţie, expresia

$$P^i = \int T^{ik}\,dS_k\,, \text{ cu } dS_k = I_{\partial_k} d\Omega\,. \tag{1.89}$$

În universul Minkowski, pe 3-suprafeţele de gen spaţial $\{t = const\}$, avem $dS_4 = d^3x$ (orientată ortocron), astfel încât obţinem

$$P^i = \int \eta^{il}\eta^{4m} T_{lm}\,d^3x \tag{1.90}$$

care se despică în continuare, din cauza formei diagonale a tensorului metric η, în expresia corespunzătoare componentelor 3-vectorului impuls,

$$P_\mu = -\int T_{\mu 4}\,d^3x\,, \tag{1.91}$$

şi în cea corespunzătoare energiei

$$H = \int T_{44}\,d^3x \tag{1.92}$$

BCU IASI / CENTRALA UNIVERSITARA

a câmpului. Cele n^2-1 "sarcini $SU(n)$" ale acestuia au expresia generică

$$Q_a = \int J_a^4 \, d^3x \, , \tag{1.93}$$

bineînţeles, tot în cazul geometriei Minkowski a spaţiu-timpului. Particularizând T_{ik} la forma din relaţia (1.87), obţinem pentru componentele (1.91) ale impulsului forma

$$P_\mu = -\int d^3x \left[\Phi^\dagger{}_{,\mu} \, \Phi_{,4} + \Phi^\dagger{}_{,4} \, \Phi_{,\mu} \right] . \tag{1.94}$$

Calculul derivatelor implicate este imediat, deoarece

$$f_{\vec{p},i}(x) = i p_i f_{\vec{p}}(x) \, , \; f^*_{\vec{p},i}(x) = -i p_i f^*_{\vec{p}}(x) \, , \text{ cu } (p_i) = (p_\mu \, , -E_p) \, , \tag{1.95}$$

şi deci

$$\begin{aligned}
\Phi^\dagger{}_{,\mu}(x) &= i \int d^3p \, p_\mu \left[b_\alpha(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) - a^*_\alpha(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x) \right] v^\alpha \\
\Phi_{,4}(x) &= -i \int d^3p \, E_p \left[a^\alpha(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) - b^{*\alpha}(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x) \right] u_\alpha \\
\Phi^\dagger{}_{,4}(x) &= -i \int d^3p \, E_p \left[b_\alpha(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) - a^*_\alpha(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x) \right] v^\alpha \\
\Phi_{,\mu}(x) &= i \int d^3p \, p_\mu \left[a^\alpha(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) - b^{*\alpha}(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x) \right] u_\alpha \, .
\end{aligned} \tag{1.96}$$

Dat fiind că

$$\Phi^\dagger{}_{,4} \, \Phi_{,\mu} = \left(\Phi^\dagger{}_{,\mu} \, \Phi_{,4} \right)^\dagger \, , \tag{1.97}$$

este suficient să ne concentrăm asupra integralei

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}P_\mu &= -\int d^3x \, d^3p' d^3p \, p'_\mu \, E_p \left[b_\alpha(\vec{p}') f_{\vec{p}'}(x) - a^*_\alpha(\vec{p}') f^*_{\vec{p}'}(x) \right] v^\alpha \\
&\quad u_\beta \left[a^\beta(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) - b^{*\beta}(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x) \right] = \\
&= -\int d^3x \, d^3p' d^3p \, p'_\mu \, E_p \left[b_\alpha(\vec{p}') f_{\vec{p}'}(x) - a^*_\alpha(\vec{p}') f^*_{\vec{p}'}(x) \right] \\
&\quad \left[a^\alpha(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) - b^{*\alpha}(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x) \right] ,
\end{aligned} \tag{1.98}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde am folosit proprietatea (1.18) a bazei din C^n. Pentru integralele pe R^3 avem (utilizând (1.78))

$$\int d^3x\, f_{\vec{p}'}(x) f_{\vec{p}}(x) = \left\{ \int d^3x\, f^*_{\vec{p}'}(x) f_{\vec{p}}(x) \right\}^* =$$

$$= \frac{\delta(\vec{p}'+\vec{p})}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\, e^{-i(E_{p'}+E_p)t} = \frac{e^{-2iE_pt}}{2E_p}\,\delta(\vec{p}'+\vec{p})$$

$$\int d^3x\, f_{\vec{p}'}(x) f^*_{\vec{p}}(x) = \int d^3x\, f^*_{\vec{p}'}(x) f_{\vec{p}}(x) =$$

$$= \frac{\delta(\vec{p}'-\vec{p})}{2\sqrt{E_{p'}E_p}} = \frac{1}{2E_p}\,\delta(\vec{p}'-\vec{p})\,, \tag{1.99}$$

astfel încât (1.98) devine

$$^{(1)}P_\mu = \frac{1}{2}\int d^3p\, p_\mu \left[a^*_\alpha(\vec{p})a^\alpha(\vec{p}) + b_\alpha(\vec{p})b^{*\alpha}(\vec{p})\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\int d^3p\, p_\mu \left[b_\alpha(-\vec{p})a^\alpha(\vec{p})\, e^{-2iE_pt} + a^*_\alpha(-\vec{p})b^{*\alpha}(\vec{p})\, e^{2iE_pt}\right], \tag{1.100}$$

oferind prin (1.97) şi expresia părţii $^{(2)}P_\mu = \left\{ ^{(1)}P_\mu \right\}^\dagger$ a impulsului (1.94), adică

$$^{(2)}P_\mu = \frac{1}{2}\int d^3p\, p_\mu \left[a^*_\alpha(\vec{p})a^\alpha(\vec{p}) + b^{*\alpha}(\vec{p})b_\alpha(\vec{p})\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\int d^3p\, p_\mu \left[b_\alpha(\vec{p})a^\alpha(-\vec{p})\, e^{-2iE_pt} + a^*_\alpha(\vec{p})b^{*\alpha}(-\vec{p})\, e^{2iE_pt}\right]. \tag{1.101}$$

Cititorul atent poate observa că, în obţinerea acestor relaţii, ca şi pentru cele ce vor urma în prezentul subparagraf, considerăm, în mod tacit, că amplitudinile a, b, a^*, b^* comută. Această proprietate nu va mai exista în formalismul celei de a doua cuantificări, deoarece câmpul şi amplitudinile sale în spaţiul impulsurilor devin operatori. Prin urmare, obţinerea formei observabilelor câmpului cuantificat va fi mai pretenţioasă, reclamând respectarea algebrei operatorilor a, $a^\dagger$, b, $b^\dagger$.

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Revenind la impulsul clasic

$$P_\mu = {}^{(1)}P_\mu + {}^{(2)}P_\mu = \int d^3p\, p_\mu \left[a^*_\alpha(\vec{p})a^\alpha(\vec{p}) + b^{*\alpha}(\vec{p})b_\alpha(\vec{p})\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\int d^3p\, p_\mu \left[b_\alpha(-\vec{p})a^\alpha(\vec{p}) + b_\alpha(\vec{p})a^\alpha(-\vec{p})\right] e^{-2iE_p t} +$$
$$+ \frac{1}{2}\int d^3p\, p_\mu \left[a^*_\alpha(-\vec{p})b^{*\alpha}(\vec{p}) + a^*_\alpha(\vec{p})b^{*\alpha}(-\vec{p})\right] e^{2iE_p t},$$

observăm că ultimele două integrale se anulează, având integranzi impari pe $\mathbf{R}^3$ (spaţiul impulsurilor). Rezultă, aşadar, pentru câmpul necuantificat, expresia impulsului acestuia

$$\vec{P} = \sum_{\alpha=1}^{3} \int \vec{p} \left[|a^\alpha(\vec{p})|^2 + |b_\alpha(\vec{p})|^2\right] d^3p\,, \qquad (1.102)$$

evidenţiind participarea fiecărei stări $a^\alpha(\vec{p})$ (de frecvenţă pozitivă) şi respectiv $b^{*\alpha}(\vec{p})$ (de frecvenţă negativă), a tripletului complex Φ, cu câte o cuantă de impuls $\vec{p}$. La nivelul primei cuantificări (când Φ este o funcţie de undă cu valori în $\mathbf{C}^3$, în exemplul ales de noi) nu avem posibilitatea să asociem câte o particulă (antiparticulă) fiecărei stări de izopsin $(m^\alpha_T) = (1, 0, -1)$, astfel încât trebuie să ne mulţumim cu următoarea interpretare: $|a^\alpha(\vec{p})|^2$ reprezintă densitatea de probabilitate, în spaţiul impulsurilor, de a găsi particula în starea de energie pozitivă, cu impulsul $\vec{p}$ şi proiecţia m^α_T a izospinului. În mod analog, $|b_\alpha(\vec{p})|^2$ corespunde probabilităţii de ocupare a stării de impuls $\vec{p}$, izopsin m^α_T şi energie $-E_p$. Evident, în aceste condiţii, $\vec{p}$ exprimă doar valoarea medie a impulsului uniparticulă.

Pentru a calcula energia H, dată de (1.92), avem din (1.87) şi (1.85),

$$T_{44} = 2\,\Phi^\dagger{}_{,4}\,\Phi_{,4} + \mathcal{L}[\Phi^\dagger, \Phi]\,. \qquad (1.103)$$

Să estimăm, mai întâi, integrala pe $\mathbf{R}^3$ a densităţii de lagrangeian. Utilizând forma (1.95) a derivatelor parţiale de ordinul I ale modurilor

de frecvenţă, scriem

$$\int d^3x\mathcal{L}[\Phi^\dagger,\Phi] = -\int d^3x d^3p' d^3p\,\eta^{ik}p'_i p_k$$
$$\left[b_\alpha(\vec{p}')f_{\vec{p}'}(x) - a^*_\alpha(\vec{p}')f^*_{\vec{p}'}(x)\right]v^\alpha$$
$$u_\beta\left[a^\beta(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) - b^{*\beta}(\vec{p})f^*_{\vec{p}}(x)\right] +$$
$$+m^2\int d^3x d^3p' d^3p\left[b_\alpha(\vec{p}')f_{\vec{p}'}(x) + a^*_\alpha(\vec{p}')f^*_{\vec{p}'}(x)\right]v^\alpha$$
$$u_\beta\left[a^\beta(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) + b^{*\beta}(\vec{p})f^*_{\vec{p}}(x)\right] =$$
$$= \int d^3x d^3p' d^3p\left(\eta^{ik}p'_i p_k + m^2\right)\left[b_\alpha(\vec{p}')b^{*\alpha}(\vec{p})f_{\vec{p}'}(x)f^*_{\vec{p}}(x) +\right.$$
$$\left.+a^*_\alpha(\vec{p}')a^\alpha(\vec{p})f^*_{\vec{p}'}(x)f_{\vec{p}}(x)\right] -$$
$$-\int d^3x d^3p' d^3p\left(\eta^{ik}p'_i p_k - m^2\right)\left[b_\alpha(\vec{p}')a^\alpha(\vec{p})f_{\vec{p}'}(x)f_{\vec{p}}(x) +\right.$$
$$\left.+a^*_\alpha(\vec{p}')b^{*\alpha}(\vec{p})f^*_{\vec{p}'}(x)f^*_{\vec{p}}(x)\right],$$

ceea ce revine, prin aplicarea rezultatelor (1.99), la forma simplă

$$\int d^3x\,\mathcal{L}[\Phi^\dagger,\Phi] = \int d^3p\,E_p\left[b_\alpha(-\vec{p})a^\alpha(\vec{p})e^{-2iE_pt} + a^*_\alpha(-\vec{p})b^{*\alpha}(\vec{p})e^{2iE_pt}\right], \tag{1.104}$$

deoarece integrala conţinând $\eta^{ik}p'_i p_k + m^2$ se anulează în virtutea condiţiei *on-shell* $p^2 + m^2 = 0$. Pentru integrala din $2\Phi^\dagger{}_{,4}\,\Phi_{,4}$ avem

$$2\int d^3x\,\Phi^\dagger{}_{,4}\,\Phi_{,4} = -2\int d^3x d^3p' d^3p\,E_{p'}E_p$$
$$\left[b_\alpha(\vec{p}')f_{\vec{p}'}(x) - a^*_\alpha(\vec{p}')f^*_{\vec{p}'}(x)\right]\left[a^\alpha(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) - b^{*\alpha}(\vec{p})f^*_{\vec{p}}(x)\right] =$$
$$= \int d^3p\,E_p\left[a^\alpha(\vec{p})a^*_\alpha(\vec{p}) + b_\alpha(\vec{p})b^{*\alpha}(\vec{p})\right] -$$
$$-\int d^3p\,E_p\left[b_\alpha(-\vec{p})a^\alpha(\vec{p})\,e^{-2iE_pt} + a^*_\alpha(-\vec{p})b^{*\alpha}(\vec{p})\,e^{2iE_pt}\right], \tag{1.105}$$

efectuând, ca în (1.99), integralele pe $\mathbb{R}^3$ ale produselor modurilor de frecvenţă şi filtrând apoi $\vec{p}'$ la $\pm\vec{p}$ prin funcţionala Dirac corespunză-

BCU ALEXANDRU IOAN CUZA UNIVERSITY LIBRARY

toare. Din (1.92) şi (1.103 – 105), obţinem expresia (clasică) a energiei câmpului

$$H = \sum_{\alpha=1}^{3} \int E_p \left[|a^\alpha(\vec{p})|^2 + |b_\alpha(\vec{p})|^2 \right] d^3p \,. \qquad (1.106)$$

Deşi, funcţional, este de acelaşi tip cu expresia impulsului, evidenţiind cuanta E_p , formula (1.106) dă interpretării uniparticulă "lovitura de graţie" :

> Dacă $|b|^2$ exprimă probabilitatea ca particula să se găsească într-o stare de energie negativă, $-E_p$, atunci cum este posibil ca ea să contribuie cu o cuantă $+E_p$, asigurând caracterul pozitiv definit al valorii medii H a energiei uniparticulă?

Este demn de semnalat următorul aspect. Probabilităţile negative, de care vorbeam cu mult înainte, atacau descrierea uniparticulă a proceselor cuantice relativiste din "exterior", adică dinspre bazele şi principiile Mecanicii Cuantice nerelativiste. Expresia (1.106) a energiei câmpului atacă imaginea uniparticulă din "interior", adică exact dinspre altarul sacrificiilor făcute pentru acceptarea ei... După ce am renunţat la caracterul pozitiv definit al normei unei stări cuantice, acceptând un spaţiu Hilbert "bântuit de fantome", după ce ne-am împăcat cu gândul existenţei unui "ocean de energie negativă", ca o lume paralelă, din care nu sunt posibile tranziţii înspre noi decât prin efect Klein, acum obţinem aşa, dintr-o dată, faptul că fără nici un fel de interacţiuni mediate de câmpuri extrem de puternice, *valoarea medie*

$$H_- = \int E_p |b(\vec{p})|^2 d^3p$$

a energiei unei particule ce se poate afla în stări de energie negativă este pozitivă! Este clar, din toate punctele de vedere, că extrapolarea naivă a reprezentărilor cuantice "ortodoxe" în microcosmosul relativist nu este posibilă, particulele libere de energie negativă fiind, de fapt, inexistente, în locul lor manifestându-se real antiparticulele, de energie

pozitivă, descrise, ca bază a evoluţiei lor spaţio-temporale, de modurile de frecvenţă negativă. În această etapă de expunere a subiectului, nu avem cum să spunem mai multe.

Referitor la estimare sarcinii, dat fiind că Φ este un izotriplet complex, aceasta va fi de două tipuri. Primul corespunde sarcinii $U(1)$

$$Q = i|e| \int d^3x \left[\Phi^\dagger \Phi_{,4} - \Phi^\dagger{}_{,4}\, \Phi\right] \tag{1.107}$$

a cărei conservare este asigurată de invarianţa $U(1)$ a teoriei.

Al doilea tip conţine trei sarcini

$$Q_\alpha = ig \int d^3x \left[\Phi^\dagger T_\alpha \Phi_{,4} - \Phi^\dagger{}_{,4}\, T_\alpha \Phi\right], \tag{1.108}$$

g fiind constanta de cuplaj $SU(2)$, corespunzătoare celor trei generatori ai grupului de simetrie internă $SU(2)$, faţă de care Φ este un (izo)vector. Utilizând relaţiile (1.80) şi (1.96), expresia (1.107) devine

$$\begin{aligned} Q = |e| \int & d^3x\, d^3p'\, d^3p \\ & \Big\{\Big[b_\alpha(\vec{p}\,')f_{\vec{p}\,'}(x) + a^*_\alpha(\vec{p}\,')f^*_{\vec{p}\,'}(x)\Big]\Big[a^\alpha(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) - b^{*\alpha}(\vec{p})f^*_{\vec{p}}(x)\Big] E_p - \\ & - E_{p'}\Big[b_\alpha(\vec{p}\,')f_{\vec{p}\,'}(x) - a^*_\alpha(\vec{p}\,')f^*_{\vec{p}\,'}(x)\Big]\Big[a^\alpha(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) + b^{*\alpha}(\vec{p})f^*_{\vec{p}}(x)\Big]\Big\}, \end{aligned} \tag{1.109}$$

astfel încât, integrând pe $\mathbf{R}^3$ produsul modurilor de frecvenţă şi aplicând proprietatea de filtraj a funcţionalei δ-Dirac, obţinem

$$Q = |e| \sum_{\alpha=1}^{3} \int \left[|a^\alpha(\vec{p})|^2 - |b_\alpha(\vec{p})|^2\right] d^3p\,, \tag{1.110}$$

termenii cu $b_\alpha(-\vec{p})a^\alpha(\vec{p})$, ca şi cei cu $a^*_\alpha(-\vec{p})b^{*\alpha}(\vec{p})$, reducându-se, deoarece apar de câte două ori, dar cu semn contrar. De data aceasta, în cadrul interpretării uniparticulă, semnul dintre cele două densităţi de

BCU ŞI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

probabilitate (în spaţiul impulsurilor) "iese corect", stările de energie negativă având norma negativă. Fantomele au tot sarcina $|e|$, dar contribuie cu $-|e|$ la valoarea medie a sarcinii, deoarece au "probabilitate negativă de manifestare". Desigur, interpretarea corectă este tot cea formulată de Feynman, bazată pe *algebra de sarcină a perechii particulă-antiparticulă*, deoarece sub acţiunea conjugării de sarcină $Q \to -Q$, $|b_\alpha(\vec{p})|^2$ reprezintă probabilitatea de ocupare a stării de impuls $\vec{p}$ şi proiecţie m_T^α a izospinului, de către o antiparticulă de energie E_p şi sarcină opusă particulei (asociate), $-|e|$.

Dintre cele trei sarcini de izospin, vom explicita, aşa cum se face de obicei, numai Q_3, deoarece $T_3 = \mathrm{diag}[1, 0, -1]$, în reprezentare $\{T^2, T_3\}$, baza u din $\mathbb{C}^3$ fiind formată din vectorii săi proprii

$$T_3 u_\alpha = m_T^\alpha u_\alpha, \qquad \text{fără sumare după } \alpha$$

de normă unitate. Obţinem astfel,

$$\begin{aligned} Q = g \int & d^3x\, d^3p'\, d^3p \\ & \Big\{ E_p \Big[b_\alpha(\vec{p}\,') f_{\vec{p}\,'}(x) + a_\alpha^*(\vec{p}\,') f_{\vec{p}\,'}^*(x) \Big] v^\alpha T_3 \\ & u_\beta \Big[a^\beta(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) - b^{*\beta}(\vec{p}) f_{\vec{p}}^*(x) \Big] - \\ & - E_{p'} \Big[b_\alpha(\vec{p}\,') f_{\vec{p}\,'}(x) - a_\alpha^*(\vec{p}\,') f_{\vec{p}\,'}^*(x) \Big] v^\alpha T_3 \\ & u_\beta \Big[a^\beta(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) + b^{*\beta}(\vec{p}) f_{\vec{p}}^*(x) \Big] \Big\}. \end{aligned} \tag{1.111}$$

Cum

$$v^\alpha T_3 u_\beta = m_T^\beta \delta_\beta^\alpha, \qquad \text{fără sumare după } \beta$$

iar, după aplicarea proprietăţilor (1.99) şi integrare după $\vec{p}\,'$, termenii cu $b(-\vec{p})a(\vec{p})$ şi, respectiv, $a^*(-\vec{p})b^*(\vec{p})$ se reduc, rezultă expresia finală

$$Q_3 = g \sum_{\alpha=1}^{3} m_T^\alpha \int \Big[|a^\alpha(\vec{p})|^2 - |b_\alpha(\vec{p})|^2 \Big]\, d^3p\,. \tag{1.112}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Spre deosebire de cazul sarcinii $U(1)$, când la aceasta contribuiau toate stările izotripletului complex, la izosarcina Q_3 contribuie numai stările cu $m_T^{1,3} = \pm 1$, cele cu $m_T^2 = 0$ fiind (evident) izoneutre.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.2 A doua cuantificare

Puţine domenii din Fizică au cunoscut în dezvoltarea lor o perioadă atât de explozivă cum a fost cea de la sfârşitul anilor '20 pentru Mecanica Cuantică. În 1923-1924, ipotezele de Broglie, conceptul de undă asociată şi, în general, "dualismul undă-corpuscul", devin patrimoniu ştiinţific internaţional. În 1925, Heisenberg fundamentează mecanica matriceală şi prezintă ca primă, dar deosebit de importantă, aplicaţie cuantificarea oscilatorului liniar armonic. În 1926, cum spunea Dirac, *everything blew-up*[3]. Schrödinger, descoperind ecuaţia care îi poartă numele, conferă funcţiei de undă o substanţialitate matematică deosebită, dezvoltă mecanica ondulatorie şi demonstrează efectiv echivalenţa formulării liniar-autoadjunct-operatoriale pe spaţii Hilbert a acesteia, cu formularea matriceală introdusă de Heisenberg, punând bazele Mecanicii Cuantice. În această fundaţie, exact în acelaşi an, Gordon ancorează armătura primului element structural relativist, şi anume ecuaţia Poincaré invariantă a funcţiei de undă a particulei scalare, iar după numai un an, Klein "cuplează" la aceasta câmpul electromagnetic. Interesantă coincidenţă, tot în 1927, acest câmp "se lasă" cuantificat de către Dirac, stabilindu-se astfel primul reper pe calea celei de a doua cuantificări. În 1928, are loc o nouă explozie de idei şi rezultate, cu mult mai puternică decât cea din 1926. Dacă de Broglie şi Gordon ridicaseră, fiecare, câte un colţ al perdelei ce acoperea fizica proceselor din microcosmos, Dirac, Jordan, Pauli, Wigner, Bohr şi Heisenberg o dau aproape complet la o parte. Prin descoperirea ecuaţiei care îi poartă numele, Dirac finisează practic edificiul Mecanicii Cuantice Relativiste, justificând spinul 1/2 al electronului, explicând aşanumita "anomalie de spin" şi prevăzând existenţa antiparticulelor. Tot el îmbracă Mecanica Cuantică cu o nouă haină, aceea a formalismului *bra-ket*, care devine modalitatea standard de simbolistică şi exprimare în acest domeniu. Cu intuiţia-i caracteristică, Bohr sesizează,

[3] totul a explodat

încă din 1925, că relaţiile de comutare impuls-coordonată, postulate de Heisenberg, au un caracter cu mult mai profund, fiind general valabile pentru variabilele canonice conjugate ale oricărui sistem fizic (de spin întreg) şi după o perioadă de cercetări intense, în care, după cum spunea Gamov, "uitase complet de propria-i persoană", el obţine ceea ce astăzi numim *relaţiile de comutare Bohr-Heisenberg* pentru câmpurile bozonice. Acestea se încadrau perfect în metoda generală de cuantificare a sistemelor fizice, dezvoltată, tot în 1928, de către Jordan, Pauli şi Wigner, atât pentru valorile întregi ale spinului, cât şi pentru cele semiîntregi. În esenţă era vorba de superioritatea imaginii Heisenberg (faţă de imaginea Schrödinger, devenită "tradiţională" în Mecanica Cuantică "ortodoxă"). Aceasta permitea, prin integrarea ecuaţiilor canonice Hamilton-Heisenberg, obţinerea observabilelor fundamentale ale sistemului în termenii aşa-numiţilor *operatori de ridicare şi coborâre*, în raport cu care se defineau stările (cuantice ale) sistemului, ca elemente ale unui spaţiu Hilbert abstract, numit *spaţiu Fock*. Se pun astfel bazele Teoriei Cuantice a Câmpurilor, Heisenberg şi Pauli sintetizând, în 1929, tot acest sistem de axiome şi principii în ceea ce, de la ei încoace, poartă numele de *metoda canonică de cuantificare*. Funcţionalitatea acesteia este demonstrată concret în 1934 de către Pauli şi Weisskopf, prin cuantificarea câmpului scalar, iar aserţiunea conform căreia câmpurile bozonice se cuantifică prin relaţii de comutare, iar cele fermionice prin relaţii de anticomutare, este lămurită complet de către Pauli, în perioada 1936-1940, prin lucrările sale asupra "legăturii spin-statistică".[4]

A. Oscilatorul liniar armonic în imagine Heisenberg

Acesta este cel mai simplu exemplu netrivial de aplicare a metodei Jordan-Pauli-Heisenberg de cuantificare. Fie o microparticulă scalară

[4] O descriere amănunţită a tuturor acestor surse bibliografice este dată în [19, 43, 53]

nerelativistă, de masă m, "obligată" să evolueze într-un câmp conservativ, de tip elastic, care îi conferă energia potenţială

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 .$$

Din lagrangeianul

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - V(x)$$

rezultă forma bine cunoscută a hamiltonianului

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 , \text{ cu } p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Leftrightarrow \dot{x} = m^{-1} p ,$$

cu ajutorul căreia ecuaţiile canonice ale lui Hamilton

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

iau forma concretă

$$\dot{x} = m^{-1} p$$
$$\dot{p} = -m\omega_0^2 x .$$

Cuantificarea se realizează prin impunerea relaţiei de comutare Heisenberg

$$[p, x] = -i , \quad \hbar = 1$$

celor două soluţii (canonic conjugate) p şi x, interpretate ca operatori (liniari) autoadjuncţi în imagine Heisenberg (deci cu dependenţă temporală explicită, stările asupra cărora acţionează fiind, însă, "fixe"). Derivând în raport cu t prima ecuaţie canonică şi înlocuind $\dot{p}$ din a doua, rezultă ecuaţia cu "alură clasică"

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 ,$$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

având ca soluţie *operatorul coordonată*

$$x(t) = a\,e^{-i\omega_0 t} + a^\dagger\, e^{i\omega_0 t}\,,$$

în care operatorul liniar a intervine împreună cu conjugatul său hermitic $a^\dagger$, deoarece $x(t)$ trebuie să fie un operator autoadjunct. Pentru *operatorul impuls* obţinem, atunci,

$$p(t) = -im\omega_0\left[a\,e^{-i\omega_0 t} - a^\dagger\, e^{i\omega_0 t}\right],$$

astfel încât relaţia Heisenberg devine

$$\left[a\,,\,a^\dagger\right] = (2m\omega_0)^{-1}\,.$$

Prin "normarea"

$$c = \sqrt{2m\omega_0}\,a\;,\;\; c^\dagger = \sqrt{2m\omega_0}\,a^\dagger\,,$$

se stabileşte algebra

$$\left[c\,,\,c^\dagger\right] = 1$$

a celor doi "operatori de mişcare", cum îi numeşte Dirac, c şi $c^\dagger$. Observabilele coordonată şi impuls se scriu, respectiv,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega_0}}\left(c\,e^{-i\omega_0 t} + c^\dagger\, e^{i\omega_0 t}\right), \\ p(t) &= -i\sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}\left(c\,e^{-i\omega_0 t} - c^\dagger\, e^{i\omega_0 t}\right), \end{aligned}$$

iar operatorul hamiltonian devine

$$H = \omega_0\left[c^\dagger c + \frac{1}{2}\right],$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

fiind; în mod evident, o *constantă a mişcării.* După cum se poate observa, energia de zero, $\frac{\omega_0}{2}$, a apărut deja, iar în ceea ce priveşte restul cuantificării, rolul dominant revine operatorului

$$N = c^\dagger c\,,$$

numit simplu *number operator* sau, mai pe larg, *operator număr de excitare.* Setul complet ortonormal de vectori proprii ai acestuia va forma baza spaţiului Hilbert al tuturor stărilor cuantice ale sistemului, iar valorile proprii corespunzătoare vor cuantifica energia. Pentru identificarea acestor elemente, să presupunem că există o stare $|0\rangle$, de normă unitate

$$\langle 0|0\rangle = 1\,,$$

numită *stare fundamentală* (sau *ground state*) care, prin definiţie, este anihilată de operatorul c, adică

$$c|0\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \langle 0|c^\dagger = 0\,.$$

Evident, ea este o stare proprie trivială a operatorului număr, în sensul

$$N|0\rangle = 0\,|0\rangle\,,$$

iar valoarea medie a energiei în această stare,

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2}\omega_0\,,$$

este chiar *energia de zero.* Evaluată pe starea fundamentală, relaţia de comutare a operatorilor c, $c^\dagger$ devine

$$cc^\dagger|0\rangle = |0\rangle$$

şi, aplicând în stânga operatorul $c^\dagger$, obţinem

$$N\left(c^\dagger|0\rangle\right) = 1\,c^\dagger|0\rangle\,,$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică $c^\dagger|0\rangle$ este o stare proprie a lui N, de valoare proprie (număr de excitare) $n = 1$, ceea ce ne permite să scriem

$$N|1\rangle = n|1\rangle = |1\rangle ,$$

cu

$$c^\dagger|0\rangle = |1\rangle \Leftrightarrow \langle 0|c = \langle 1|$$

drept primă stare excitată. Utilizând-o în relaţia de comutare pe starea fundamentală, obţinem

$$c|1\rangle = |0\rangle \Leftrightarrow \langle 1|c^\dagger = \langle 0| ,$$

adică avem definită şi acţiunea operatorilor c, $c^\dagger$ la dreapta şi, respectiv, la stânga, asupra ei. În plus, din

$$1 = \langle 0|0\rangle = \langle 0|cc^\dagger|0\rangle = (\langle 0|c)\left(c^\dagger|0\rangle\right) = \langle 1|1\rangle$$

deducem că starea de primă excitaţie este, de asemenea, normată la unitate. Aplicând din nou algebra operatorilor de mişcare, dar pe starea $|1\rangle$, de această dată, avem

$$cc^\dagger|1\rangle - c^\dagger c|1\rangle = |1\rangle \Rightarrow cc^\dagger|1\rangle - c^\dagger|0\rangle = |1\rangle ,$$

adică

$$cc^\dagger|1\rangle = 2\,|1\rangle .$$

"Venind" din nou din stânga cu operatorul $c^\dagger$, rezultă

$$N\left(c^\dagger|1\rangle\right) = 2\,c^\dagger|1\rangle ,$$

obţinând următoarea stare proprie

$$c^\dagger|1\rangle = \beta_1|2\rangle \Leftrightarrow \langle 1|c = \beta_1^*\langle 2|$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a operatorului număr de excitare, corespunzătoare valorii proprii $n = 2$. Cum

$$\langle 1|cc^\dagger|1\rangle = (\langle 1|c)\left(c^\dagger|1\rangle\right) = |\beta_1|^2\langle 2|2\rangle = 2\,\langle 1|1\rangle = 2$$

rezultă că normarea (la unitate) a celei de a doua stări excitate reclamă "automat" (până la un factor de fază neesenţial)

$$\beta_1 = \sqrt{2}.$$

Acum avem definite acţiunile

$$c^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}\,|2\rangle \;\Leftrightarrow\; \langle 1|c = \sqrt{2}\,\langle 2|$$
$$c|2\rangle = \sqrt{2}\,|1\rangle \;\Leftrightarrow\; \langle 2|c^\dagger = \sqrt{2}\,\langle 1|$$

ale operatorilor c, $c^\dagger$ la stânga şi la dreapta pe prima stare excitată şi, respectiv, la dreapta şi la stânga pe cea de a doua (stare excitată). Continuând din aproape în aproape acest procedeu, este clar că vom obţine toate stările proprii ortonormale $\{|n\rangle\}_{n=0,1,2,\ldots}$

$$N|n\rangle = n|n\rangle\,,\quad \langle n'|n\rangle = \delta_{n'n}\,,\quad (\forall)\, n', n \in \mathbf{N}$$

ale operatorului număr de excitaţie, corespunzătoare valorilor proprii $n = 0,\ 1,\ 2,\ldots$, care sunt şi stări proprii ale hamiltonianului

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle\,,$$

pentru valorile proprii

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_0$$

ale energiei. Cu acestea, problema cuantificării oscilatorului liniar armonic în imagine Heisenberg este aproape complet rezolvată. Mai avem

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de obţinut forma concretă a acţiunii operatorilor de mişcare asupra unei stări proprii oarecare, $|n\rangle$. Deoarece acest tip de calcul a fost efectuat deja în Capitolul 2, când am discutat necesitatea cuantificării câmpurilor, nu vom mai insista aici asupra tuturor detaliilor. Este clar că operatorul c reduce cu o unitate gradul de excitare a stării asupra căreia acţionează, adică

$$c|n\rangle = \alpha_n|n-1\rangle \;\Leftrightarrow\; \langle n|c^\dagger = \alpha_n\langle n-1|$$

şi, din acest motiv, poartă numele de *operator de coborâre*, (în terminologia din limba engleză, *lowering operator*). Pe de altă parte, operatorul $c^\dagger$, mărind gradul de excitare cu o unitate,

$$c^\dagger|n\rangle = \beta_n|n+1\rangle \;\Leftrightarrow\; \langle n|c = \beta_n\langle n+1|\,,$$

a primit numele de *operator de ridicare* (*rising operator*). Forma coeficienţilor $\{\alpha_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ se determină imediat din ecuaţia de vectori şi valori proprii a operatorului de număr

$$N|n\rangle = n|n\rangle \;\Rightarrow\; \langle n|c^\dagger c|n\rangle = n\,,$$

adică

$$\left(\langle n|c^\dagger\right)(c|n\rangle) = \alpha_n^2 = n \;\Rightarrow\; \alpha_n = \sqrt{n}\,,\;(\forall)\, n \in \mathbf{N}$$

deci, pentru operatorul c, avem expresia concretă a acţiunii sale

$$c|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \;\Rightarrow\; \langle n|c^\dagger = \sqrt{n}\,\langle n-1|\,.$$

Pentru coeficienţii $\{\beta_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ obţinem, din valoarea medie pe starea $|n\rangle$ a algebrei celor doi operatori (de mişcare),

$$\langle n|cc^\dagger|n\rangle - \langle n|c^\dagger c|n\rangle = 1 \;\Rightarrow\; \left(\langle n|c\right)\left(c^\dagger|n\rangle\right) = n+1\,,$$

BCUJ-CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică

$$\beta_n = \sqrt{n+1}\,,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

deci operatorul de ridicare acţionează după regula

$$c^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \ \Leftrightarrow\ \langle n|c = \sqrt{n+1}\,\langle n+1|\,.$$

Înainte de a trece la generalizarea acestor rezultate, prin explicitarea pe baza relaţiei de comutare Bohr-Heisenberg a metodei canonice de cuantificare a câmpului scalar, să mai punctăm un aspect legat de "reprezentarea de configuraţie", în imagine Schrödinger, a stărilor proprii ortonormale $\{|n\rangle\}_{n=0,1,2,\ldots}$ pe care le-am introdus şi de care ne-am folosit până acum. Deoarece la $t = 0$ cele două imagini coincid, vom avea

$$x(0) = x\,,\ p(0) = -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

de unde, utilizând expresiile lui x şi p în funcţie de c şi $c^\dagger$, rezultă sistemul

$$\begin{aligned} c + c^\dagger &= \sqrt{2m\omega_0}\,x \\ c - c^\dagger &= \sqrt{\frac{2}{m\omega_0}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,, \end{aligned}$$

cu soluţiile

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega_0}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}\,x \\ c^\dagger &= -\frac{1}{\sqrt{2m\omega_0}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}\,x\,, \end{aligned}$$

exprimând forma concretă a operatorilor de coborâre-ridicare în reprezentarea de configuraţie. Cum toate stările excitate $|n\rangle$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ se obţin din starea fundamentală $|0\rangle$ prin aplicarea repetată a operatorului de ridicare, iar spectrul valorilor proprii ale energiei oscilatorului este cel

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

corect, rezultă că este suficient să se demonstreze că starea $|0\rangle$ anihilată de operatorul c este, într-adevăr, "gaussiana de bază" a oscilatorului liniar armonic. Din izomorfismul $|0\rangle \sim \psi_0(x)$, forma operatorului de coborâre, în reprezentare de configuraţie, şi condiţia $c|0\rangle = 0$, rezultă ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}\psi_0(x)}{\mathrm{d}x} + m\omega_0 x\psi_0(x) = 0\,,$$

cu soluţia generală

$$\psi_0(x) = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2}m\omega_0 x^2}\,.$$

Impunând condiţia de normare

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2\,dx = 1\,,$$

obţinem (până la un factor de fază neesenţial)

$$\mathcal{N} = \left(\frac{m\omega_0}{\pi}\right)^{1/4}\,,$$

astfel încât am demonstrat că

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega_0}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}m\omega_0 x^2}$$

exprimă cu adevărat, în reprezentarea de coordonată, starea fundamentală $|0\rangle$ (de normă unitate) a oscilatorului cuantic nerelativist. Celelalte funcţii de amplitudine $\{\psi_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$, ale stărilor sistemului în imagine Schrödinger, se vor obţine din aproape în aproape, în baza ecuaţiei

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} c^\dagger |n-1\rangle\,,$$

adică

$$\psi_n(x) = -\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{1}{\sqrt{2m\omega_0}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}x\right]\psi_{n-1}(x)\,,\ (\forall)\ n\in\mathbf{N}^*\,.$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

B. Relaţiile de comutare Bohr-Heisenberg

Ce concluzii şi, în acelaşi timp, idei generalizatoare putem desprinde din exemplul tocmai prezentat? Prima este aceea că ecuaţiile canonice ale lui Hamilton rămân valabile, când trecem la cuantificare, dar trebuie în mod necesar "suplimentate" cu relaţiile Heisenberg de comutare a variabilelor – de fapt, a observabilelor – canonic conjugate. Datorită echivalenţei formalismului hamiltonian cu cel lagrangeian, rezultă că şi ecuaţiile Euler-Lagrange rămân valabile, dar soluţiile acestora trebuie interpretate ca operatori şi nu ca funcţii, fiindcă altfel nu pot fi satisfăcute relaţiile Heisenberg. În aceeaşi ordine de idei, putem presupune că observabilele fundamentale ale sistemului, în sens (foarte) general, se vor exprima în termeni de operatori de tip ridicare-coborâre, ce vor acompania modurile de frecvenţă negativă, respectiv pozitivă, ale câmpului (asociat sistemului) şi care vor contribui atât la stabilirea stării fundamentale (de vid, cum i se spune în Teoria Cuantică a Câmpurilor), cât şi la generarea stărilor excitate, multiparticulă, ale câmpului cuantificat. În absenţa interacţiunilor, hamiltonianul va fi o constantă a mişcării, deci toate stările sale proprii, multiparticulă, inclusiv starea de vid, vor forma în spaţiul Hilbert abstract, numit – cum am mai spus – spaţiu Fock, o bază ortonormală extrem de convenabilă pentru descrierea "conţinutului în particule" al diverselor stări cuantice ale sistemului. Ajungem, astfel, la necesitatea soluţionării principalei probleme din cadrul celei de a doua cuantificări şi anume: forma concretă a relaţiilor Heisenberg în cazul unui sistem cu un număr infinit de grade de libertate.

Din fericire, "pentru reglarea tirului avem nevoie de un singur trasor". Să ne imaginăm un câmp scalar real coerent, adică independent de coordonatele spaţiale $(x^\mu)_{\mu=\overline{1,3}}$, închis într-o cutie de volum V. Densitatea de lagrangeian

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2}\eta^{ik}\phi_{,i}\phi_{,k} + \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

se reduce la forma simplă

$$\mathcal{L}[\phi(t)] = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - m^2\phi^2\right],$$

care conduce, prin relaţia de definiţie (în signatură +2)

$$L[\phi] = -\int \mathcal{L}[\phi]\, d^3x\,,$$

la lagrangeianul

$$L[\phi, \phi_{,t}] = \frac{V}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - m^2\phi^2\right]$$

care are, funcţional, exact forma lagrangeianului oscilatorului armonic, cu câmpul coerent ϕ drept coordonată, într-un spaţiu de configuraţie abstract (unidimensional). Prin urmare, impulsul canonic conjugat acestei coordonate generalizate este

$$P = \frac{\partial L}{\partial \phi_{,t}} = \pi V\,, \text{ cu } \pi = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,t}} = \phi_{,t}\,,$$

iar relaţia de comutare postulată de Heisenberg

$$[P\,,\phi] = -i$$

capătă "forma de bază", în sensul generalizării pe care o întreprindem,

$$[\pi\,,\phi] = -iV^{-1}\,.$$

De ce i-am zis "formă de bază"? Fiindcă, oricare ar fi câmpul real $\phi(x^i)$ definit pe M_4 (deci nu neapărat coerent), cu dinamica criptogramată într-o densitate de lagrangeian $-\mathcal{L}(\phi, \phi_{,i})$, impulsul generalizat, canonic asociat câmpului, se defineşte (în sens hamiltonian) prin relaţia

$$\pi = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,4}}\,, \text{ cu } (\cdot)_{,4} = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot)\,,$$

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

fiind evident dependent, prin câmpul ϕ, de evenimentul $(x^i) = (\vec{x}, t)$ în care îl definim. Rezultă că, în cazul general al câmpurilor necoerente, "forma de bază" a relaţiei de comutare "la timpi egali", $t' = x'^4 = x^4 = t$, va fi de genul

$$[\pi(x'), \phi(x)]_{t'=t} = -i V^{-1}(\vec{x}', \vec{x}),$$

rămânându-ne să explicităm cumva mărimea $V^{-1}(\vec{x}', \vec{x})$. Aceasta este independentă de "epoca" t, deoarece comutatorul Heisenberg (impuls-coordonată) este, în orice teorie cuantică, o *constantă a mişcării.* De asemenea, respectarea principiului microcauzalităţii impune ca în toate punctele $\vec{x}'$, cu $\vec{x}' \neq \vec{x}$, să avem $V^{-1}(\vec{x}', \vec{x}) = 0$, deoarece evenimentele $(\vec{x}', t)$ şi $(\vec{x}, t)$ fiind separate printr-un interval de gen spaţial,

$$\eta_{ik}(x'^i - x^i)(x'^k - x^k) = |\vec{x}' - \vec{x}|^2 > 0,$$

nu pot fi conectate cauzal, deci observabilele canonic conjugate definite în aceste puncte vor comuta. Singura legătură cauzală ce se poate stabili pe 3-suprafaţa de $t = const.$ apare numai atunci când $\vec{x}' = \vec{x}$, adică la coincidenţa celor două evenimente (de $t = const.$) în vârful conului luminos "explodând" din "punctul" $(\vec{x}, t)$ în M_4. Cu alte cuvinte, pentru orice $\vec{x}$ fixat, $V^{-1}(\vec{x}', \vec{x})$ este o distribuţie cu suport doar în punctul de vector de poziţie $\vec{x}$. Cum în cazul unidimensional, pe axa reală, o astfel de distribuţie este funcţionala δ-Dirac, rezultă că în $\mathbf{R}^3$ trebuie să avem

$$V^{-1}(\vec{x}', \vec{x}) = \delta(\vec{x}' - \vec{x}).$$

Ca şi relaţia de comutare impuls-coordonată, care, neavând analog clasic, nu poate fi demonstrată, ci trebuie postulată, relaţia de comutare Bohr-Heisenberg (pentru sisteme bozonice cu un număr infinit de grade de libertate)

$$[\pi(x'), \phi(x)]_{t'=t} = -i\,\delta(\vec{x}' - \vec{x}), \tag{2.1}$$

pe care tocmai am justificat-o inductiv, trebuie luată ca atare, în cadrul metodei de cuantificare canonică a câmpurilor, neexistând "reţete" absolut riguroase, de la "clasic" spre "cuantic", de obţinere a ei. În cazul

câmpurilor fermionice $\psi(x)$, care ascultă de principiul lui Pauli (aflat complet în afara oricărei analogii nu numai din Fizica clasică, dar şi din Mecanica Cuantică a particulelor de spin întreg), problema formulării unor relaţii de comutare de tip Heisenberg iese cu totul din cadrul unor justificări inductive, mai mult sau mai puţin naive, având de a face, de fapt, aşa cum au arătat Jordan şi Wigner în 1928 şi apoi Pauli în 1936, într-o manieră mai elaborată, cu o *relaţie de anticomutare la timpi egali*

$$\{\pi(x'), \psi(x)\}_{t'=t} = -i\,\delta(\vec{x}' - \vec{x}) .$$

Asupra aplicării concrete a acestei relaţii la cuantificarea câmpului Dirac, vom reveni pe larg în capitolul următor.

Deocamdată, să ne întoarcem la relaţia Bohr-Heisenberg şi să punem în funcţiune formalismul cuantificării canonice a câmpului scalar complex. Cum ϕ este ridicat la rang de operator, numit sugestiv "operator de câmp", în locul lui ϕ^* vom avea conjugatul hermitic $\phi^\dagger$, iar densitatea de lagrangeian (în signatură +2) devine

$$\mathcal{L}[\phi^\dagger, \phi] = \eta^{ik}\,\phi^\dagger{}_{,i}\,\phi_{,k} + m^2\,\phi^\dagger\phi . \tag{2.2}$$

Spre deosebire de cazul real, cu ϕ operator hermitic, când aveam o singură variabilă canonică, acum avem două coordonate generalizate, ϕ, $\phi^\dagger$, şi, corespunzător, vom avea două impulsuri

$$\begin{aligned} \pi^\dagger &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,4}} \\ \pi &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger{}_{,4}} , \end{aligned} \tag{2.3}$$

adică

$$\begin{aligned} \pi^\dagger &= \phi^\dagger{}_{,4} \\ \pi &= \phi_{,4} , \end{aligned} \tag{2.4}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

canonic asociate acestora. Sistemul de notaţii, cu $\pi^\dagger$ obţinut din derivarea după $\phi_{,4}$ şi π din cea după $\phi^\dagger{}_{,4}$, poate părea straniu la prima vedere, dar din (2.4) rezultă clar că este mult mai avantajos, cel puţin sub aspect mnemotehnic. Am zis "cel puţin", deoarece acest tip de notaţii este de fapt cel corect din punctul de vedere al aşa-numitei "varianţe algebrice". Astfel, dacă ϕ este un câmp Lorentz-invariant, dar "multicomponent" într-un spaţiu liniar abstract pe care acţionează o reprezentare a unui grup intern, atunci, "privind" ϕ ca o matrice $(n\times 1)$, $\phi^\dagger$ este în mod necesar o matrice $(1\times n)$ pentru ca lagrangeianul să fie un scalar faţă de produsul (semi)direct al celor două grupuri (Lorentz şi intern). În consecinţă, în urma derivării după $\phi_{,4}$, nu vom obţine matricea π de tip $(n\times 1)$, ci matricea $\pi^\dagger$ de tip $(1\times n)$, aspecte clar evidenţiate de expresiile concrete (2.4). Revenind la "singleţii" ϕ, $\phi^\dagger$, să formulăm algebra relaţiilor de comutare la timpi egali. Spre deosebire de cazul operatorului de câmp hermitic, pentru care există numai trei relaţii de comutare,

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad [\phi(x')\,,\,\phi(x)]_{t'=t} = 0\\
&\text{b)}\quad [\pi(x')\,,\,\pi(x)]_{t'=t} = 0\\
&\text{c)}\quad [\pi(x')\,,\,\phi(x)]_{t'=t} = -i\,\delta(\vec{x}'-\vec{x})\,,
\end{aligned}\tag{2.5}$$

acum avem zece, dintre care algebric esenţiale sunt numai următoarele şase

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad [\phi(x')\,,\,\phi(x)]_{t'=t} = 0\\
&\text{b)}\quad \left[\phi^\dagger(x')\,,\,\phi(x)\right]_{t'=t} = 0\\
&\text{c)}\quad [\pi(x')\,,\,\pi(x)]_{t'=t} = 0\\
&\text{d)}\quad \left[\pi^\dagger(x')\,,\,\pi(x)\right]_{t'=t} = 0\\
&\text{e)}\quad [\pi(x')\,,\,\phi(x)]_{t'=t} = 0\\
&\text{f)}\quad \left[\pi^\dagger(x')\,,\,\phi(x)\right]_{t'=t} = -i\,\delta(\vec{x}'-\vec{x})\,,
\end{aligned}\tag{2.6}$$

BCU IASI / CENTRUL UNIVERSITAR

celelalte patru obţinându-se prin conjugare hermitică. După cum se poate observa, singura relaţie nebanală este (2.6.f), exprimând *relaţia de comutare Bohr-Heisenberg pentru câmpul scalar complex*, iar restul de cinci exprimă de fapt, în formalismul celei de a doua cuantificări, comutarea nebanală a coordonatelor, impulsurilor şi impuls-coordonatelor neasociate canonic. Utilizând "expresiile modale"

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \phi(x) = \int d^3p \left[a(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) + b^\dagger(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x)\right] \\ &\text{b)}\quad \phi^\dagger(x) = \int d^3p \left[b(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) + a^\dagger(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x)\right] \end{aligned} \tag{2.7}$$

ale operatorilor de câmp, ϕ, $\phi^\dagger$, soluţii ale ecuaţiei Gordon (Euler-Lagrange pentru densitatea de lagrangeian (2.2)) şi formele corespunzătoare, prin (2.4),

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \pi^\dagger(x) = -i \int d^3p\, E_p \left[b(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) - a^\dagger(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x)\right] \\ &\text{b)}\quad \pi(x) = -i \int d^3p\, E_p \left[a(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) - b^\dagger(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x)\right] \end{aligned} \tag{2.8}$$

ale impulsurilor generalizate, să stabilim, prin intermediul relaţiilor de comutare (2.6), algebra operatorilor $\{a(\vec{p}),\, a^\dagger(\vec{p}),\, b(\vec{p}),\, b^\dagger(\vec{p})\}$ care o va generaliza pe cea a operatorilor de coborâre-ridicare din cazul oscilatorului liniar armonic. Din felul în care, prin (2.7) şi (2.8), aceşti operatori – $a(\vec{p})$, $b^\dagger(\vec{p})$, $b(\vec{p})$, $a^\dagger(\vec{p})$ – intervin în relaţiile (2.6), observăm că acestea se împart în două grupe de câte trei relaţii, şi anume (2.6.a, c, e) şi (2.6.b, d, f). Mai mult decât atât, se poate constata, după un calcul scurt, că în cadrul fiecărei grupe, relaţiile (2.6.a, c) şi respectiv (2.6.b, d) sunt echivalente, în sensul că oferă aceeaşi subalgebră pentru operatorii menţionaţi. Prin urmare, este suficient să ne concentrăm asupra relaţiilor de comutare (2.6.a, e) şi (2.6.b, f) din cadrul fiecărei

grupe. Pentru primele două avem, în mod detaliat,

$$
\begin{aligned}
\text{a)}\quad & [\phi(x'),\phi(x)]_{t'=t} = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p'\,d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{E_{p'}E_p}}\,[a(\vec{p}\,'),a(\vec{p})]\; e^{i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'+\vec{p}\cdot\vec{x})}\, e^{-i(E_{p'}+E_p)t} + \\
&+ \frac{1}{2}\int \frac{d^3p'\,d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{E_{p'}E_p}}\left[b^\dagger(\vec{p}\,'),b^\dagger(\vec{p})\right]\; e^{-i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'+\vec{p}\cdot\vec{x})}\, e^{i(E_{p'}+E_p)t} + \\
&+ \frac{1}{2}\int \frac{d^3p'\,d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{E_{p'}E_p}}\left[a(\vec{p}\,'),b^\dagger(\vec{p})\right]\; e^{i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'-\vec{p}\cdot\vec{x})}\, e^{-i(E_{p'}-E_p)t} - \\
&- \frac{1}{2}\int \frac{d^3p'\,d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{E_{p'}E_p}}\left[a(\vec{p}),b^\dagger(\vec{p}\,')\right]\; e^{-i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'-\vec{p}\cdot\vec{x})}\, e^{i(E_{p'}-E_p)t} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{b)}\quad & [\pi(x'),\phi(x)]_{t'=t} = \\
&- \frac{i}{2}\int \frac{d^3p'\,d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{p'}}{E_p}}\,[a(\vec{p}\,'),a(\vec{p})]\; e^{i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'+\vec{p}\cdot\vec{x})}\, e^{-i(E_{p'}+E_p)t} + \\
&+ \frac{i}{2}\int \frac{d^3p'\,d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{p'}}{E_p}}\left[b^\dagger(\vec{p}\,'),b^\dagger(\vec{p})\right]\; e^{-i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'+\vec{p}\cdot\vec{x})}\, e^{i(E_{p'}+E_p)t} - \\
&- \frac{i}{2}\int \frac{d^3p'\,d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{p'}}{E_p}}\left[a(\vec{p}\,'),b^\dagger(\vec{p})\right]\; e^{i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'-\vec{p}\cdot\vec{x})}\, e^{-i(E_{p'}-E_p)t} - \\
&- \frac{i}{2}\int \frac{d^3p'\,d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{p'}}{E_p}}\left[a(\vec{p}),b^\dagger(\vec{p}\,')\right]\; e^{-i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'-\vec{p}\cdot\vec{x})}\, e^{i(E_{p'}-E_p)t} = 0\,.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Evident, aceste rezultate trebuie să fie valabile oricare ar fi vectorii de poziţie $\vec{x}\,'$, $\vec{x}$ şi momentul t. Deoarece $E_{p'}$, $E_p > m$, funcţiile $\exp[-i(E_{p'}+E_p)t]$ şi $\exp[i(E_{p'}+E_p)t]$ formează un sistem liniar inde-

BCU CLUJ UNIVERSITY LIBRARY

pendent, deci trebuie să avem

$$\text{a)}\quad [a(\vec{p}\,'),\, a(\vec{p})] = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[a^\dagger(\vec{p}\,'),\, a^\dagger(\vec{p})\right] = 0$$
$$\text{b)}\quad \left[b^\dagger(\vec{p}\,'),\, b^\dagger(\vec{p})\right] = 0 \;\Leftrightarrow\; [b(\vec{p}\,'),\, b(\vec{p})] = 0\,. \qquad (2.10)$$

Schimbând $\vec{p}\,'$ cu $\vec{p}$ în ultima integrală din (2.9.a) şi (2.9.b), obţinem

$$\text{a)}\quad [\phi(x'),\, \phi(x)]_{t'=t} = \frac{1}{2}\int \frac{d^3p'\, d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{E_{p'}E_p}}$$
$$\left\{e^{i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'+\vec{p}\cdot\vec{x})} - e^{i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}-\vec{p}\cdot\vec{x}\,')}\right\}\left[a(\vec{p}\,'),\, b^\dagger(\vec{p})\right] e^{-i(E_{p'}-E_p)t} = 0$$

$$\text{b)}\quad [\pi(x'),\, \phi(x)]_{t'=t} = -\frac{i}{2}\int \frac{d^3p'\, d^3p}{(2\pi)^3}$$
$$\left\{\sqrt{\frac{E_{p'}}{E_p}}e^{i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'-\vec{p}\cdot\vec{x})} + \sqrt{\frac{E_p}{E_{p'}}}e^{i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}-\vec{p}\cdot\vec{x}\,')}\right\}$$
$$\left[a(\vec{p}\,'),\, b^\dagger(\vec{p})\right] e^{-i(E_{p'}-E_p)t} = 0\,, \qquad (2.11)$$

care nu pot fi satisfăcute simultan, oricare ar fi vectorii de poziţie $\vec{x}\,'$, $\vec{x}$, decât dacă

$$\left[a(\vec{p}\,'),\, b^\dagger(\vec{p})\right] = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[b(\vec{p}),\, a^\dagger(\vec{p}\,')\right] = 0\,. \qquad (2.12)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În mod analog (ca procedeu), pentru al doilea grup (2.6.b, f) al relaţiilor de comutare la timpi egali (pentru câmpul scalar complex), obţinem

$$
\begin{aligned}
\text{a)}\quad & \left[\phi^\dagger(x'),\,\phi(x)\right]_{t'=t} = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p'\,d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{E_{p'}E_p}}\,[b(\vec{p}'),\,a(\vec{p})]\;e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{x}'+\vec{p}\cdot\vec{x})}\,e^{-i(E_{p'}+E_p)t} + \\
&+ \frac{1}{2}\int \frac{d^3p'\,d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{E_{p'}E_p}}\left[a^\dagger(\vec{p}'),\,b^\dagger(\vec{p})\right]\;e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{x}'+\vec{p}\cdot\vec{x})}\,e^{i(E_{p'}+E_p)t} + \\
&+ \frac{1}{2}\int \frac{d^3p'\,d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{E_{p'}E_p}}\left[b(\vec{p}'),\,b^\dagger(\vec{p})\right]\;e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{x}'-\vec{p}\cdot\vec{x})}\,e^{-i(E_{p'}-E_p)t} - \\
&- \frac{1}{2}\int \frac{d^3p'\,d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{E_{p'}E_p}}\left[a(\vec{p}),\,a^\dagger(\vec{p}')\right]\;e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{x}'-\vec{p}\cdot\vec{x})}\,e^{i(E_{p'}-E_p)t} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{b)}\quad & \left[\pi^\dagger(x'),\,\phi(x)\right]_{t'=t} = \\
&- \frac{i}{2}\int \frac{d^3p'\,d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{p'}}{E_p}}\,[b(\vec{p}'),\,a(\vec{p})]\;e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{x}'+\vec{p}\cdot\vec{x})}\,e^{-i(E_{p'}+E_p)t} + \\
&+ \frac{i}{2}\int \frac{d^3p'\,d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{p'}}{E_p}}\left[a^\dagger(\vec{p}'),\,b^\dagger(\vec{p})\right]\;e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{x}'+\vec{p}\cdot\vec{x})}\,e^{i(E_{p'}+E_p)t} - \\
&- \frac{i}{2}\int \frac{d^3p'\,d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{p'}}{E_p}}\left[b(\vec{p}'),\,b^\dagger(\vec{p})\right]\;e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{x}'-\vec{p}\cdot\vec{x})}\,e^{-i(E_{p'}-E_p)t} - \\
&- \frac{i}{2}\int \frac{d^3p'\,d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{p'}}{E_p}}\left[a(\vec{p}),\,a^\dagger(\vec{p}')\right]\;e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{x}'-\vec{p}\cdot\vec{x})}\,e^{i(E_{p'}-E_p)t} = \\
&= -i\,\delta(\vec{x}'-\vec{x})\,.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În baza aceluiaşi criteriu, al independenţei temporale a valorilor comutatorilor de tip Heisenberg, trebuie să avem

$$[b(\vec{p}\,'),\, a(\vec{p})] = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[a^{\dagger}(\vec{p}\,'),\, b^{\dagger}(\vec{p})\right] = 0$$

şi, schimbând din nou $\vec{p}\,'$ cu $\vec{p}$ în ultima integrală din (2.13.a) şi (2.13.b), rezultă sistemul

$$\text{a)}\quad \left[\phi^{\dagger}(x'),\, \phi(x)\right]_{t'=t} = \frac{1}{2}\int \frac{d^3p'\, d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{E_{p'}E_p}} \left\{\left[b(\vec{p}\,'),\, b^{\dagger}(\vec{p})\right] e^{i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'-\vec{p}\cdot\vec{x})} - \left[a(\vec{p}\,'),\, a^{\dagger}(\vec{p})\right] e^{i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}-\vec{p}\cdot\vec{x}\,')}\right\} e^{-i(E_{p'}-E_p)t} = 0$$

$$\text{b)}\quad \left[\pi^{\dagger}(x'),\, \phi(x)\right]_{t'=t} = -\frac{i}{2}\int \frac{d^3p'\, d^3p}{(2\pi)^3} \left\{\sqrt{\frac{E_{p'}}{E_p}}\left[b(\vec{p}\,'),\, b^{\dagger}(\vec{p})\right] e^{i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'-\vec{p}\cdot\vec{x})} + \sqrt{\frac{E_p}{E_{p'}}}\left[a(\vec{p}\,'),\, a^{\dagger}(\vec{p})\right] e^{i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}-\vec{p}\cdot\vec{x}\,')}\right\} e^{-i(E_{p'}-E_p)t} = -i\,\delta(\vec{x}\,'-\vec{x}), \qquad (2.14)$$

care, de această dată nemaifiind omogen, nu mai conduce în mod necesar la soluţia banală pentru valorile comutatorilor operatorilor b, $b^{\dagger}$ şi a, $a^{\dagger}$. Există câteva aspecte intuitive, de principiu, care concură în obţinerea soluţiei. Astfel, "independenţa de epocă" ne sugerează că *trebuie să avem, cumva*, $E_{p'} = E_p$, adică, cel puţin, $|\vec{p}\,'| = |\vec{p}|$. Distribuţia

$$\delta(\vec{x}\,'-\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{q}\cdot(\vec{x}\,'-\vec{x})}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

subliniază atât importanţa argumentului $(\vec{x}' - \vec{x})$, în sensul necesităţii formării sale în, sau din, argumentele $\vec{p}' \cdot \vec{x}' - \vec{p} \cdot \vec{x}$ şi $\vec{p}' \cdot \vec{x} - \vec{p} \cdot \vec{x}'$ ale exponenţialelor prezente în cele două integrale, cât şi faptul că, prin "dualitate Fourier", caracterul ei singular (în $\vec{x}' = \vec{x}$) trebuie să se regăsească (în spaţiul impulsurilor) în caracterul singular (în $\vec{p}' = \vec{p}$) al celor doi comutatori, $[b(\vec{p}'), b^\dagger(\vec{p})]$ şi $[a(\vec{p}'), a^\dagger(\vec{p})]$. Toate aceste quasi-argumente necontradictorii converg, din punct de vedere logic, spre alegerea

$$\begin{aligned} \left[a(\vec{p}'), a^\dagger(\vec{p})\right] &= \alpha\, \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \\ \left[b(\vec{p}'), b^\dagger(\vec{p})\right] &= \beta\, \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \end{aligned} \tag{2.15}$$

a formei soluţiei sistemului, care devine, astfel,

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha) \int \frac{d^3p}{E_p}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}\,' - \vec{x})} &= 0 \\ (\beta + \alpha) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}\,' - \vec{x})} &= 2\,\delta(\vec{x}' - \vec{x})\,, \end{aligned}$$

reducându-se de fapt la *forma liniar-algebrică* foarte simplă

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= 0 \\ \beta + \alpha &= 2 \end{aligned} \tag{2.16}$$

cu soluţia

$$\beta = \alpha = 1\,. \tag{2.17}$$

Am obţinut, aşadar, că dintre toţi comutatorii operatorilor $\left\{a(\vec{p}),\, b^\dagger(\vec{p}),\ b(\vec{p}),\, a^\dagger(\vec{p})\right\}$ singurii diferiţi de zero sunt

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \left[a(\vec{p}'), a^\dagger(\vec{p})\right] = \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \\ &\text{b)} \quad \left[b(\vec{p}'), b^\dagger(\vec{p})\right] = \delta(\vec{p}' - \vec{p})\,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ca interpretare fizică, semnificaţia şi, după cum vom vedea, consecinţele acestor relaţii de comutare reprezintă nucleul gnostic al Teoriei Cuantice a Câmpurilor. Dacă ne imaginăm spaţiul impulsurilor discretizat într-o infinitate numărabilă de celule, astfel încât "punctul" de vector de poziţie $\vec{p}$ să reprezinte centrul celulei k, atunci în locul relaţiilor (2.18) vom putea scrie

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \left[a_{k'}\,,\, a_k^\dagger\right] = \delta_{k'k} \\ &\text{b)} \quad \left[b_{k'}\,,\, b_k^\dagger\right] = \delta_{k'k}\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Asemănarea dintre acestea şi relaţia de bază

$$[c\,,\, c^\dagger] = 1\,, \tag{2.20}$$

satisfăcută de operatorii de coborâre-ridicare ai oscilatorului liniar armonic (în imagine Heisenberg), este nu numai evidentă, ci şi funcţională, în contextul fizico-matematic mai general al spaţiului Fock în reprezentarea N.

C. Reprezentarea N – număr de particule

Pentru fiecare celulă k, vom avea ca model o pereche de oscilatori cu operatorii de coborâre-ridicare $\left\{a_k\,,\, a_k^\dagger\right\}$, $\left\{b_k\,,\, b_k^\dagger\right\}$ şi stările de bază (fundamentale) $|0\rangle$, $|\bar{0}\rangle$ definite prin

$$a_k|0\rangle = 0\ ,\ \ b_k|\bar{0}\rangle = 0\,. \tag{2.21}$$

Aşa cum operatorul $c^\dagger$ acţionând asupra stării $|0\rangle$ creea starea de primă excitaţie

$$|1\rangle = c^\dagger|0\rangle\,, \tag{2.22}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

exact la fel, operatorii $a_k^\dagger$, $b_k^\dagger$ acţionând asupra stării de vid corespunzătoare, $|0\rangle$, $|\bar{0}\rangle$, vor creea stările

$$\begin{aligned} |1_k\rangle &= a_k^\dagger |0\rangle \\ |\bar{1}_k\rangle &= b_k^\dagger |\bar{0}\rangle \,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Din forma

$$\left[a_k\,,\, b_k^\dagger\right] = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[b_k\,,\, a_k^\dagger\right] = 0 \tag{2.24}$$

a relaţiilor de comutare (2.12), scrise concret pentru celula k, tragem concluzia că cei doi "oscilatori model", împreună cu stările lor cuantice, sunt complet independenţi. Prin convenţie (deocamdată), fiindcă nu am analizat încă sarcina observabilă a câmpului scalar complex cuantificat, vom numi *stări (multi)particulă* stările oscilatorului $\left\{a_k\,,\, a_k^\dagger\right\}$ şi, respectiv, *stări (multi)antiparticulă*, pe cele ale oscilatorului $\left\{b_k\,,\, b_k^\dagger\right\}$. Convenţia se referă la prefixul "anti", termenul de "particulă" fiind corect utilizat. Ce înseamnă, de fapt, starea $|1_k\rangle$? Înseamnă o "primă excitaţie" în celula k. Dar acesteia îi corespunde impulsul $\vec{p}$. Prin urmare, ca sens fizic, nu putem avea altceva decât o particulă de impuls $\vec{p}$. De asemenea, tot din această interpretare, rezultă că stările $|0\rangle$, $|\bar{0}\rangle$ sunt complet lipsite de particule, respectiv antiparticule, de impuls $\vec{p}$, fiind de aceea denumite *stări de vid*, iar operatorul $b_k^\dagger$ va genera o antiparticulă de impuls $\vec{p}$.

Acţiunea repetată de n ori, pentru toate valorile naturale ale lui n, a operatorilor $a_k^\dagger$, $b_k^\dagger$ asupra stărilor de vid corespunzătoare, $|0\rangle$, $|\bar{0}\rangle$, va genera vectorii de stare

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad |n_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k!}} \left(a_k^\dagger\right)^n |0\rangle \\ &\text{b)}\quad |\bar{n}_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k!}} \left(b_k^\dagger\right)^n |\bar{0}\rangle \,, \end{aligned} \tag{2.25}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cu

$$\langle n'_k|n_k\rangle = \delta_{n'n} \ , \ \langle \bar{n}'_k|\bar{n}_k\rangle = \delta_{n'n} \tag{2.26}$$

ai bazelor ortonormale

$$\mathcal{B}_k^{(p)} = \{|n_k\rangle \,|\, (\forall)\, n \in \mathrm{N}\} \ , \ \mathcal{B}_k^{(\bar{p})} = \{|\bar{n}_k\rangle \,|\, (\forall)\, n \in \mathrm{N}\}$$

ale spaţiilor Hilbert corespunzătoare, $\mathcal{H}_k^{(p)}$ şi $\mathcal{H}_k^{(\bar{p})}$, multiparticulă şi, respectiv, multiantiparticulă, de impuls $\vec{p}$. Indicii superiori (p), $(\bar{p})$ nu se referă la impuls, ci la particulă şi antiparticulă. Precum operatorii de coborâre-ridicare $\{c,\, c^\dagger\}$ acţionau asupra stărilor ortonormale $\{|n\rangle\}_{n\in\mathrm{N}}$ ale oscilatorului liniar armonic, tot aşa, operatorii $\left\{a_k, a_k^\dagger\right\}$ şi $\left\{b_k\,,\, b_k^\dagger\right\}$ vor acţiona, respectiv, asupra "stărilor de bază" $|n_k\rangle$, $|\bar{n}_k\rangle$ din cele două spaţii Hilbert $\mathcal{H}_k^{(p)}$, $\mathcal{H}_k^{(\bar{p})}$ după regulile:

$$\begin{array}{lllll}
\text{a)} & a_k|n_k\rangle = \sqrt{n_k}\,|n_k - 1_k\rangle & \Leftrightarrow & \langle n_k|a_k^\dagger = \sqrt{n_k}\,\langle n_k - 1_k| \\
\text{a')} & a_k^\dagger|n_k\rangle = \sqrt{n_k+1}\,|n_k + 1_k\rangle & \Leftrightarrow & \langle n_k|a_k = \sqrt{n_k+1}\,\langle n_k + 1_k| \\
\text{b)} & b_k|\bar{n}_k\rangle = \sqrt{n_k}\,|\bar{n}_k - \bar{1}_k\rangle & \Leftrightarrow & \langle \bar{n}_k|b_k^\dagger = \sqrt{n_k}\,\langle \bar{n}_k - \bar{1}_k| \\
\text{b')} & b_k^\dagger|\bar{n}_k\rangle = \sqrt{n_k+1}\,|\bar{n}_k + \bar{1}_k\rangle & \Leftrightarrow & \langle \bar{n}_k|b_k = \sqrt{n_k+1}\,\langle \bar{n}_k + \bar{1}_k|.
\end{array} \tag{2.27}$$

Deşi repetarea de atâtea ori a indicelui k ar putea fi considerată inutilă, ea este totuşi necesară, deoarece, în spaţiul discretizat al impulsurilor, avem o infinitate numărabilă de celule. Din relaţiile (2.27), modul de construcţie (2.25, 26) a stărilor $|n_k\rangle$, $|\bar{n}_k\rangle$ şi interpretarea fizică a stărilor $|1_k\rangle$, $|\bar{1}_k\rangle$ definite prin relaţia (2.23), tragem următoarele concluzii:

(i) Starea $|n_k\rangle$ este un vector propriu normat,

$$N_k^{(p)}|n_k\rangle = n_k|n_k\rangle \ , \ \langle n_k|n_k\rangle = 1$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

al operatorului "număr de particule de impuls $\vec{p}$",

$$N_k^{(p)} = a_k^\dagger a_k \,, \tag{2.28}$$

valoarea proprie n_k indicând chiar numărul de particule din celula k.

(ii) Starea $|\bar{m}_k\rangle$ este un vector propriu normat

$$N_k^{(\bar{p})}|\bar{m}_k\rangle = m_k|\bar{m}_k\rangle \;\;,\;\; \langle\bar{m}_k|\bar{m}_k\rangle = 1$$

al operatorului "număr de antiparticule de impuls $\vec{p}$",

$$N_k^{(\bar{p})} = b_k^\dagger b_k \,, \tag{2.29}$$

valoarea proprie m_k fiind egală cu numărul de antiparticule din celulă.

(iii) În urma acţiunii asupra unei stări $|n_k\rangle$, operatorul a_k reduce cu o unitate numărul de particule de impuls $\vec{p}$, oferind starea $|n_k - 1_k\rangle$, fiind de aceea denumit *operator de anihilare a unei particule de impuls* $\vec{p}$.

(iv) Conjugatul său hermitic, $a_k^\dagger$, mărind cu o unitate (vezi (2.27.a')) numărul de particule din celula k, este un *operator de creare a unei particule de impuls* $\vec{p}$.

(v) În mod corespunzător, operatorul b_k *anihilează o antiparticulă de impuls* $\vec{p}$, iar

(vi) $b_k^\dagger$ *creează o antiparticulă de impuls* $\vec{p}$.

Evident, când discretizarea este ridicată prin trecerea la continuu, obţinem semnificaţia de *anihilare-creare* pentru operatorii $\{a(\vec{p}), b(\vec{p})\}$

BCU IASI / OPERA UNIVERSITY LIBRARY

şi $\left\{a^\dagger(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p})\right\}$. Subliniem încă o dată, pentru cititorul mai puţin iniţiat, natura principial diferită, în cazul câmpului scalar complex, a stărilor $\{|n_k\rangle\}$, $\{|\bar{n}_k\rangle\}$, pusă în evidenţă de relaţiile de comutare (2.12), alias (2.24) în cadrul celulei k. Operatorii $\{a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p})\}$ acţionează numai asupra stării particulă, iar $\{b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p})\}$ numai asupra celor antiparticulă. De aceea, cum spun fizicienii, în expresiile

$$\phi(x) = \int d^3p \left[a(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) + b^\dagger(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x)\right]$$
$$\phi^\dagger(x) = \int d^3p \left[b(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) + a^\dagger(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x)\right]$$

ale operatorilor de câmp ϕ şi $\phi^\dagger$, operatorii de anihilare-creare sunt "dispuşi în cruce" : $a(\vec{p})$ anihilează particula, iar $b^\dagger(\vec{p})$ creează antiparticula. Numai în cazul cuantificării câmpurilor reale particula coincide cu antiparticula, deoarece, operatorul de câmp trebuind să fie hermitic

$$\phi^\dagger(x) = \phi(x) , \tag{2.30}$$

rezultă

$$b(\vec{p}) = a(\vec{p}) \Leftrightarrow b^\dagger(\vec{p}) = a^\dagger(\vec{p}) . \tag{2.31}$$

Relaţia de comutare (2.12), privită prin prisma relaţiilor esenţiale (de comutare) (2.18) şi a identităţilor (2.31), nu este violată, deoarece ea, împreună cu (2.18.b), practic nu mai există. Densitatea de lagrangeian a scalarului real fiind

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2}\left[\eta^{ik}\,\phi_{,i}\,\phi_{,k} + m^2\,\phi^2\right] , \tag{2.32}$$

avem un singur impuls generalizat

$$\pi = \phi_{,4} , \tag{2.33}$$

canonic asociat coordonatei generalizate ϕ şi, în consecinţă, numărul relaţiilor de comutare la timpi egali se înjumătăţeşte faţă de cazul

scalarului complex, având numai

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad [\phi(x')\,,\,\phi(x)]_{t'=t} = 0 \\ &\text{b)}\quad [\pi(x')\,,\,\pi(x)]_{t'=t} = 0 \\ &\text{c)}\quad [\pi(x')\,,\,\phi(x)]_{t'=t} = -i\,\delta(\vec{x}' - \vec{x})\,, \end{aligned} \tag{2.34}$$

ceea ce conduce la algebra

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad [a(\vec{p}')\,,\,a(\vec{p})] = 0 \\ &\text{b)}\quad \left[a^\dagger(\vec{p}')\,,\,a^\dagger(\vec{p})\right] = 0 \\ &\text{c)}\quad \left[a(\vec{p}')\,,\,a^\dagger(\vec{p})\right] = \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \end{aligned} \tag{2.35}$$

(doar) a operatorilor de anihilare-creare a cuantelor (sau particulelor asociate) câmpului scalar real

$$\phi(x) = \int d^3p \left[a(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) + a^\dagger(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x)\right]\,. \tag{2.36}$$

Revenind la "scalarul complex" şi la demersul interpretărilor fizice pentru relaţiile (2.19), (2.25-29) şi concluziile $(i - vi)$, pentru celula k, să vedem ce se întâmplă când luăm în considerare toate celulele $(k = 1, 2, ...)$ din spaţiul impulsurilor. Cum în fiecare celulă avem câte un spaţiu Hilbert (infinit dimensional) $\mathcal{H}_k^{(p)}$, $\mathcal{H}_k^{(\bar{p})}$, respectiv multiparticulă-antiparticulă şi, în spiritul *interpretării Max Born*, este valabil produsul probabilităţilor independente, rezultă că spaţiul Hilbert general multiparticulă de orice impuls $\vec{p}$ – deci peste toate celulele din spaţiul discretizat al impulsurilor – (în engleză, *the multiparticle Fock space*), va fi dat de produsul tensorial

$$\mathcal{H}_{(p)} = \otimes_k \mathcal{H}_k^{(p)}\,. \tag{2.37}$$

Baza ortonormală a acestui spaţiu este formată din stările proprii $\{|\,n_1, \ldots, n_k, \ldots\rangle\,,\ (\forall)\, k \in \mathbf{N}^*$ şi $n_k \in \mathbf{N}\}$

$$N_{(p)}\,|\,n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\rangle = (\sum_{k\in\mathbf{N}^*} n_k)|\,n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\rangle\,, \tag{2.38}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cu

$$\langle \dots n'_{k'} \dots | \dots n_k \dots \rangle = \dots \delta_{n'_{k'}, n_k} \dots \tag{2.39}$$

ale *operatorului număr (total) de particule*

$$N_{(p)} = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} N_k^{(p)} \ , \ \text{cu} \ N_k^{(p)} = a_k^\dagger a_k \ . \tag{2.40}$$

În mod analog, *spaţiul Hilbert multiantiparticulă general (de orice impuls $\vec{p}$)* (în engleză, *the multi-antiparticle Fock space*), se construieşte prin produsul tensorial

$$\mathcal{H}_{(\bar{p})} = \otimes_k \mathcal{H}_k^{(\bar{p})} \tag{2.41}$$

şi este "subîntins", ca bază ortonormală, de către toate stările proprii $\{|\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_k, \dots\rangle| \ (\forall)\, k \in \mathbf{N}^* \text{ şi } m_k \in \mathbf{N}\}$

$$N_{(\bar{p})} |\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_k, \dots\rangle = (\sum_{k \in \mathbf{N}^*} m_k) |\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_k, \dots\rangle \ , \tag{2.42}$$

cu

$$\langle \dots m'_{k'} \dots | \dots m_k \dots \rangle = \dots \delta_{m'_{k'}, m_k} \dots \tag{2.43}$$

ale *operatorului număr (total) de antiparticule*

$$N_{(\bar{p})} = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} N_k^{(\bar{p})} \ , \ \text{cu} \ N_k^{(\bar{p})} = b_k^\dagger b_k \ . \tag{2.44}$$

Evident, ca aspect matematic esenţial din punct de vedere funcţional, existenţa stărilor proprii ortonormale multi-particulă-antiparticulă

$$|\dots n_k \dots\rangle, |\dots \bar{n}_k \dots\rangle$$

comune tuturor "operatorilor de număr" $N_k^{(p)}$, $N_k^{(\bar{p})}$ din fiecare celulă $k \in \mathbf{N}^*$ este posibilă, deoarece toţi aceşti operatori comută

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \left[N_{k'}^{(p)}, N_k^{(p)}\right] = 0 \\ &\text{b)} \quad \left[N_{k'}^{(\bar{p})}, N_k^{(\bar{p})}\right] = 0 \\ &\text{c)} \quad \left[N_{k'}^{(\bar{p})}, N_k^{(p)}\right] = 0 \ , \ (\forall)\, k', k \in \mathbf{N}^* \ . \end{aligned} \tag{2.45}$$

BCU IASI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Relaţia (2.45.c) rezultă imediat din relaţia de comutare (2.12), scrisă sub forma (discretizată)

$$\left[a_{k'}\,,\,b_k^\dagger\right] = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[b_{k'}\,,\,a_k^\dagger\right] = 0\,,$$

iar pentru (2.45.a, b) avem

$$\begin{aligned}
\left[N_{k'}^{(p)}\,,\,N_k^{(p)}\right] &= a_{k'}^\dagger a_{k'} a_k^\dagger a_k - a_k^\dagger a_k a_{k'}^\dagger a_{k'} = \\
&= a_{k'}^\dagger \left(a_k^\dagger a_{k'} + \delta_{k'k}\right) a_k - a_k^\dagger \left(a_{k'}^\dagger a_k + \delta_{kk'}\right) a_{k'} = \\
&= a_k^\dagger a_{k'}^\dagger a_{k'} a_k + a_k^\dagger a_k - a_k^\dagger a_{k'}^\dagger a_{k'} a_k - a_k^\dagger a_k \equiv 0 \\
\left[N_{k'}^{(\bar{p})}\,,\,N_k^{(p)}\right] &= b_{k'}^\dagger b_{k'} b_k^\dagger b_k - b_k^\dagger b_k b_{k'}^\dagger b_{k'} = \\
&= b_{k'}^\dagger \left(b_k^\dagger b_{k'} + \delta_{k'k}\right) b_k - b_k^\dagger \left(b_{k'}^\dagger b_k + \delta_{kk'}\right) b_{k'} = \\
&= b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k'} b_k + b_k^\dagger b_k - b_k^\dagger b_{k'}^\dagger b_{k'} b_k - b_k^\dagger b_k \equiv 0
\end{aligned}$$

utilizând relaţiile esenţiale de comutare (2.19.a, b).

Spaţiul Fock complet (în sensul multi-particulă-antiparticulă), în reprezentarea N (număr de particule), se defineşte ca

$$\mathcal{F} = \mathcal{H}_{(p)} \otimes \mathcal{H}_{(\bar{p})}\,, \tag{2.46}$$

având baza (ortonormală) formată din vectorii de stare

$$|\ldots n_k \ldots ; \ldots \bar{m}_k \ldots\rangle = |\ldots n_k \ldots\rangle |\ldots m_k \ldots\rangle\,, \tag{2.47}$$

cu proprietatea

$$\begin{aligned}
\langle \ldots \bar{m}'_{k'} \ldots ; \ldots n'_{k'} \ldots | \ldots n_k \ldots ; \ldots \bar{m}_k \ldots\rangle &= \\
= \ldots \delta_{n'_{k'}, n_k} \ldots\ldots \delta_{\bar{m}'_{k'}, \bar{m}_k} \ldots
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Inversarea în vectorul *bra* a poziţiei stărilor particulă-antiparticulă faţă de poziţia aceloraşi stări în vectorul *ket* nu este obligatorie, sub aspectul convenţiei de scriere, însă o serie de lucrări recente o preferă ca

regulă mnemotehnică, pentru "alcătuirea multi-particulă-antiparticulă a spaţiului complet", prin analogie cu inversarea ordinii operatorilor şi a stărilor abstracte, în general, sub acţiunea conjugării hermitice. Starea de vid a întregului spaţiu Fock se scrie simplu $|0;\bar{0}\rangle$, sau chiar $|0\rangle$,

$$|0;\bar{0}\rangle = |\ldots 0\ldots;\ldots 0\ldots\rangle \tag{2.49}$$

şi este evident că, din punct de vedere fizic, ea reprezintă acea stare lipsită complet atât de particule, cât şi de antiparticule. Matematic, ea este starea cuantică Lorentz-invariantă anihilată (complet) de toţi operatorii $\{a_k\,,\,b_k\}_{k\in\mathbf{N}^*}$, adică

$$a_k|0;\bar{0}\rangle = 0\ ,\ b_k|0;\bar{0}\rangle = 0\,, \tag{2.50}$$

pentru toate valorile lui k şi, după cum se poate demonstra (vezi de exemplu [53]), este unică. În fine, prin generalizarea relaţiilor (2.27), în sensul "implicării" stărilor ortonormale multi-particulă-antiparticulă ca bază a spaţiului Fock (în reprezentarea N), obţinem regulile "complete" de acţiune a operatorilor de anihilare-creare $\left\{a_k\,,\,a_k^\dagger;\,b_k\,,\,b_k^\dagger\right\}_{k\in\mathbf{N}^*}$ (care dezvoltă operatorul de câmp în spaţiul discretizat al impulsurilor) asupra acestor stări (la dreapta)

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad a_k|\ldots n'_{k'}\ldots;\ldots\bar{m}'_{k'}\ldots\rangle = \\
&\qquad = \sqrt{n_k}\,|\ldots, n_{k-1}\,, n_k - 1_k\,, n_{k+1}\,,\ldots;\ldots\bar{m}'_{k'}\ldots\rangle \\
&\text{a')} \quad a_k^\dagger|\ldots n'_{k'}\ldots;\ldots\bar{m}'_{k'}\ldots\rangle = \\
&\qquad = \sqrt{n_k+1}\,|\ldots, n_{k-1}\,, n_k + 1_k\,, n_{k+1}\,,\ldots;\ldots\bar{m}'_{k'}\ldots\rangle \\
&\text{b)} \quad b_k|\ldots n'_{k'}\ldots;\ldots\bar{m}'_{k'}\ldots\rangle = \\
&\qquad = \sqrt{m_k}\,|\ldots n'_{k'}\ldots;\ldots, \bar{m}_{k-1}\,, \bar{m}_k - \bar{1}_k\,, \bar{m}_{k+1}\,,\ldots\rangle \\
&\text{b')} \quad b_k^\dagger|\ldots n'_{k'}\ldots;\ldots\bar{m}'_{k'}\ldots\rangle = \\
&\qquad = \sqrt{m_k+1}\,|\ldots n'_{k'}\ldots;\ldots, \bar{m}_{k-1}\,, \bar{m}_k + \bar{1}_k\,, \bar{m}_{k+1}\,,\ldots\rangle
\end{aligned} \tag{2.51}$$

şi respectiv, conjugatele lor hermitice (pentru acţiunea la stânga)

$$
\begin{aligned}
\text{a)}\quad & \langle \ldots \bar{m}'_{k'} \ldots ; \ldots n'_{k'} \ldots | a_k^\dagger = \\
& = \sqrt{n_k}\, \langle \ldots \bar{m}'_{k'} \ldots ; \ldots , n_{k-1} , n_k - 1_k , n_{k+1} , \ldots | \\
\text{a}')\quad & \langle \ldots \bar{m}'_{k'} \ldots ; \ldots n'_{k'} \ldots | a_k = \\
& = \sqrt{n_k + 1}\, \langle \ldots \bar{m}'_{k'} \ldots ; \ldots , n_{k-1} , n_k + 1_k , n_{k+1} , \ldots | \\
\text{b)}\quad & \langle \ldots \bar{m}'_{k'} \ldots ; \ldots n'_{k'} \ldots | b_k^\dagger = \\
& = \sqrt{m_k}\, \langle \ldots , \bar{m}_{k-1} , \bar{m}_k - \bar{1}_k , \bar{m}_{k+1} , \ldots ; \ldots n'_{k'} \ldots | \\
\text{b}')\quad & \langle \ldots \bar{m}'_{k'} \ldots ; \ldots n'_{k'} \ldots | b_k = \\
& = \sqrt{m_k + 1}\, \langle \ldots , \bar{m}_{k-1} , \bar{m}_k + \bar{1}_k , \bar{m}_{k+1} , \ldots ; \ldots n'_{k'} \ldots | .
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

Deoarece, formal, în metoda cuantificării canonice a câmpurilor, rolul dominant revine operatorilor de anihilare-creare, operatorului număr de particule şi observabilelor de tipul impulsului, energiei, sarcinii (electrice sau generalizate) şi spinului (împreună, bineînţeles, cu momentul cinetic total), forma concretă a stărilor cuantice ale sistemului în spaţiul Fock este de mai mică importanţă tehnică. De aceea am preferat în expunerea subiectului *reprezentarea N*, care este intuitiv mai accesibilă şi suficient de clară. Desigur, într-un context fizico-matematic mai general, de principiu, care surprinde în detaliu natura, proprietăţile şi expresiile concrete ale aşa-numitei *funcţionale de undă*, ca stare cuantică generalizată în spaţiul Fock, problema este ceva mai complicată. Există, în acest sens al coerenţei şi rigurozităţii formalismului matematic, aşa-numita *reprezentare F* (de la *funcţională*) a spaţiului Fock, care pune accentul pe distribuţia statistică a particulelor şi antiparticulelor în spaţiul de configuraţie şi nu în cel al impulsurilor, "după energie", cum face *reprezentarea N*. Pentru detalii şi orice fel de aspecte tehnico-teoretice asupra acestui subiect, recomandăm cititorului interesat lucrările [53, 69].

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

D. Impulsul şi energia câmpului scalar cuantificat

Aceşti doi operatori autoadjuncţi (definiţi pe şi cu valori în spaţiul Fock al stărilor multi-particulă-antiparticulă) sunt sarcinile generalizate (I.3.45)

$$\text{a)}\quad P^{\mu} = \int T^{\mu 4}\, dS_4$$

$$\text{b)}\quad H = \int T^{44}\, dS_4\,,\ dS_4 = I_{\frac{\partial}{\partial t}} d\Omega = d^3x\,, \tag{2.53}$$

ale densităţii de curent simplectic conservativ

$$\text{a)}\quad T_{ik}[\phi^{\dagger},\phi] = \phi^{\dagger}{}_{,i}\,\phi_{,k} + \phi^{\dagger}{}_{,k}\,\phi_{,i} - \eta_{ik}\left(\eta^{lm}\,\phi^{\dagger}{}_{,l}\,\phi_{,m} + m^2\,\phi^{\dagger}\phi\right)$$

$$\text{b)}\quad T^{ik}{}_{,k} = 0 \tag{2.54}$$

de tip "Noether - extern" (faţă de subgrupul translaţiilor spaţio-temporale ale grupului Poincaré) pentru câmpul scalar complex ϕ. În cazul scalarului real, din

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2}\,\eta^{lm}\,\phi_{,l}\,\phi_{,m} + \frac{1}{2}\,m^2\,\phi^2$$

şi

$$T_{ik}[\phi] = 2\,\frac{\partial \mathcal{L}[\phi]}{\partial \eta^{ik}} - \eta_{ik}\,\mathcal{L}[\phi]\,,$$

vom avea drept curent simplectic conservativ tensorul impuls-energie

$$T_{ik}[\phi] = \phi_{,i}\,\phi_{,k} - \frac{1}{2}\,\eta_{ik}\left(\eta^{lm}\,\phi_{,l}\,\phi_{,m} + m^2\,\phi^2\right)\,. \tag{2.55}$$

Din (2.54.a), cum $\eta_{\mu 4} = 0$, obţinem pentru componentele operatorului 3-vectorial al impulsului scalarului complex forma

$$P_{\mu} = -\int d^3x\left(\phi^{\dagger}{}_{,\mu}\,\phi_{,4} + \phi^{\dagger}{}_{,4}\,\phi_{,\mu}\right)\,, \tag{2.56}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică, utilizând expresiile (2.7.a,b) ale operatorilor de câmp $\phi, \phi^\dagger$, soluţii exacte ale ecuaţiei Gordon, şi proprietatea (1.95) de comportare a modurilor de frecvenţă $f_{\vec{p}}(x)$, $f^*_{\vec{p}}(x)$ sub acţiunea operatorului ∂_i,

$$
\begin{aligned}
P_\mu = & -\int d^3x\, d^3p'\, d^3p \\
& \left\{ p'_\mu E_p \left[b(\vec{p}') f_{\vec{p}'}(x) - a^\dagger(\vec{p}') f^*_{\vec{p}'}(x) \right] \left[a(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) - b^\dagger(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x) \right] + \right. \\
& \left. + p_\mu E_{p'} \left[b(\vec{p}') f_{\vec{p}'}(x) - a^\dagger(\vec{p}') f^*_{\vec{p}'}(x) \right] \left[a(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) - b^\dagger(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x) \right] \right\} = \\
= & -\int d^3x\, d^3p' d^3p \left(p'_\mu E_p + p_\mu E_{p'} \right) \\
& \left[b(\vec{p}') f_{\vec{p}'}(x) - a^\dagger(\vec{p}') f^*_{\vec{p}'}(x) \right] \left[a(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) - b^\dagger(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x) \right]. \qquad (2.57)
\end{aligned}
$$

Integrând pe $\mathbf{R}^3$ (după $\vec{x}$), în baza proprietăţii (1.99), obţinem

$$
\begin{aligned}
P_\mu = & \int \frac{d^3p' d^3p}{2\sqrt{E_{p'} E_p}} \left(p'_\mu E_p + p_\mu E_{p'} \right) \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \\
& \left[a^\dagger(\vec{p}') a(\vec{p}) + b(\vec{p}') b^\dagger(\vec{p}) \right] - \\
& - \int \frac{d^3p' d^3p}{2\sqrt{E_{p'} E_p}} \left(p'_\mu E_p + p_\mu E_{p'} \right) \delta(\vec{p}' + \vec{p}) \\
& \left[b(\vec{p}') a(\vec{p}) e^{-2iE_p t} + a^\dagger(\vec{p}') b^\dagger(\vec{p}) e^{2iE_p t} \right] \qquad (2.58)
\end{aligned}
$$

şi "filtrând" $\vec{p}'$ la $\vec{p}$ în prima integrală şi, respectiv, $\vec{p}'$ la $-\vec{p}$ în a doua, rămânem cu expresia

$$
P_\mu = \int d^3p\, p_\mu \left[a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) + b(\vec{p}) b^\dagger(\vec{p}) \right], \qquad (2.59)
$$

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

deoarece

$$\int \frac{d^3p'd^3p}{2\sqrt{E_{p'}E_p}} \left(p'_\mu E_p + p_\mu E_{p'}\right) \delta(\vec{p}' + \vec{p})$$
$$\left[b(\vec{p}')a(\vec{p})e^{-2iE_pt} + a^\dagger(\vec{p}')b^\dagger(\vec{p})e^{2iE_pt}\right] \doteq$$
$$= -\int \frac{d^3p}{2} (p_\mu - p_\mu)\left[b(\vec{p}')a(\vec{p})e^{-2iE_pt} + a^\dagger(\vec{p}')b^\dagger(\vec{p})e^{2iE_pt}\right] \equiv 0$$

(dat fiind că la $\vec{p}' = -\vec{p}$ avem $E_{p'} = E_p$).

Expresia (2.59) este forma prefinală a rezultatului pe care îl căutăm pentru *observabila impuls* a câmpului cuantificat. Ea conţine următoarea problemă: valoarea medie pe starea de vid $|0;\bar{0}\rangle$ (particulă-antiparticulă) a componentei P_μ, dată de (2.59), este aparent divergentă, deoarece

$$\begin{aligned} P_\mu^{(0)} &= \langle\bar{0};0|P_\mu|0;\bar{0}\rangle = \\ &= \int d^3p\, p_\mu \left[\langle\bar{0};0|a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p})|0;\bar{0}\rangle + \langle\bar{0};0|b(\vec{p})b^\dagger(\vec{p})|0;\bar{0}\rangle\right] = \\ &= \int d^3p\, p_\mu \left[\langle\bar{0}|\bar{0}\rangle\langle 0|a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p})|0\rangle + \langle\bar{0}|b(\vec{p})b^\dagger(\vec{p})|\bar{0}\rangle\langle 0|0\rangle\right] = \\ &= \int d^3p\, p_\mu \left[\langle\bar{0}|\bar{0}\rangle \cdot 0 + \langle\bar{0}|b(\vec{p})b^\dagger(\vec{p})|\bar{0}\rangle\right] = \int d^3p\, p_\mu \langle\bar{1}_{\vec{p}}|\bar{1}_{\vec{p}}\rangle\,, \end{aligned}$$

adică

$$P_\mu^{(0)} = \int d^3p\, p_\mu \delta(\vec{p} - \vec{p}) = \delta(0)\int d^3p\, p_\mu\,. \qquad (2.60)$$

Această mărime, purtând numele de *impuls de zero*, este prima de acest tip pe care o întâlnim în cadrul metodei canonice de cuantificare a câmpurilor şi reclamă o tratare mai amănunţită pentru justificarea

BCU "ŞTIINŢA" UNIVERSITY LIBRARY

eliminării ei. Lucrând cu coordonate sferice pe spaţiul impulsurilor,

$$\begin{aligned} p_1 &= |\vec{p}| \sin\alpha \cos\beta \\ p_2 &= |\vec{p}| \sin\alpha \sin\beta \\ p_3 &= |\vec{p}| \cos\alpha \\ d^3p &= |\vec{p}|^2 \sin\alpha \, d|\vec{p}| \, d\alpha \, d\beta \,, \end{aligned} \tag{2.61}$$

avem

$$\begin{aligned} \int d^3p \, p_1 &= \int |\vec{p}|^3 d|\vec{p}| \int_0^\pi \sin^2\alpha \, d\alpha \int_0^{2\pi} \cos\beta \, d\beta \equiv 0 \\ \int d^3p \, p_2 &= \int |\vec{p}|^3 d|\vec{p}| \int_0^\pi \sin^2\alpha \, d\alpha \int_0^{2\pi} \sin\beta \, d\beta \equiv 0 \\ \int d^3p \, p_3 &= 2\pi \int |\vec{p}|^3 d|\vec{p}| \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \, d\alpha \equiv 0 \,, \end{aligned} \tag{2.62}$$

adică impulsul de zero este aparent indeterminat, de forma

$$P_\mu^{(0)} = \delta(0) \cdot 0 \,. \tag{2.63}$$

Ridicarea acestei indeterminări se face prin aşa-numitul *procedeu de regularizare.* Valoarea infinită a funcţionalei $\delta(0)$ provine din

$$\delta(0) = \delta(\vec{p} - \vec{p}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{p}-\vec{p})\cdot\vec{x}} = \int_{R^3} \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \,. \tag{2.64}$$

Regularizarea presupune considerarea întâi a unui domeniu compact $D \subset R^3$ (cu frontieră netedă pe porţiuni) de volum (arbitrar)

$$V = \int_D d^3x < \infty \tag{2.65}$$

şi luarea limitei $V \to \infty$ la sfârşitul celorlalte calcule intermediare. Astfel, $\delta(0)$ regularizat se scrie

$$[\delta(0)] = \frac{V}{(2\pi)^3} \tag{2.66}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi avem, pentru *impulsul de zero regularizat*,

$$\left[P_\mu^{(0)}\right] = \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot 0 \equiv 0 \,. \tag{2.67}$$

Pentru $V \to \infty$ obţinem, evident,

$$P_\mu^{(0)} = \lim_{V\to\infty} \left\{ [\delta(0)] \int d^3p\, p_\mu \right\} = \lim_{V\to\infty} \left[P_\mu^{(0)}\right] = 0 \,, \tag{2.68}$$

adică, de fapt, impulsul de zero (al câmpului cuantificat) este absent; de aceea, spunem că divergenţa este "aparentă". Totuşi, ca potenţialitate, ce reprezintă ea, de unde apare şi de ce (fizic) este zero? Interpretând în sens strict acţiunea produsului $b(\vec{p})\, b^\dagger(\vec{p})$ asupra stării de vid-antiparticulă $|\bar{0}\rangle$ avem

$$b^\dagger(\vec{p})|\bar{0}\rangle = |\bar{1}_{\vec{p}}\rangle$$

şi

$$b(\vec{p})b^\dagger(\vec{p})|\bar{0}\rangle = b(\vec{p})|\bar{1}_{\vec{p}}\rangle = \delta(\vec{p}-\vec{p})\,|\bar{0}\rangle \,,$$

astfel încât

$$\langle\bar{0}|b(\vec{p})b^\dagger(\vec{p})|\bar{0}\rangle = \delta(\vec{p}-\vec{p})\,\langle\bar{0}|\bar{0}\rangle = \delta(0) \,.$$

Prin urmare este vorba de *creare şi anihilare instantanee* a unei antiparticule de impuls $\vec{p}$ din şi în starea de vid. Avem de a face cu ceea ce fizicienii numesc un "proces virtual (pe starea de vid)". Acauzal prin caracterul său instantaneu, el este fizic inobservabil (de aici şi termenul de "virtual"). Cele două stări, iniţială şi finală, coincid şi sunt unic reprezentate pe starea de vid, adică, practic, "nu s-a întâmplat nimic". Valoare zero a integralei de volum (în spaţiul impulsurilor) a lui $\vec{p}$ exprimă fizic caracterul omogen şi izotrop al vidului în spaţiu-timpul plat, "încărcat" cu câmpuri libere, suficient de slabe şi fără interacţie. Detalierea fizico-matematică a relaţiilor ce există între ultimele sublinieri

făcute depăşeşte cu mult cadrul lucrării de faţă, deoarece ar trebui discutate atât tehnicile de "renormare" a câmpurilor self-interactive (*gauge* neabeliene sau de tip superstring), cât şi renormarea, în general, a câmpurilor cuantice interactive pe spaţiu-timp curb (în prezenţa gravitaţiei). Dintre lucrările de referinţă în acest domeniu, recomandăm [21] şi [5], iar asupra aspectelor semi-intuitive ce stau la baza tratării "mărimilor de zero" şi a necesităţii renormării vom reveni şi noi, mai pe larg, în capitolul următor.

Oricum, în cazul câmpurilor libere suficient de slabe, pentru a nu altera iremediabil geometria minkowskiană a spaţiu-timpului, procedeul de "ordonare normală" a operatorilor de creare-anihilare este suficient pentru eliminarea mărimilor de zero. În esenţă, este vorba de următoarea observaţie foarte simplă: dacă în locul ordonării $b(\vec{p})b^\dagger(\vec{p})$ a operatorilor de anihilare-creare, ca acţiune la dreapta, am avea ordonarea $b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})$, atunci valoarea medie pe starea de vid $|\vec{0}\rangle$ ar fi zero, exact aşa cum trebuie, dacă avem în vedere vidul obişnuit. Aşadar, putem introduce operaţia N[...], echivalent notată şi cu : ... : , conform căreia, ca rezultat al acţiunii ei la dreapta (asupra unei stări *ket*) întâi sunt "activaţi" operatorii de anihilare şi apoi cei de creare. Cum spun, pe scurt, fizicienii, "întâi distrugem şi apoi creăm". Concret, în cazul exemplului de faţă, vom avem

$$\mathrm{N}\left[b(\vec{p})b^\dagger(\vec{p})\right] = :b(\vec{p})b^\dagger(\vec{p}): = b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})\,. \tag{2.69}$$

Din

$$\left[b(\vec{p}\,'),\, b^\dagger(\vec{p})\right] = \delta(\vec{p}\,' - \vec{p})$$

pentru $\vec{p}\,' = \vec{p}$ rezultă

$$\mathrm{N}\left[b(\vec{p})b^\dagger(\vec{p})\right] = b(\vec{p})b^\dagger(\vec{p}) - \delta(0) = b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})\,, \tag{2.70}$$

adică ordonarea normală a acţiunii creare-anihilare este echivalentă cu substragerea din "ordonarea exactă" (a acţiunilor de anihilare-creare)

exact a părţii divergente $\delta(0)$. De aceea, obţinem (prin ordonarea normală) un rezultat finit ... Cu mai multe detalii privind proprietăţile "produsului normal" N[...] vom reveni curând, în paragraful următor. Deocamdată, pentru observabila impuls a câmpului scalar complex cuantificat, obţinem din expresia (2.59) ordonarea normală (2.70) şi rezultatul (2.68)

$$P_\mu = \int d^3p\, p_\mu \left[a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})\right] + \delta(0)\int d^3p\, p_\mu = \\ = :P_\mu: + P_\mu^{(0)} = :P_\mu: , \tag{2.71}$$

adică, operatorul impuls (în ordonare normală) al câmpului cuantificat are expresia

$$:P_\mu: \doteq \int p_\mu \left[N^{(p)}(\vec{p}) + N^{(\bar{p})}(\vec{p})\right] d^3p . \tag{2.72}$$

Aceasta semnifică însumarea cuantelor de impuls $\vec{p}$ ale fiecărei particule, respectiv antiparticule, "introduse" de operatorii număr de particule-antiparticule de impuls $\vec{p}$

$$N^{(p)}(\vec{p}) = a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) \\ N^{(\bar{p})}(\vec{p}) = b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p}) . \tag{2.73}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru hamiltonianul (2.53.b), din (2.54.a), operatorii de câmp (2.7) şi proprietatea (1.95), avem

$$
\begin{aligned}
H &= \int d^3x \left[2\phi^\dagger{}_{,4}\phi_{,4} + \eta^{lm}\phi^\dagger{}_{,l}\phi_{,m} + m^2\phi^\dagger\phi\right] = \\
&= \int d^3x \left[\phi^\dagger{}_{,4}\phi_{,4} + \delta^{\mu\nu}\phi^\dagger{}_{,\mu}\phi_{,\nu} + m^2\phi^\dagger\phi\right] = \\
&= \int d^3x\, d^3p' d^3p \Big\{ -E_{p'}E_p \left[b(\vec{p}\,')f_{\vec{p}\,'}(x) - a^\dagger(\vec{p}\,')f^*_{\vec{p}\,'}(x)\right] \\
&\quad \left[a(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) - b^\dagger(\vec{p})f^*_{\vec{p}}(x)\right] - \\
&\quad - \delta^{\mu\nu}p'_\mu p_\nu \left[b(\vec{p}\,')f_{\vec{p}\,'}(x) - a^\dagger(\vec{p}\,')f^*_{\vec{p}\,'}(x)\right] \\
&\quad \left[a(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) - b^\dagger(\vec{p})f^*_{\vec{p}}(x)\right] + \\
&\quad + m^2 \left[b(\vec{p}\,')f_{\vec{p}\,'}(x) + a^\dagger(\vec{p}\,')f^*_{\vec{p}\,'}(x)\right] \\
&\quad \left[a(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) + b^\dagger(\vec{p})f^*_{\vec{p}}(x)\right]\Big\}\,, \qquad (2.74)
\end{aligned}
$$

adică, integrând pe $\mathbf{R}^3$ după $(x^\sigma)_{\sigma=\overline{1,3}}$ în baza proprietăţilor (1.99),

$$
\begin{aligned}
H = &-\int \frac{d^3p' d^3p}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\,\delta(\vec{p}\,' + \vec{p}) \\
&\left[E_{p'}E_p + \delta^{\mu\nu}p'_\mu p_\nu - m^2\right] b(\vec{p}\,')a(\vec{p})\, e^{-2iE_pt} - \\
&- \int \frac{d^3p' d^3p}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\,\delta(\vec{p}\,' + \vec{p}) \\
&\left[E_{p'}E_p + \delta^{\mu\nu}p'_\mu p_\nu - m^2\right] a^\dagger(\vec{p}\,')b^\dagger(\vec{p})\, e^{2iE_pt} + \\
&+ \int \frac{d^3p' d^3p}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\,\delta(\vec{p}\,' - \vec{p}) \\
&\left[E_{p'}E_p + \delta^{\mu\nu}p'_\mu p_\nu + m^2\right]\left[a^\dagger(\vec{p}\,')a(\vec{p}) + b(\vec{p}\,')b^\dagger(\vec{p})\right]. \qquad (2.75)
\end{aligned}
$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Fiecare din primele două integrale este zero, deoarece, filtrând $\vec{p}'$ la $-\vec{p}$ din cauza funcţionalei $\delta(\vec{p}'+\vec{p})$, avem

$$
\begin{aligned}
&-\int \frac{d^3p'd^3p}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\,\delta(\vec{p}'+\vec{p})\\
&\left[E_{p'}E_p+\delta^{\mu\nu}p'_\mu p_\nu-m^2\right]b(\vec{p}')a(\vec{p})\,e^{-2iE_pt}=\\
&=-\int\frac{d^3p}{2E_p}\left(E_p^2-|\vec{p}|^2-m^2\right)b(-\vec{p})a(\vec{p})\,e^{-2iE_pt}=\\
&=-\int\frac{d^3p}{2E_p}\left(E_p^2-E_p^2\right)b(-\vec{p})a(\vec{p})\,e^{-2iE_pt}\equiv 0\,,\\
&-\int \frac{d^3p'd^3p}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\,\delta(\vec{p}'+\vec{p})\\
&\left[E_{p'}E_p+\delta^{\mu\nu}p'_\mu p_\nu-m^2\right]a^\dagger(\vec{p}')b^\dagger(\vec{p})\,e^{2iE_pt}=\\
&=-\int\frac{d^3p}{2E_p}\left(E_p^2-|\vec{p}|^2-m^2\right)a^\dagger(-\vec{p})b^\dagger(\vec{p})\,e^{2iE_pt}=\\
&=-\int\frac{d^3p}{2E_p}\left(E_p^2-E_p^2\right)a^\dagger(-\vec{p})b^\dagger(\vec{p})\,e^{2iE_pt}\equiv 0\,,
\end{aligned}
$$

astfel încât rămânem cu expresia complet determinată de a treia integrală,

$$H=\int d^3p\,E_p\left[a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p})+b(\vec{p})b^\dagger(\vec{p})\right]\,, \tag{2.76}$$

din care vom substrage partea divergentă

$$H^{(0)}=\langle\bar{0};0|H|0;\bar{0}\rangle=\int d^3p\,E_p\langle\bar{0}|b(\vec{p})b^\dagger(\vec{p})|\bar{0}\rangle\,,$$

adică

$$H^{(0)}=\delta(0)\int d^3p\,E_p\,, \tag{2.77}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

reprezentând *energia de zero a câmpului scalar complex cuantificat.* Avem atunci

$$H - H^{(0)} = \int d^3p\, E_p \left[a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) + b(\vec{p})b^\dagger(\vec{p}) - \delta(0)\right], \tag{2.78}$$

ceea ce înseamnă, prin aplicarea ordonării normale (2.70),

$$:H: = H - H^{(0)}, \tag{2.79}$$

cu

$$:H: = \int d^3p\, E_p \left[N^{(p)}(\vec{p}) + N^{(\bar{p})}(\vec{p})\right] \tag{2.80}$$

drept expresie a hamiltonianului "finit" (în ordonare normală) al câmpului scalar complex cuantificat.

În cadrul "reprezentării N" a spaţiului Fock, cele două formule, (2.72) şi (2.80), se bucură, am putea spune, de o "transparenţă absolută". Discretizând din nou spaţiul impulsurilor, putem reprezenta impulsul şi hamiltonianul câmpului (în ordonare normală) sub forma

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad :\vec{P}: = \sum_k \vec{p}_k \left[N_k^{(p)} + N_k^{(\bar{p})}\right], \\ &\text{b)} \quad :H: = \sum_k E_k \left[N_k^{(p)} + N_k^{(\bar{p})}\right], \end{aligned} \tag{2.81}$$

unde

$$N_k^{(p)} = a_k^\dagger a_k \ , \quad N_k^{(\bar{p})} = b_k^\dagger b_k$$

sunt, respectiv, operatorii număr de particule-antiparticule ocupând celula k. Prin urmare, valorile medii ale celor două observabile, $\vec{P}$ şi H, într-o stare proprie oarecare $|\ldots n_k \ldots; \ldots \bar{n}'_k \ldots\rangle$ (multi-particulă-antiparticulă) comună celor doi "operatori de număr" sunt

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \langle\vec{P}\rangle_{\{\ldots n_k \ldots n'_k \ldots\}} = \sum_k \vec{p}_k \left[n_k + n'_k\right], \\ &\text{b)} \quad \langle H\rangle_{\{\ldots n_k \ldots n'_k \ldots\}} = \sum_k E_k \left[n_k + n'_k\right]. \end{aligned} \tag{2.82}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aceasta semnifică faptul că fiecare particulă, respectiv antiparticulă, din celula k, participă cu o cuantă de impuls $\vec{p}_k$ şi energie E_k (pozitivă) la impulsul şi energia câmpului cuantificat, obţinute ca sumă a tuturor contribuţiilor peste toate celulele spaţiului discretizat al impulsurilor. La limită, pentru spaţiul necelulat, notând simbolic cu $|n(\vec{p});\, \bar{n}'(\vec{p})\rangle$ stările cu $n(\vec{p})$ particule şi, respectiv, $n'(\vec{p})$ antiparticule (de impuls $\vec{p}$ şi energie $E_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$) în elementul de volum d^3p, obţinem pentru valorile medii

$$\begin{aligned} \langle : \vec{P} : \rangle &= \langle \bar{n}'(\vec{p}); n(\vec{p}) | : \vec{P} : | n(\vec{p}); \bar{n}'(\vec{p}) \rangle \,, \\ \langle : H : \rangle &= \langle \bar{n}'(\vec{p}); n(\vec{p}) | : H : | n(\vec{p}); \bar{n}'(\vec{p}) \rangle \,, \end{aligned} \tag{2.83}$$

ale observabilelor impuls şi energie (2.72, 80), exact "forma statistică standard"

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \langle : \vec{P} : \rangle = \int \vec{p} [n(\vec{p}) + n'(\vec{p})]\, d^3p \,, \\ &\text{b)} \quad \langle : H : \rangle = \int E_p [n(\vec{p}) + n'(\vec{p})]\, d^3p \,, \end{aligned} \tag{2.84}$$

bazată pe funcţiile de distribuţie "la rece" ($T \to 0\, K$) $n(\vec{p})$ şi $n'(\vec{p})$.

În cazul cuantificării scalarului real, de lagrangeian (2.32) şi tensor conservativ impuls-energie (2.55), cu operatorul de câmp (2.36) ca soluţie exactă a ecuaţiei Gordon, particula coincide cu antiparticula şi (cum spun fizicienii) "toate rezultatele *scalarului complex cuantificat* vor fi luate *pe jumătate*". Concret, pentru componentele $T_{\mu 4}$ şi T_{44} avem

$$\begin{aligned} T_{\mu 4} &= \phi_{,\mu}\, \phi_{,4} \\ T_{44} &= \frac{1}{2} \left[\delta^{\mu\nu}\, \phi_{,\mu}\, \phi_{,\nu} + \phi_{,4}\, \phi_{,4} + m^2 \phi^2 \right] \end{aligned} \tag{2.85}$$

BCU „M. EMINESCU" IAŞI FIZICA
BCU IAŞI / CENTRALA UNIVERSITARĂ

astfel încât, operatorii (autoadjuncţi) impuls şi energie devin, prin lanţul de relaţii (2.85), (2.36) şi (2.53.a, b) împreună cu (1.95, 99),

$$P_\mu = -\int d^3x\, d^3p'\, d^3p\, E_p$$

$$\left[a(\vec{p}\,')f_{\vec{p}\,'}(x) - a^\dagger(\vec{p}\,')f^*_{\vec{p}\,'}(x)\right]\left[a(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) - a^\dagger(\vec{p})f^*_{\vec{p}}(x)\right] =$$

$$= -\int \frac{d^3p'\, d^3p}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\, p'_\mu E_p \delta(\vec{p}\,' + \vec{p})$$

$$\left[a(\vec{p}\,')a(\vec{p})e^{-2iE_pt} + a^\dagger(\vec{p}\,')a^\dagger(\vec{p})e^{2iE_pt}\right] +$$

$$+ \int \frac{d^3p' d^3p}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\, p'_\mu E_p \delta(\vec{p}\,' - \vec{p})\left[a^\dagger(\vec{p}\,')a(\vec{p}) + a(\vec{p}\,')a^\dagger(\vec{p})\right]$$

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x\, d^3p'\, d^3p$$

$$\Big\{-E_{p'}E_p\left[a(\vec{p}\,')f_{\vec{p}\,'}(x) - a^\dagger(\vec{p}\,')f^*_{\vec{p}\,'}(x)\right]\left[a(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) - a^\dagger(\vec{p})f^*_{\vec{p}}(x)\right] -$$

$$- \delta^{\mu\nu}p'_\mu p_\nu\left[a(\vec{p}\,')f_{\vec{p}\,'}(x) - a^\dagger(\vec{p}\,')f^*_{\vec{p}\,'}(x)\right]\left[a(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) - a^\dagger(\vec{p})f^*_{\vec{p}}(x)\right] +$$

$$+ m^2\left[a(\vec{p}\,')f_{\vec{p}\,'}(x) + a^\dagger(\vec{p}\,')f^*_{\vec{p}\,'}(x)\right]\left[a(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) + a^\dagger(\vec{p})f^*_{\vec{p}}(x)\right]\Big\} =$$

$$= -\int \frac{d^3p'\, d^3p}{4\sqrt{E_{p'}E_p}}\left[E_{p'}E_p + \delta^{\mu\nu}p'_\mu p_\nu - m^2\right]\delta(\vec{p}\,' + \vec{p})$$

$$\left[a(\vec{p}\,')a(\vec{p})e^{-2iE_pt} + a^\dagger(\vec{p}\,')a^\dagger(\vec{p})e^{2iE_pt}\right] +$$

$$+ \int \frac{d^3p' d^3p}{4\sqrt{E_{p'}E_p}}\left[E_{p'}E_p + \delta^{\mu\nu}p'_\mu p_\nu + m^2\right]\delta(\vec{p}\,' - \vec{p})$$

$$\left[a^\dagger(\vec{p}\,')a(\vec{p}) + a(\vec{p}\,')a^\dagger(\vec{p})\right].$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

De aici, rezultă

$$\text{a)}\quad P_\mu = \frac{1}{2}\int d^3p\, p_\mu \left[a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) + a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p})\right]$$
$$\text{b)}\quad H = \frac{1}{2}\int d^3p\, E_p \left[a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) + a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p})\right], \qquad (2.86)$$

deoarece

$$-\int \frac{d^3p'd^3p}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\, p'_\mu E_p \delta(\vec{p}' + \vec{p})$$
$$\left[a(\vec{p}')a(\vec{p})e^{-2iE_pt} + a^\dagger(\vec{p}')a^\dagger(\vec{p})e^{2iE_pt}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\int d^3p\, p_\mu \left[a(-\vec{p})a(\vec{p})e^{-2iE_pt} + a^\dagger(-\vec{p})a^\dagger(\vec{p})e^{2iE_pt}\right] \equiv 0\,,$$

având integrandul impar la "trecerea" $\vec{p} \leftrightarrow -\vec{p}$, iar

$$-\int \frac{d^3p'\, d^3p}{4\sqrt{E_{p'}E_p}} \left[E_{p'}E_p + \delta^{\mu\nu}p'_\mu p_\nu - m^2\right] \delta(\vec{p}' + \vec{p})$$
$$\left[a(\vec{p}')a(\vec{p})e^{-2iE_pt} + a^\dagger(\vec{p}')a^\dagger(\vec{p})e^{2iE_pt}\right] =$$
$$= -\int \frac{d^3p}{4E_p}\left[E_p^2 - |\vec{p}|^2 - m^2\right]\left[a(-\vec{p})a(\vec{p})e^{-2iE_pt} + a^\dagger(-\vec{p})a^\dagger(\vec{p})e^{2iE_pt}\right]$$

este de asemenea zero, dată fiind condiţia *on-shell*

$$p^2 + m^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; E_p^2 - |\vec{p}|^2 - m^2 = 0\,.$$

Analog relaţiei (2.70), ordonarea normală a produsului $aa^\dagger$ este dată de

$$\mathrm{N}\left[a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p})\right] = a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) = a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}) - \delta(0) \qquad (2.87)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi aduce (2.86.a, b) la forma

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad P_\mu = :P_\mu: + P_\mu^{(0)} = \cdot :P_\mu: \\ &\text{b)}\quad H = :H: + H^{(0)}\,, \end{aligned} \tag{2.88}$$

evidenţiind mărimile de zero

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad P_\mu^{(0)} = \frac{1}{2}\delta(0)\int d^3p\, p_\mu = 0 \\ &\text{b)}\quad H^{(0)} = \frac{1}{2}\delta(0)\int d^3p\, E_p \end{aligned} \tag{2.89}$$

şi observabilele impuls şi energie (în ordonare normală)

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad :P_\mu: = \int p_\mu N(\vec{p})\, d^3p \\ &\text{b)}\quad :H: = \int E_p N(\vec{p})\, d^3p \end{aligned} \tag{2.90}$$

ale câmpului scalar real cuantificat, având "operatorul număr de particule" (de impuls $\vec{p}$)

$$N(\vec{p}) = a^\dagger(\vec{p})\, a(\vec{p})\,. \tag{2.91}$$

Asupra interpretării fizice a rezultatelor (2.89, 90) credem că nu mai este nevoie să insistăm. Oricum, ar mai fi de semnalat în încheiere următoarele două aspecte particulare:

(i) Înlocuind (2.90.b) şi (2.89.b) în (2.88.b), rezultă hamiltonianul

$$H = \int d^3p\, E_p \left[N(\vec{p}) + \frac{1}{2}\delta(0)\right],$$

ce capătă în spaţiul "celulat" al impulsurilor, când $\delta(0) \Leftrightarrow 1$, forma extrem de sugestivă

$$H = \sum_k \left(N_k + \frac{1}{2}\right)\omega_k\,, \quad \text{cu } \hbar\omega_k = E_k\,,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

indicând, sub aspectul modelării fizico-matematice, că întregul câmp cuantificat este echivalent cu un sistem infinit numărabil de oscilatori (cuantici) liniar armonici, de pulsaţie ω_k, aflaţi în diverse stări de excitaţie n_k, proprii "operatorului de ocupare" N_k.

(ii) Pentru cel mai simplu dintre câmpurile libere, anume "scalarul real nemasiv" (cum este câmpul Goldstone, de exemplu),

$$m = 0 \;\Rightarrow\; E_p = |\vec{p}|$$

astfel încât observabilele (nedivergente) impuls şi energie capătă "forma tip"

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad :\vec{P}: = \int \vec{p}\, N(\vec{p})\, d^3p\,, \\ &\text{b)} \quad :H: = \int |\vec{p}|\, N(\vec{p})\, d^3p\,, \end{aligned} \tag{2.92}$$

specifică tuturor câmpurilor de radiaţie, după cum vom vedea în capitolul consacrat câmpului electromagnetic liber.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

E. Sarcina $U(1)$ a "scalarului complex" cuantificat

După cum am văzut în Capitolul 1 şi în paragraful anterior al prezentului capitol, invarianţa globală faţă de un "grup intern" G, de generatori $\{X_a\}_{a=\overline{1,\dim G}}$, a lagrangeianului unui câmp scalar Φ cu valori într-un spaţiu liniar complex pe care acţionează o reprezentare a grupului respectiv, conduce la curenţii conservativi (2.88)

$$J^i_a = i\eta^{ik}\left[\Phi^\dagger{}_{,k} X_a \Phi - \Phi^\dagger X_a \Phi_{,k}\right], \text{ cu } J^i_{a,i} = 0$$

şi la "sarcinile generalizate" (2.93)

$$Q_a = \int J^4_a d^3x .$$

În cazul grupului $U(1)$, "răspunzător" de conservarea sarcinii electrice, singurul generator al acestuia se scrie simplu

$$X = |e| , \tag{2.93}$$

unde constanta de cuplaj $U(1)$ este chiar sarcina elementară a electronului, e. Astfel, pentru "scalarul complex" ϕ, interpretat ca operator de câmp în cadrul celei de a doua cuantificări, obţinem operatorul densităţii de curent (electric)

$$j^i = -i|e|\eta^{ik}\left[\phi^\dagger\phi_{,k} - \phi^\dagger{}_{,k}\phi\right] \tag{2.94}$$

şi, respectiv, "forma de principiu"

$$Q = i|e|\int d^3x \left[\phi^\dagger\phi_{,4} - \phi^\dagger{}_{,4}\phi\right] \tag{2.95}$$

a observabilei *sarcină electrică* a câmpului cuantificat. Utilizând dezvoltările spectrale (2.7) şi proprietatea (1.95), cu $\partial_i = \partial_4$, obţinem *en*

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

detail

$$
\begin{aligned}
Q &= |e| \int d^3x\, d^3p'\, d^3p \\
&\quad \left\{ E_p \left[b(\vec{p}') f_{\vec{p}'}(x) + a^\dagger(\vec{p}') f^*_{\vec{p}'}(x) \right] \left[a(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) - b^\dagger(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x) \right] - \right. \\
&\quad \left. - E_{p'} \left[b(\vec{p}') f_{\vec{p}'}(x) - a^\dagger(\vec{p}') f^*_{\vec{p}'}(x) \right] \left[a(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) + b^\dagger(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x) \right] \right\} = \\
&= |e| \int d^3p'\, d^3p\, (E_p - E_{p'}) \\
&\quad \left\{ \left[\int d^3x\, f_{\vec{p}'}(x) f_{\vec{p}}(x) \right] b(\vec{p}') a(\vec{p}) - \right. \\
&\quad \left. - \left[\int d^3x\, f^*_{\vec{p}'}(x) f^*_{\vec{p}}(x) \right] a^\dagger(\vec{p}') b^\dagger(\vec{p}) \right\} + \\
&+ |e| \int d^3p'\, d^3p\, (E_p + E_{p'}) \\
&\quad \left\{ \left[\int d^3x\, f^*_{\vec{p}'}(x) f_{\vec{p}}(x) \right] a^\dagger(\vec{p}') a(\vec{p}) - \right. \\
&\quad \left. - \left[\int d^3x\, f_{\vec{p}'}(x) f^*_{\vec{p}}(x) \right] b(\vec{p}') b^\dagger(\vec{p}) \right\}, \qquad (2.96)
\end{aligned}
$$

adică, aplicând proprietăţile (1.99),

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{|e|}{2} \int \frac{d^3p'\, d^3p}{\sqrt{E_{p'} E_p}} (E_p - E_{p'})\, \delta(\vec{p}' + \vec{p}) \\
&\quad \left[b(\vec{p}') a(\vec{p})\, e^{-2iE_p t} - a^\dagger(\vec{p}') b^\dagger(\vec{p})\, e^{2iE_p t} \right] + \\
&+ \frac{|e|}{2} \int \frac{d^3p'\, d^3p}{\sqrt{E_{p'} E_p}} (E_p + E_{p'})\, \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \left[a^\dagger(\vec{p}') a(\vec{p}) - b(\vec{p}') b^\dagger(\vec{p}) \right]. \qquad (2.97)
\end{aligned}
$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Efectuând integrala după $\vec{p}'$ şi ordonând normal produsul $bb^\dagger$ (relaţia (2.70)), rezultă imediat expresia

$$Q = :Q: + Q_{(0)} \tag{2.98}$$

a operatorului de sarcină $U(1)$, cu partea divergentă, dar inobservabilă, după cum am menţionat în cazul operatorilor impuls şi energie,

$$Q_{(0)} = -|e|\,\delta(0)\int d^3p\,, \tag{2.99}$$

semnificând "sarcina de zero" şi "partea regulată", nulă pe starea de vid,

$$:Q: = |e|\int d^3p\,\left[N^{(p)}(\vec{p}) - N^{(\bar{p})}(\vec{p})\right]\,, \tag{2.100}$$

reprezentând *observabila sarcină electrică* (totală) a "scalarului complex" cuantificat. În mod evident, aceasta comută cu operatorii de număr (particule-antiparticule) (2.73), astfel încât, într-o stare proprie configurativă $|n(\vec{p});\,\bar{n}'(\vec{p})\rangle$ – peste toate valorile lui $\vec{p}$ din $\mathbb{R}^3$ (spaţiul impulsurilor) – valoarea medie, observabilă, a sarcinii totale a câmpului cuantificat are expresia (în sensul mediei din (2.83))

$$\langle :Q: \rangle = \int |e|\,[n(\vec{p}) - n'(\vec{p})]\,d^3p\,, \tag{2.101}$$

sau, şi mai clar, în cazul discretizării prin aşa-numita *celulare*,

$$\langle Q\rangle_{\{\ldots n_k \ldots n'_k \ldots\}} = \sum_k |e|\,(n_k - n'_k)\,, \tag{2.102}$$

semnificând suma algebrică a tuturor particulelor şi antiparticulelor de sarcină elementară $\mp e$ (respectiv).

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

F. Forma covariantă a relaţiilor de comutare şi funcţiile Wightmann

Atât impunerea relaţiilor canonice de comutare, cât şi obţinerea expresiilor concrete ale observabilelor impuls, energie şi sarcină (ale câmpului scalar cuantificat), au fost efectuate pe 3-suprafeţele de gen spaţial, de timp (universal) constant. Deşi, la prima vedere, această constrângere pare să afecteze covarianţa teoriei, este posibilă, după cum au arătat pentru prima oară Jordan şi Pauli în 1928, generalizarea relaţiilor Bohr-Heisenberg la o formă Lorentz-covariantă valabilă pentru oricare două evenimente x, x' din spaţiul Minkowski, exprimabilă prin intermediul aşa-numitelor *funcţii Wightmann*, $\Delta(x,x')$ şi $\Delta^{(\pm)}(x,x')$, ca funcţii Green omogene ale ecuaţiei Gordon şi respectând principiul microcauzalităţii. Pentru "scalarul complex" (în formalismul celei de a doua cuantificări) una din metodele de deducere a *formei covariante a relaţiilor de comutare* este următoarea. "Relaxarea temporală" a comutatorului Bohr-Heisenberg (la timp egal)

$$\left[\pi^{\dagger}(x'),\, \phi(x)\right]_{t'=t} = -i\,\delta(\vec{x}' - \vec{x})\,,$$

astfel încât evenimentele x', x să nu mai fie simultane, se poate face direct, în sens "intuitiv", scriind

$$\left[\pi^{\dagger}(x'),\, \phi(x)\right] = -i\,\hat{\delta}(x' - x)\,, \tag{2.103}$$

$\hat{\delta}(x',x)$ fiind o distribuţie integrabilă pe M_4 (spaţiul Minkowski), ce se reduce obligatoriu la distribuţia Dirac $\delta(\vec{x}' - \vec{x})$, când $t' = t$, adică

$$\hat{\delta}(\vec{x}', t; \vec{x}, t) = \delta(\vec{x}' - \vec{x})\,. \tag{2.104}$$

Cum

$$\pi^{\dagger}(x') = \phi^{\dagger}{}_{,t'}(x')\,,$$

rezultă

$$\left[\phi(x)\,,\,\phi^{\dagger}{}_{,t'}\,(x')\right] \;=\; i\,\hat{\delta}(x',x) \tag{2.105}$$

şi, integrând după t', obţinem relaţia de comutare Jordan-Pauli-Wightmann

$$\left[\phi(x)\,,\,\phi^{\dagger}(x')\right] \;=\; i\,\Delta(x,x') \tag{2.106}$$

pentru operatorii de câmp ϕ, $\phi^{\dagger}$ în oricare două evenimente x, x' (din M_4), cu distribuţia

$$\hat{\delta}(x',x) \;=\; \frac{\partial}{\partial t'}\,\Delta(x,x')\,, \tag{2.107}$$

satisfăcând condiţia

$$\hat{\delta}(\vec{x}',t\,;\,\vec{x},t) \;=\; \delta(\vec{x}'-\vec{x}) \;=\; \left[\frac{\partial}{\partial t'}\,\Delta(x,x')\right]_{t'=t}\,, \tag{2.108}$$

exprimată în raport cu funcţia Wightmann *completă* sau, cum i se mai spune, "funcţia de comutare" $\Delta(x,x')$, de care ne vom ocupa în continuare.

Din forma (soluţie exactă a ecuaţiei Gordon)

$$\begin{aligned}
\phi(x) \;&=\; \int d^3p\,\left[a(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) \,+\, b^{\dagger}(\vec{p})f^{*}_{\vec{p}}(x)\right]\,,\\
\phi^{\dagger}(x) \;&=\; \int d^3p\,\left[b(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) \,+\, a^{\dagger}(\vec{p})f^{*}_{\vec{p}}(x)\right]
\end{aligned}$$

a operatorilor de câmp exprimaţi în raport cu operatorii de anihilare-creare $\{a(\vec{p}),\, b(\vec{p}),\, a^{\dagger}(\vec{p}),\, b^{\dagger}(\vec{p})\}$ şi modurile de frecvenţă $\left\{f_{\vec{p}}(x),\, f^{*}_{\vec{p}}(x)\right\}$, rezultă atât *părţile de frecvenţă pozitivă*

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \phi_{(+)}(x) \;=\; \int d^3p\; a(\vec{p})f_{\vec{p}}(x)\,,\\
&\text{b)}\quad \phi^{\dagger}_{(+)}(x) \;=\; \int d^3p\; b(\vec{p})f_{\vec{p}}(x)\,,
\end{aligned} \tag{2.109}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

respectiv *negativă*

$$\text{a)}\quad \phi_{(-)}(x) = \int d^3p\, b^\dagger(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x)\,,$$
$$\text{b)}\quad \phi^\dagger_{(-)}(x) = \int d^3p\, a^\dagger(\vec{p}) f^*_{\vec{p}}(x) \qquad (2.110)$$

ale acestora, cât şi posibilitatea utilizării directe a "algebrei anihilare-creare" în estimarea comutatorului (2.106). Astfel, avem

$$\begin{aligned}\left[\phi(x)\,,\,\phi^\dagger(x')\right] &= \left[\phi_{(+)}(x)+\phi_{(-)}(x)\,,\,\phi^\dagger_{(+)}(x')+\phi^\dagger_{(-)}(x')\right] = \\ &= \left[\phi_{(+)}(x)\,,\,\phi^\dagger_{(+)}(x')\right] + \left[\phi_{(-)}(x)\,,\,\phi^\dagger_{(-)}(x')\right] + \\ &+ \left[\phi_{(+)}(x)\,,\,\phi^\dagger_{(-)}(x')\right] + \left[\phi_{(-)}(x)\,,\,\phi^\dagger_{(+)}(x')\right]\end{aligned} \qquad (2.111)$$

şi cum

$$\left[\phi_{(+)}(x)\,,\,\phi^\dagger_{(+)}(x')\right] = \int d^3p\, d^3p'\, \left[a(\vec{p})\,,\,b(\vec{p}')\right] f_{\vec{p}}(x) f_{\vec{p}'}(x')\,,$$
$$\left[\phi_{(-)}(x)\,,\,\phi^\dagger_{(-)}(x')\right] = \int d^3p\, d^3p'\, \left[b^\dagger(\vec{p})\,,\,a^\dagger(\vec{p}')\right] f^*_{\vec{p}}(x) f^*_{\vec{p}'}(x')$$

revin la

$$\left[a(\vec{p})\,,\,b(\vec{p}')\right] = 0\,,\quad \left[b^\dagger(\vec{p})\,,\,a^\dagger(\vec{p}')\right] = 0\,,$$

rămânem cu "descompunerea comutatorială"

$$\left[\phi(x)\,,\,\phi^\dagger(x')\right] = \left[\phi_{(+)}(x)\,,\,\phi^\dagger_{(-)}(x')\right] + \left[\phi_{(-)}(x)\,,\,\phi^\dagger_{(+)}(x')\right], \qquad (2.112)$$

care permite, prin analogie cu definiţia (2.106) a funcţiei de comutare, definirea *funcţiei Wightmann de frecvenţă pozitivă*

$$\Delta^{(+)}(x,x') = -i\left[\phi_{(+)}(x)\,,\,\phi^\dagger_{(-)}(x')\right] \qquad (2.113)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi respectiv a celei *de frecvenţă negativă*

$$\Delta^{(-)}(x,x') = -i\left[\phi_{(-)}(x)\,,\,\phi^{\dagger}_{(+)}(x')\right]. \tag{2.114}$$

Astfel, relaţia

$$\Delta(x,x') = \Delta^{(+)}(x,x') + \Delta^{(-)}(x,x') \tag{2.115}$$

justifică atributul de "completă" al funcţiei Wightmann $\Delta(x,x')$. Înlocuind expresiile (2.109.a) şi (2.110.b) în relaţia de definiţie (2.113), obţinem

$$i\,\Delta^{(+)}(x,x') = \int d^3p\,d^3p'\left[a(\vec{p})\,,\,a^{\dagger}(\vec{p}')\right] f_{\vec{p}}(x) f^{*}_{\vec{p}'}(x') \tag{2.116}$$

şi cum

$$\left[a(\vec{p})\,,\,a^{\dagger}(\vec{p}')\right] = \delta(\vec{p}-\vec{p}')\,,$$

rezultă expresia

$$i\,\Delta^{(+)}(x,x') = \int d^3p\, f_{\vec{p}}(x) f^{*}_{\vec{p}}(x')\,, \tag{2.117}$$

adică (având în vedere forma concretă (1.78) a modurilor ortonormale de frecvenţă)

$$i\,\Delta^{(+)}(x,x') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\,E_p}\, e^{ip(x-x')}\,, \tag{2.118}$$

a funcţiei Wightmann de frecvenţă pozitivă. Pentru $\Delta^{(-)}(x,x')$, procedăm în mod analog, utilizând expresiile (2.110.a) şi (2.109.b). Obţinem, astfel,

$$i\,\Delta^{(-)}(x,x') = \int d^3p\,d^3p'\left[b^{\dagger}(\vec{p})\,,\,b(\vec{p}')\right] f^{*}_{\vec{p}}(x) f_{\vec{p}'}(x')\,,$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică

$$i\Delta^{(-)}(x,x') = -\int d^3p\, f_{\vec{p}}^{*}(x) f_{\vec{p}}(x')\,, \tag{2.119}$$

deoarece

$$\left[b^{\dagger}(\vec{p})\,,\, b(\vec{p}')\right] = -\left[b(\vec{p}')\,,\, b^{\dagger}(\vec{p})\right] = -\delta(\vec{p}'-\vec{p})$$

şi astfel, cu (1.78), rezultă forma concretă

$$i\Delta^{(-)}(x,x') = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E_p}\, e^{-ip(x-x')} \tag{2.120}$$

a funcţiei Wightmann de frecvenţă negativă.

Din (2.115), (2.118) şi (2.120) deducem pentru funcţia de comutare expresia (Jordan-Pauli, 1928)

$$\Delta(x,x') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{E_p}\sin[p(x-x')] \tag{2.121}$$

care, prin (2.107), trebuie să verifice condiţia (2.108) ce asigură consistenţa logică a raţionamentului de generalizare a relaţiei Bohr-Heisenberg la relaţiile de comutare (2.103), (2.105) şi în final (2.106). Într-adevăr, pentru distribuţia integrabilă pe M_4 definită prin relaţia (2.107), avem (din (2.121))

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(x',x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{E_p}\frac{\partial}{\partial t'}\{\sin[p(x-x')]\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{E_p}\, E_p\cos[p(x-x')]\,,\end{aligned}$$

adică

$$\hat{\delta}(x',x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\cos[p(x-x')] \tag{2.122}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi astfel, la $t' = t$, obţinem ceea ce era de demonstrat

$$\hat{\delta}(\vec{x}', t; \vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \cos[\vec{p}(\vec{x} - \vec{x}')] = \\ = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} = \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.123)$$

adică

$$\hat{\delta}(\vec{x}', t; \vec{x}, t) = \left[\frac{\partial}{\partial t'} \Delta(x, x')\right]_{t'=t} = \delta(\vec{x}' - \vec{x}). \quad (2.108)$$

Până la analiza celor mai importante proprietăţi ale funcţiei Wightmann complete şi a deducerii formei $SO(3,1)$-invariante a acesteia, am dori să facem câteva observaţii.

În primul rând, după cum rezultă din expresiile (2.118), (2.120) şi (2.121), toate cele trei funcţii Wightmann ale "scalarului complex", cuantificat în universul Minkowski, depind de fapt numai de *4-vectorul de poziţie relativă*, $x - x'$, adică

$$\Delta(x, x') = \Delta(x - x') \ , \ \Delta^{(\pm)}(x, x') = \Delta^{(\pm)}(x - x'). \quad (2.124)$$

Această proprietate este specifică *funcţiilor de propagare* în spaţiu-timpul plat. Numai în absenţa gravitaţiei, clasa referenţialelor inerţiale este global definită, adică, *modulo* grupul de izometrii ale lui M_4, există o singură hartă pe varietate care "duce" toate punctele acesteia în spaţiul model R^4 ce poate fi privit ca un spaţiu liniar (în parametrizare carteziană $(x) = \left(\vec{x} = (x^\mu)_{\mu\overline{1,3}}, x^4 = t\right)$) ale cărui elemente x, numite vectori de poziţie, au componentele $(x^i)_{i=\overline{1,4}}$. Mai pe scurt, (după cum, de altfel, se cunoaşte din geometria diferenţială [41],) în cazul varietăţilor pseudo-riemanniene M_n de curbură nulă, se poate găsi o hartă prin care coordonatele $(x^i)_{i=\overline{1,n}}$ ale oricărui punct $x \in M_n$ să formeze şi componentele contravariante ale unui n-vector x (biunivoc

asociat punctului), având semnificaţia (fizico-matematică) de vector de poziţie. Astfel (în particular, pentru spaţiu-timpul Minkowski), nu numai grupul Lorentz, dar şi subgrupul translaţiilor spaţio-temporale, adică (de fapt) întregul grup Poincaré, capătă caracter global. De ce este atât de important acest aspect pentru funcţiile Wightmann (2.124)? Deoarece, în absenţa gravitaţiei, translaţiile operând la fel (independent de punct) asupra tuturor evenimentelor din M_4, adică

$$x \to \underline{x} = x + \varepsilon \ , \ x' \to \underline{x}' = x' + \varepsilon \, , \tag{2.125}$$

unde ε reprezintă cuadrivectorul de translaţie, vom avea asigurată o dată cu invarianţa 4-vectorului de poziţie relativă

$$\underline{x} - \underline{x}' = x - x' \tag{2.126}$$

şi invarianţa funcţiilor Wightmann corespunzătoare

$$\underline{\Delta}(\underline{x} - \underline{x}') = \Delta(x - x') \ , \ \underline{\Delta}^{(\pm)}(\underline{x} - \underline{x}') = \Delta^{(\pm)}(x - x') \, , \tag{2.127}$$

astfel încât, în baza teoremelor Noether, legile de conservare ale impulsului şi energiei câmpului cuantificat vor fi cuprinse şi în acelaşi timp "atotcuprinzătoare" (metaforic vorbind) în funcţiile de comutare (sau, în sens mai larg, "de propagare") ale acestuia. După cum vom vedea curând, funcţia Wightmann completă este invariantă şi faţă de grupul Lorentz propriu-ortocron (definit în Capitolul 1), adică ea va codifica, pe lângă conservarea impulsului şi a energiei, conservarea momentului cinetic (total) care, în cazul câmpului scalar, este numai de natură orbitală.

În al doilea rând, vrem să subliniem următorul aspect. Funcţiile Wightmann transced fizica clasică, fiind, prin însăşi natura definiţiei lor, eminamente de sorginte cuantică. Dacă nu am considera câmpul ϕ (şi evident, $\phi^\dagger$) ca un operator pe spaţiul Fock al stărilor sale cuantice, atunci toţi comutatorii analizaţi ar fi zero. De asemenea, în timp ce observabilele fundamentale (impuls, energie, moment cinetic etc.)

au caracter global, fiind obţinute prin integrarea pe hipersuprafeţele de $t = const.$ a curenţilor simplectici *one-point functions* $T_{ik}(x)$ şi $J^{ikl}(x) = x^i T^{kl}(x) - x^k T^{il}(x)$, funcţiile Wightmann sunt bi-locale (în engleză, *two-point functions*), fiind generic legate de transportul de particule (antiparticule) între două evenimente din univers. Desigur, fiind vorba de un transport efectiv de materie, respectarea cauzalităţii va trebui analizată atent. Dar faptul în sine, anume că funcţiile $\Delta^{(\pm)}(x, x')$ reprezintă părţile componente ale aşa-numitei "funcţii Green cauzale" (sau, cum i se mai spune, "propagator Feynman"), rămâne. Pentru a ne convinge, să evaluăm mediile pe starea de vid $|0;\bar{0}\rangle$ ale celor doi comutatori, $\phi_{(+)}(x)$ cu $\phi^\dagger_{(-)}(x')$, şi, respectiv, $\phi_{(-)}(x)$ cu $\phi^\dagger_{(+)}(x')$. Pentru primul, avem

$$\langle\bar{0};0|\left[\phi_{(+)}(x)\,,\,\phi^\dagger_{(-)}(x')\right]|0;\bar{0}\rangle =$$
$$= \langle\bar{0};0|\phi_{(+)}(x)\,\phi^\dagger_{(-)}(x')|0;\bar{0}\rangle - \langle\bar{0};0|\phi^\dagger_{(-)}(x')\,\phi_{(+)}(x)|0;\bar{0}\rangle\,. \qquad (2.128)$$

Cum însă

$$a(\vec{p})|0;\bar{0}\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \langle\bar{0};0|a^\dagger(\vec{p}\,')=0\,,\;\;(\forall)\,\vec{p},\vec{p}\,'\in\mathbf{R}^3\,,$$

(din regulile de acţiune "la dreapta", respectiv "la stânga", pe starea de vid, a operatorilor $a, a^\dagger$) al doilea termen din membrul drept al relaţiei (2.128) se anulează, obţinând (prin definiţia (2.113) şi din faptul că $\Delta^{(+)}(x,x')$ este o funcţie şi nu un operator)

$$i\,\Delta^{(+)}(x,x') = \langle\bar{0};0|\phi_{(+)}(x)\,\phi^\dagger_{(-)}(x')|0;\bar{0}\rangle =$$
$$= \langle\bar{0}|\bar{0}\rangle\langle 0|\phi_{(+)}(x)\,\phi^\dagger_{(-)}(x')|0\rangle\,,$$

adică

$$i\,\Delta^{(+)}(x,x') = \langle 0|\phi_{(+)}(x)\,\phi^\dagger_{(-)}(x')|0\rangle\,, \qquad (2.129)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

deoarece, după cum se observă din expresiile (2.109.a) şi (2.110.b), cei doi operatori nu acţionează (decât "identic") pe subspaţiul Fock-antiparticulă. Din punct de vedere fizic, relaţia (2.129) arată clar că (până la unitatea imaginară i) funcţia Wightmann de frecvenţă pozitivă reprezintă amplitudinea de tranziţie în procesul de generare a unei particule, de pe starea de vid, în (evenimentul) x' şi anihilare a acesteia (înapoi pe starea de vid) în (evenimentul) x din M_4. Nu spunem "(anihilare) ulterioară" deoarece (încă) nu am ordonat cronologic procesul. Din punct de vedere matematic, explicitarea în continuare a relaţiei (2.129) se face astfel:

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi_{(+)}(x)\,\phi^{\dagger}_{(-)}(x')|0\rangle &= \int d^3p\,d^3p'\,\langle 0|a(\vec{p})\,a^{\dagger}(\vec{p}')|0\rangle f_{\vec{p}}(x)f^{*}_{\vec{p}}(x') = \\ &= \int d^3p\,d^3p'\,\langle 1_{\vec{p}}|1_{\vec{p}'}\rangle f_{\vec{p}}(x)f^{*}_{\vec{p}}(x') = \\ &= \int d^3p\,d^3p'\,\delta(\vec{p}-\vec{p}')f_{\vec{p}}(x)f^{*}_{\vec{p}}(x')\,, \qquad (2.130)\end{aligned}$$

adică obţinem, într-adevăr, forma (2.117),

$$i\,\Delta^{(+)}(x,x') = \int d^3p\,f_{\vec{p}}(x)f^{*}_{\vec{p}}(x')\,,$$

de definiţie a funcţiei (bi-locale) $\Delta^{(+)}(x,x')$. În special din a doua egalitate din (2.130) se vede clar că "între" cele două evenimente, x' – de generare şi x – de anihilare, sunt implicate (ca reprezentare în spaţiul impulsurilor) numai stările uniparticulă. Pentru al doilea comutator, avem (în mod cu totul analog primului)

$$\begin{aligned}&\langle\bar{0};0|\left[\phi_{(-)}(x)\,,\,\phi^{\dagger}_{(+)}(x')\right]|0;\bar{0}\rangle = \\ &= \langle\bar{0};0|\phi_{(-)}(x)\,\phi^{\dagger}_{(+)}(x')|0;\bar{0}\rangle - \langle\bar{0};0|\phi^{\dagger}_{(+)}(x')\,\phi_{(-)}(x)|0;\bar{0}\rangle \qquad (2.131)\end{aligned}$$

şi cum

$$\langle\bar{0};0|\phi_{(-)}(x)\,\phi^{\dagger}_{(+)}(x')|0;\bar{0}\rangle = 0\,, \qquad (2.132)$$

deoarece

$$b(\vec{p}')|0;\bar{0}\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \langle\bar{0};0|b^{\dagger}(\vec{p}) = 0\,,\;\; (\forall)\,\vec{p},\vec{p}' \in \mathbf{R}^3\,,$$

rezultă

$$\begin{aligned} i\,\Delta^{(-)}(x,x') &= -\langle\bar{0};0|\phi^{\dagger}_{(+)}(x')\,\phi_{(-)}(x)|0;\bar{0}\rangle = \\ &= -\langle 0|0\rangle\langle\bar{0}|\phi^{\dagger}_{(+)}(x')\,\phi_{(-)}(x)|\bar{0}\rangle\,, \end{aligned}$$

adică

$$i\,\Delta^{(-)}(x,x') = -\langle\bar{0}|\phi^{\dagger}_{(+)}(x')\,\phi_{(-)}(x)|\bar{0}\rangle\,. \tag{2.133}$$

Explicitarea în continuare a acesteia

$$\begin{aligned} &-\langle\bar{0}|\phi^{\dagger}_{(+)}(x')\,\phi_{(-)}(x)|\bar{0}\rangle = \\ &= -\int d^3p'\,d^3p\,\langle\bar{0}|b(\vec{p}')\,b^{\dagger}(\vec{p})|\bar{0}\rangle f_{\vec{p}'}(x')f^{*}_{\vec{p}}(x) = \\ &= -\int d^3p'\,d^3p\,\langle\bar{1}_{\vec{p}'}|\bar{1}_{\vec{p}}\rangle f_{\vec{p}'}(x')f^{*}_{\vec{p}}(x) = \\ &= -\int d^3p'\,d^3p\,\delta(\vec{p}'-\vec{p})f_{\vec{p}'}(x')f^{*}_{\vec{p}}(x)\,, \end{aligned} \tag{2.134}$$

ne oferă din nou forma (2.119),

$$i\,\Delta^{(-)}(x,x') = -\int d^3p\,f^{*}_{\vec{p}}(x)f_{\vec{p}}(x')\,,$$

a funcţiei Wightmann de frecvenţă negativă, iar ca interpretare fizică, putem constata că (până la o schimbare de semn şi unitatea imaginară i) $\Delta^{(-)}(x,x')$ reprezintă amplitudinea de tranziţie în procesul de generare a unei antiparticule (de pe starea de vid) în evenimentul x şi de anihilare a acesteia în (evenimentul) x'.

În fine, referitor la acest "lanţ de observaţii", este bine de remarcat [50], după cum rezultă şi din expresia (2.115) a funcţiei Wightmann complete, că întregul set al proprietăţilor sale spaţio-temporale

nu poate fi explicat fără a lua simultan în considerare cele două "canale" particulă-antiparticulă ale tranziţiei vid-vid, (2.129) şi, respectiv, (2.133), "între" evenimentele (oarecare) x, x' din M_4. Cu alte cuvinte, într-un sens foarte general din punct de vedere fizic, în microcosmos covarianţa Poincaré a legilor ce descriu propagarea cuantelor diverselor câmpuri materiale este indisolubil legată de existenţa antiparticulelor. Avem încă o confirmare a necesităţii înglobării acestora în formularea oricărei teorii cuantice relativiste de câmp.

Revenind la forma (2.121) a funcţiei de comutare, se pot demonstra uşor, din punct de vedere "tehnic", următoarele proprietăţi fizic importante ale acesteia.

(i) Funcţia Wightmann completă este antisimetrică în variabilele sale x, x' sau, dacă avem în vedere "argumentul efectiv" $X = x - x'$ al acesteia, ea este o funcţie impară,

$$\Delta(x,x') = -\Delta(x',x) \;\Leftrightarrow\; \Delta(X) = -\Delta(-X)\,. \qquad (2.135)$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}\Delta(x,x') &= \Delta(x-x') = \Delta(X) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{\sin[p(x-x')]}{E_p} = \\ &= -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{\sin[p(x'-x)]}{E_p} = -\Delta(x'-x) = \\ &= -\Delta(-X) = -\Delta(x',x)\,. \qquad (2.136)\end{aligned}$$

Doar pentru o informare mai generală [5, 27], reamintim faptul că, în cazul teoriilor cuantice de câmp pe varietăţi spaţio-temporale mai puţin banale (cu curbură sau formulate în referenţiale neinerţiale), funcţia de comutare nu mai admite un "argument efectiv" atât de simplu, precum 4-vectorul poziţiei relative, $X = x - x'$, dar continuă să fie antisimetrică în argumentele sale "fundamentale" x, x', adică

$$\Delta(x,x') = -\Delta(x',x)\,. \qquad (2.137)$$

De aceea am separat (oarecum) în formularea (i) proprietatea de antisimetrie faţă de cea de imparitate în $X = x - x'$.

(ii) Funcţia Wightmann completă respectă principiul microcauzalităţii, în sensul că, la $x'^4 = t' = t = x^4$,

$$\Delta(\vec{x}, t; \vec{x}', t) = -i \left[\phi(x), \phi^\dagger(x')\right]_{t'=t} = 0 . \tag{2.138}$$

Într-adevăr, din (2.121) avem

$$\begin{aligned} [\Delta(x, x')]_{t'=t} &= \Delta(\vec{x}, t; \vec{x}', t) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E_p} \sin[\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] = 0 , \end{aligned} \tag{2.139}$$

dat fiind că integrandul este impar în 3-vectorul impuls $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$. De altfel, această proprietate era de aşteptat, fiind practic impusă de relaţia de comutare la timp egal

$$\left[\phi^\dagger(x'), \phi(x)\right]_{t'=t} = 0 ,$$

care, în mod cert, are un caracter fundamental, independent de forma concretă, minkowskiană, (2.121) a funcţiei Jordan-Pauli-Wightmann.

(iii) Funcţia de comutare este soluţia exactă a problemei Cauchy

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad [\Delta(x, x')]_{t=t'} = 0 \\ &\text{b)} \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} \Delta(x, x')\right]_{t=t'} = -\delta(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned} \tag{2.140}$$

pentru ecuaţia Gordon omogenă

$$\left(\Box(x) - m^2\right) \Delta(x, x') = 0 . \tag{2.141}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dat fiind că prima condiţie Cauchy, (2.140.a), a fost deja demonstrată (relaţia (2.138)), mai trebuie să arătăm doar că $\Delta(x,x')$ (dată de (2.121)) verifică ecuaţia (2.141) şi a doua condiţie Cauchy, (2.140.b). În acest sens, avem

$$\begin{aligned}\left(\Box(x) - m^2\right)\Delta(x,x') &= \left(\Box(x) - m^2\right)\Delta(x-x') = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{E_p}\left(\Box(x) - m^2\right)\sin\left[p(x-x')\right] = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{E_p}\left(p^2+m^2\right)\sin\left[p(x-x')\right] \equiv 0 \end{aligned} \quad (2.142)$$

datorită condiţiei *on-shell* (în spaţiul 4-impulsului)

$$p^2+m^2 = -\left(E^2 - \left(|\vec{p}|^2+m^2\right)\right) = -\left(E^2-E_p^2\right) = 0\,, \quad (2.143)$$

satisfăcută de 4-impulsul $p=(\vec{p}, E=E_p)$, cu $E_p=\sqrt{|\vec{p}|^2+m^2}$, al cuantelor câmpului ϕ. De asemenea, în ceea ce priveşte condiţia (2.140.b), avem, analog demonstrării relaţiei (2.108),

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial t}\Delta(x,x')\right]_{t=t'} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{E_p}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\sin\left[\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}') - E_p(t-t')\right]\right\}_{t=t'} = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\cos\left[\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')\right] = -\delta(\vec{x}-\vec{x}')\,, \end{aligned} \quad (2.144)$$

ceea ce demonstrează, împreună cu (2.142), proprietatea (iii) a funcţiei $\Delta(x,x') = \Delta(x-x')$ de a fi funcţia Green omogenă a ecuaţiei Gordon (2.141) pentru problema Cauchy (2.140). Din acest punct de vedere, al *existenţei şi unicităţii soluţiei problemei Cauchy*, ea este (în mod evident) unică.

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(iv) Funcţia de comutare $\Delta(x,x')$ este o distribuţie (integrabilă) pe M_4, reprezentabilă prin integrala Fourier $SO(3,1)$-invariantă

$$\Delta(x,x') = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\, h(E)\,\delta(p^2+m^2)\,e^{ip(x-x')}\,, \qquad (2.145)$$

cu 4-vectorul $p=(\vec{p},\,p^4=E)$ din R^4, cu $E\neq\pm E_p$ (în general), şi

$$h(p^4=E)=\begin{cases}-1\ , & E<0\\ 0\ , & E=0\\ +1\ , & E>0\end{cases} \qquad (2.146)$$

funcţia treaptă, introdusă de Heaviside.

Demonstraţie.

Invarianţa Lorentz specială ($SO(3,1)$) a integralei Fourier (2.145) este evidentă, deoarece argumentele p^2+m^2 şi $p(x-x')$ sunt *Lorentz-invariante în sens absolut*, iar funcţia treaptă rămâne aceeaşi sub acţiunea oricărei transformări proprii, $\Lambda\in SO(3,1)$ (deci $\det\Lambda=+1$), a 4-vectorului $p=(\vec{p},\,E)$ din R^4. Bineînţeles, aceeaşi proprietate este valabilă pentru 4-volumul elementar, d^4p. Mai trebuie să arătăm doar că rezultatul integralei (2.145) este, într-adevăr, funcţia Wightmann completă (2.121). În acest sens,

BCU MS CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

avem[5]

$$
\begin{aligned}
&-\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\, h(E)\,\delta(p^2+m^2)\,e^{ip(x-x')} = \\
&= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3p\,dE\,h(E)\,\delta(E^2-E_p^2)\,e^{ip(x-x')} = \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{\mathbf{R}^3} d^3p \int_{-\infty}^{0_-} dE \\
&\left\{\frac{\delta(E+E_p)}{2E_p}+\frac{\delta(E-E_p)}{2E_p}\right\} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\,e^{-iE(t-t')} - \\
&-\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{\mathbf{R}^3} d^3p \int_{0_+}^{\infty} dE \\
&\left\{\frac{\delta(E+E_p)}{2E_p}+\frac{\delta(E-E_p)}{2E_p}\right\} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\,e^{-iE(t-t')} = \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{\mathbf{R}^3} d^3p\,\frac{e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{2E_p}\int_{-\infty}^{0_-} dE\,\delta(E+E_p)\,e^{-iE(t-t')} - \\
&-\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{\mathbf{R}^3} d^3p\,\frac{e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{2E_p}\int_{0_+}^{\infty} dE\,\delta(E-E_p)\,e^{-iE(t-t')},
\end{aligned}
\tag{2.147}
$$

deoarece $E_p = \sqrt{|\vec{p}|^2+m^2} \in \mathbf{R}_+$ şi, astfel, obţinem

$$
\begin{aligned}
&-\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\, h(E)\,\delta(p^2+m^2)\,e^{ip(x-x')} = \\
&= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{\mathbf{R}^3}\frac{d^3p}{2E_p}\,e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\,e^{-iE_p(t-t')} + \\
&+\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{\mathbf{R}^3}\frac{d^3p}{2E_p}\,e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\,e^{iE_p(t-t')}.
\end{aligned}
\tag{2.148}
$$

[5]Limitele $0_\pm$ sunt înţelese în sensul $\varepsilon \to \pm 0$, ca în referinţa [64]

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prin substituţia $\vec{p} \to -\vec{p}$ (în ultima integrală) şi reintroducerea cuadriimpulsului $p = (\vec{p}, E_p)$, rezultă pentru (2.145) expresia

$$\Delta(x,x') = \int \frac{d^3p}{E_p} \frac{e^{ip(x-x')} - e^{-ip(x-x')}}{2i}, \qquad (2.149)$$

deci chiar forma (2.121),

$$\Delta(x,x') = \int \frac{d^3p}{E_p} \sin[p(x-x')],$$

a funcţiei Wightmann complete a câmpului scalar complex cuantificat. Aceasta este proprietatea pe care am menţionat-o anterior în legătură cu "încriptarea" legii de conservare a momentului cinetic (total) în funcţia de comutare (eminamente cuantică), $\Delta(x,x')$.

(v) Sub acţiunea conjugării complexe, funcţiile Wightmann de frecvenţă pozitivă, respectiv negativă, îşi schimbă rolurile

$$\left[\Delta^{(+)}(x,x')\right]^* = \Delta^{(-)}(x,x'). \qquad (2.150)$$

Demonstraţia rezultă imediat din relaţiile de definiţie (2.118), (2.120).

(vi) Tot din acestea, obţinem "pe loc" proprietatea de comportare

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \Delta^{(+)}(x,x') = -\Delta^{(-)}(x',x) \\ &\text{b)} \quad \Delta^{(-)}(x,x') = -\Delta^{(+)}(x',x) \end{aligned} \qquad (2.151)$$

a celor două funcţii Wightmann, la interschimbarea "argumentelor fundamentale" x, x'.

În fine, pentru "scalarul real", operatorul de câmp fiind hermitic, adică

$$\phi^\dagger(x) = \phi(x),$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

obţinem *comutatorul covariant Jordan-Pauli-Wightmann* sub forma

$$[\phi(x)\,,\,\phi(x')] = i\,\Delta(x,x')\,, \tag{2.152}$$

în care atât funcţia Wightmann completă, cât şi descompunerile ei $\Delta^{(\pm)}(x,x')$ îşi păstrează (respectiv) expresiile (2.121), (2.118) şi (2.120), ultimele două provenind din estimarea comutatorilor

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad i\,\Delta^{(+)}(x,x') = \left[\phi_{(+)}(x)\,,\,\phi_{(-)}(x')\right] \\ &\text{b)}\quad i\,\Delta^{(-)}(x,x') = \left[\phi_{(-)}(x)\,,\,\phi_{(+)}(x')\right]\,. \end{aligned} \tag{2.153}$$

Relaţia (2.152) împreună cu $SO(3,1)$-invarianţa funcţiei de comutare $\Delta(x,x') = \Delta(x-x')$ plasează într-o lumină nouă, cu profundă semnificaţie fizică, aparent banala relaţie de comutare la timp egal

$$[\phi(x)\,,\,\phi(x')]_{t=t'} = 0\,.$$

Datorită invarianţei Lorentz, putem efectua orice transformare (Lorentz) proprie, astfel încât

$$[\phi(x)\,,\,\phi(x')] = i\,\Delta(x-x') = 0\,, \tag{2.154}$$

pentru oricare două evenimente x, x' separate spaţial,

$$\eta_{ik}(x^i - x'^i)(x^k - x'^k) > 0\,, \tag{2.155}$$

şi nu doar pentru cazul particular $t' = x'^4 = x^4 = t$. Cu alte cuvinte, pentru orice câmp observabil, măsurătorile efectuate asupra lui în două puncte separate spaţial nu trebuie să interfere, adică sunt complet independente. Aceasta este una din cele mai clare modalităţi de exprimare a principiului de microcauzalitate, deoarece oricât de mic ar fi intervalul de gen spaţial de separare (prin "traversarea", sau "în afara", conului Minkowski) a două evenimente din M_4, nici un semnal nu va putea călători mai repede decât lumina – care este de "gen izotrop"

$$p^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \eta_{ik}\,p^i p^k = 0 \;\Leftrightarrow\; \eta_{ik}(x^i - x'^i)(x^k - x'^k) = 0\,,$$

BCU CLUJ CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

pentru a cauza interferenţa rezultatelor celor două măsurători. Pentru mai multe detalii, recomandăm [6].

G. Funcţia Green generală şi celelalte funcţii Green ale ecuaţiei Klein-Gordon

Până acum, în afară de distribuţia Dirac (spaţială) $\delta(\vec{x}' - \vec{x})$, am mai obţinut trei alte distribuţii, $\Delta(x,x')$ şi $\Delta^{(\pm)}(x,x')$, pe M_4. Cu siguranţă, din posibilităţile multiple de combinare a integralelor "produselor bilocale" ale modurilor de frecvenţă $\left\{f_{\vec{p}}(x),\ f_{\vec{p}'}(x'),\ f^*_{\vec{p}}(x),\ f^*_{\vec{p}'}(x')\right\}$, vor mai fi şi altele. Se pune deci întrebarea dacă există o metodă unitară de obţinere a acestora. Răspunsul este "da, pe baza funcţiei Green generale" $G(x,x')$, soluţie formală a ecuaţiei Klein-Gordon neomogene

$$\left(\Box(x) - m^2\right) G(x,x') = -\delta(x-x')\,. \tag{2.156}$$

Semnul "$-$" din al doilea membru este o chestiune de convenţie, deci rugăm cititorul mai puţin avizat să compare cu atenţie (dacă doreşte, până la semn) rezultatele din diversele tratate de specialitate. Ideea centrală este aceea că, pentru acţiunea

$$\left(\Box(x) - m^2\right) e^{ip(x-x')} = -\left(p^2 + m^2\right) e^{ip(x-x')} \tag{2.157}$$

a operatorului Gordon, $\Box(x) - m^2$, asupra funcţiilor $e^{ip(x-x')}$, cu $p = (\vec{p}, E)$ un 4-vector oarecare (deci nu neapărat *on-shell*) din R^4, avem definită inversa

$$\left(\Box(x) - m^2\right)^{-1} e^{ip(x-x')} = -\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2 + m^2}\,, \tag{2.158}$$

astfel încât, utilizând reprezentarea integrală Fourier

$$\delta(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{ip(x-x')}\,, \tag{2.159}$$

obţinem soluţia (formal-) exactă

$$G(x,x') = -\left(\Box(x) - m^2\right)^{-1} \delta(x-x') \,, \tag{2.160}$$

adică *funcţia Green generală*

$$G(x,x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2} \,. \tag{2.161}$$

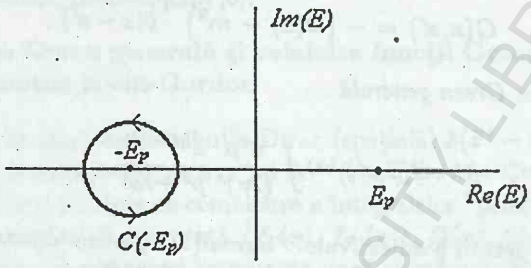
Folosirea repetată a adjectivului "formal(ă)" provine din faptul că integrandul este singular pe hipersuprafaţa *on-shell*

$$p^2 + m^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; E^2 = E_p^2 \,, \text{ cu } E_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \,,$$

"pătură" a soluţiei în spaţiul (dual lui M_4) R^4 al cuadri-impulsurilor p. Prin urmare, integrarea directă, după $p^4 = E \in \mathrm{R}$, în (2.161), se "izbeşte" de problema tratării acestor singularităţi, (în) $E = \pm E_p$. De aici apare, ca metodă foarte ingenioasă de soluţionare a acestei probleme, posibilitatea complexificării componentei $p^4 = E$, adică a extinderii lui R^4 la $\mathrm{R}^3 \times \mathrm{C}$, astfel încât, prin alegerea diverselor contururi (închise) de integrare în C – care ocolesc sau înglobează polii simpli $E = \pm E_p$ – să obţinem diversele funcţii Green "bine definite" din funcţia Green generală

$$G(x,x') = \int_{\mathrm{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \oint_\Gamma \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2} \,, \tag{2.162}$$

(unde Γ este un contur închis, principial oarecare, din C). Dacă avem dreptate, atunci, în cadrul "echivalenţei de omotopie", trebuie să existe câte un contur Γ (pentru $\varepsilon \in \mathrm{C}$) care să reducă funcţia Green (2.162) la fiecare din cele trei funcţii Wightmann $\Delta(x,x')$, $\Delta^{(\pm)}(x,x')$.
Într-adevăr, alegând Γ sub forma cercului $C(-E_p)$, centrat în $E = -E_p$ şi parcurs în sens trigonometric,



obţinem din (2.162), prin aplicarea teoremei reziduurilor,

$$G^{(-)}(x,x') = -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \oint_{C(-E_p)} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{ip(x-x')}}{E^2-E_p^2} =$$

$$= -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \oint_{C(-E_p)} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(t-t')}}{E^2-E_p^2} =$$

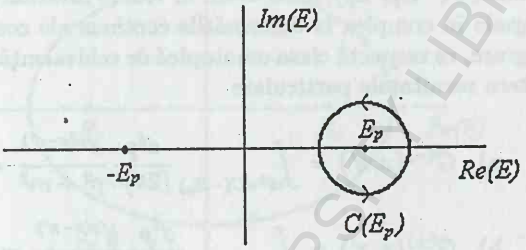
$$= \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_p} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} e^{iE_p(t-t')}, \qquad (2.163)$$

adică, trecându-l pe $\vec{p}'$ în $-\vec{p}$ şi utilizând (apoi) 4-impulsul $p = (\vec{p}, E)$, rezultă

$$G^{(-)}(x,x') = \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \frac{d^3p}{2E_p} e^{-ip(x-x')} = \Delta^{(-)}(x,x'), \qquad (2.164)$$

deci chiar funcţia Wightmann de frecvenţă negativă. Prin analogie, pentru $\Delta^{(+)}(x,x')$, diferenţa specifică de frecvenţă pozitivă ne duce cu gândul la polul simplu $E = E_p$, adică la considerarea în planul complex a integrării după E în (2.162), pe cercul $C(E_p)$, parcurs în sens trigonometric.

BCU "I. CENTA" UNIVERSITY LIBRARY



Rezultă atunci

$$G^{(+)}(x,x') = -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \oint_{C(E_p)} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{ip(x-x')}}{E^2 - E_p^2} =$$

$$= -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')} \oint_{C(E_p)} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(t-t')}}{E^2 - E_p^2} =$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_p} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')} e^{-iE_p(t-t')}, \qquad (2.165)$$

adică, într-adevăr, (cu 4-impulsul $p = (\vec{p}, E)$),

$$G^{(+)}(x,x') = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{2E_p} e^{ip(x-x')} = \Delta^{(+)}(x,x'). \qquad (2.166)$$

Pentru obţinerea în aceeaşi manieră, din funcţia Green generală (2.162), a funcţiei Wightmann complete este clar, din expresia simplă (2.115), că cele două contururi de integrare $C(-E_p)$ şi $C(E_p)$, care au condus la rezultatele (2.164), (2.166), trebuie considerate simultan, adică

$$\Delta(x,x') = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \oint_{C(-E_p)\cup C(E_p)} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2 + m^2}. \qquad (2.167)$$

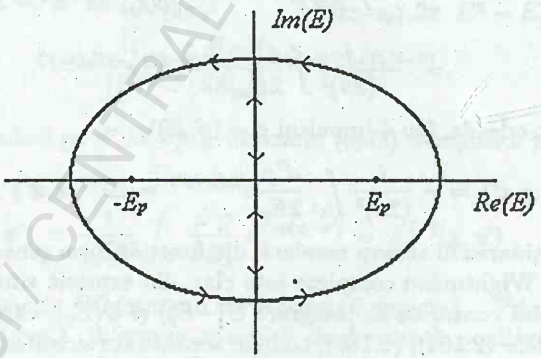
BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Carenţa estetică pusă în evidenţă de caracterul disjunct al celor două contururi se poate remedia imediat, prin introducerea unui contur unic, $\Gamma(-E_p, E_p)$, dacă avem în vedere invarianţa rezultatului unei integrale în complex la deformările continue ale conturului (închis) de integrare, ce respectă clasa omotopică de echivalenţă. Prin urmare, fără a altera rezultatele particulare

$$\text{a)}\quad G^{(-)}(x,x') = \int_{\mathbb{R}^3\times C(-E_p)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2} = \Delta^{(-)}(x,x')\,,$$

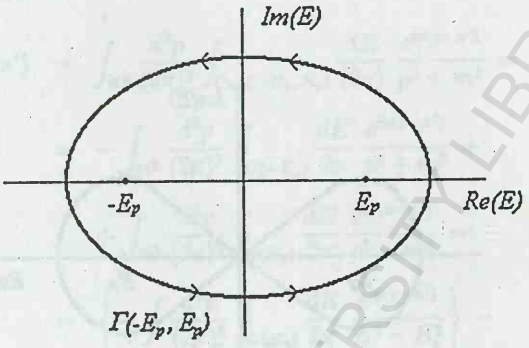
$$\text{b)}\quad G^{(+)}(x,x') = \int_{\mathbb{R}^3\times C(E_p)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2} = \Delta^{(+)}(x,x')\,, \tag{2.168}$$

(din (2.161) pe $C(-E_p)$, $C(E_p)$), putem deforma cele două cercuri după cum urmează



şi, cum suma celor două integrale pe axa imaginară $Re(E) = 0$ se anulează, rămânem, de fapt, cu un singur contur, $\Gamma(-E_p, E_p)$,

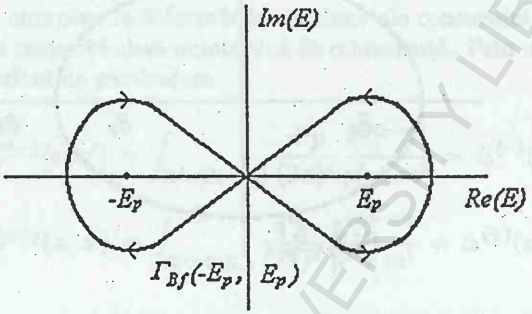
BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



înconjurând cei doi poli în sens trigonometric şi oferind pentru funcţia de comutare reprezentarea (Green) integrală

$$\Delta(x,x') = \int_{\mathbb{R}^3\times\Gamma(-E_p,E_p)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2}\,. \qquad (2.169)$$

Aşadar, "metoda unitară", de care vorbeam la începutul acestui subparagraf, funcţionează şi, în consecinţă, putem căuta, prin particularizarea conturului Γ din expresia (2.162) a funcţiei Green generale, celelalte funcţii Green ale ecuaţiei Gordon atât *în variantă omogenă* cât şi *neomogenă*. Deoarece, după cum am arătat deja (sau se poate verifica direct din formulele (2.168, 169) prin aplicarea teoremei Cauchy), cele trei funcţii Wightmann sunt funcţii Green omogene, ne punem întrebarea "dacă mai există şi o a patra". Răspunsul este "da, prin alegerea în (2.162) a aşa-numitului *contur fluture*, sau *în 8 culcat*", obţinut prin deformarea cercurilor $C(\pm E_p)$, după ce li s-a asigurat tangenţa în $E = 0$ şi a fost schimbat sensul de parcurgere a conturului $C(-E_p)$, adică



rezultând deci,

$$G_{Bf}(x,x') = \int_{\mathbb{R}^3\times\Gamma_{Bf}(-E_p,E_p)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2}\,, \tag{2.170}$$

unde Bf provine din englezescul *butterfly*. Prelucrarea ulterioară, în detaliu, a formei acestei funcţii Green (omogene) este înlesnită de faptul că integrarea pe conturul "aripii drepte" este complet echivalentă cu cea pe $C(E_p)$, iar pentru integrarea pe conturul "aripii stângi" obţinem rezultatul de pe $C(-E_p)$ cu semn schimbat (datorită inversării sensului

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de parcurgere), adică

$$G_{Bf}(x,x') = \int_{R^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \oint_{\Gamma_{Bf}(-E_p,E_p)} \frac{dE}{(2\pi)} \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2} =$$

$$= -\int_{R^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \oint_{C(-E_p)} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2} +$$

$$+ \int_{R^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \oint_{C(E_p)} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2} =$$

$$= \left\{ -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \oint_{C(E_p)} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{ip(x-x')}}{E^2-E_p^2} \right\} -$$

$$- \left\{ -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \oint_{C(-E_p)} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{ip(x-x')}}{E^2-E_p^2} \right\}. \tag{2.171}$$

Aceasta conduce direct, prin compararea cu prima egalitate din (2.165) şi respectiv (2.163), la expresia simplă

$$G_{Bf}(x,x') = \Delta^{(+)}(x,x') - \Delta^{(-)}(x,x') \tag{2.172}$$

de descompunere a *funcţiei (Green omogene) fluture* în raport cu funcţiile Wightmann $\Delta^{(\pm)}(x,x')$. Înlocuind în (2.172) expresiile (2.166), (2.164) ale acestora, obţinem şi mai concret

$$G_{Bf}(x,x') = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E_p} \cos[p(x-x')] , \tag{2.173}$$

ceea ce sugerează, prin analogie cu forma (2.121) a funcţiei de comutare, introducerea cu ajutorul funcţiei *butterfly* a aşa-numitei *funcţii de anticomutare*

$$\Delta_1(x,x') = i\, G_{Bf}(x,x') , \tag{2.174}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică

$$\Delta_1(x,x') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{E_p}\cos[p(x-x')]\,, \tag{2.175}$$

considerată în literatura de specialitate drept "cea de a patra funcţie Wightmann". Aceasta este, în mod evident, o soluţie (exactă) a problemei Cauchy

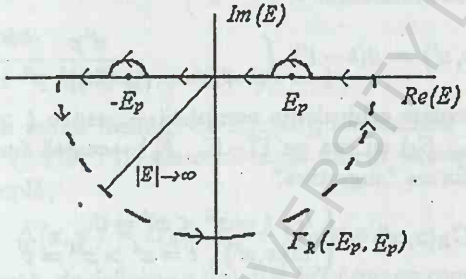
$$\begin{aligned}[\Delta_1(x,x')]_{t=t'} &= \int_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{E_p}\\ \left[\frac{\partial}{\partial t}\Delta_1(x,x')\right]_{t=t'} &= 0\,,\end{aligned} \tag{2.176}$$

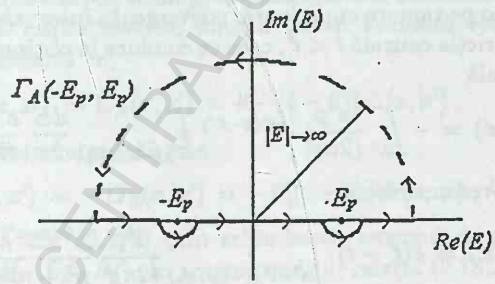
pentru ecuaţia Gordon (omogenă)

$$\left(\Box(x) - m^2\right)\Delta_1(x,x') = 0\,. \tag{2.177}$$

Să trecem acum la determinarea primelor două – foarte importante – funcţii Green neomogene, cunoscute sub numele de *funcţia Green retardată* şi, respectiv, *avansată*. "Injecţia de pornire" este dată de răspunsul la întrebarea "ce se întâmplă dacă deformăm pe rând conturul de integrare $\Gamma(-E_p, E_p)$ (al funcţiei de comutare) ca în figură"

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY





În primul caz, pe $\Gamma_R(-E_p, E_p)$, asigurarea convergenţei integralei din $e^{-iE(t-t')}$, cum $Im(E) \to -\infty$, nu este posibilă decât dacă $t > t'$,

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică funcţia Green formală

$$G(x,x') = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \oint_{\Gamma_R(-E_p,\,E_p)} \frac{dE}{2\pi}\, \frac{e^{-iE(t-t')}}{E^2-E_p^2}$$

trebuie multiplicată cu distribuţia *Heaviside* $\theta(t-t')$, rezultând astfel *funcţia Green retardată*

$$G_R(x,x') = \theta(t-t') \int_{\mathbb{R}^3\times\Gamma_R(-E_p,\,E_p)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2}\,. \tag{2.178}$$

Având în vedere echivalenţa completă – pentru $t > t'$ – a integralei pe $\Gamma_R(-E_p\,,\,E_p)$ cu cea pe $\Gamma(-E_p\,,\,E_p)$, această funcţie mai poate fi scrisă sub forma "sugestivă"

$$G_R(x,x') = \begin{cases} 0\,,\ t = x^4 < x'^4 = t' \\ \Delta(x,x')\,,\ t = x^4 > x'^4 = t' \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ G_R(x,x') = \theta(t-t')\Delta(x,x')\,. \tag{2.179}$$

În al doilea caz, corespunzător conturului $\Gamma_A(-E_p\,,\,E_p)$, dat fiind că $Im(E) \to \infty$ pe ramura superioară, convergenţa integralei din $e^{-iE(t-t')}$ impune restricţia cauzală $t < t'$, ceea ce conduce la obţinerea din funcţia Green cauzală

$$G(x,x') = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \oint_{\Gamma_A(-E_p,\,E_p)} \frac{dE}{2\pi}\, \frac{e^{-iE(t-t')}}{E^2-E_p^2}\,,$$

a *funcţiei Green avansate*

$$G_A(x,x') = \theta(t'-t) \int_{\mathbb{R}^3\times\Gamma_A(-E_p,\,E_p)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2}\,, \tag{2.180}$$

reprezentabilă, analog *funcţiei Green retardate* (2.179), şi sub forma

$$G_A(x,x') = \begin{cases} \Delta(x,x')\,,\ t = x^4 < x'^4 = t' \\ 0\,,\ t = x^4 > x'^4 = t' \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ G_A(x,x') = \theta(t'-t)\Delta(x,x')\,. \tag{2.181}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cum

$$\theta(t-t') = \begin{cases} 0 \ , & t < t' \\ 1 \ , & t > t' \end{cases} ,$$

iar

$$\theta(t'-t) = \begin{cases} 1 \ , & t < t' \\ 0 \ , & t > t' \end{cases} ,$$

rezultă identitatea

$$\theta(t-t') + \theta(t'-t) = 1 \, ,$$

care, înmulţită în ambii membri cu $\Delta(x,x')$, ne conduce – având în vedere expresiile (2.179, 181) ale celor două funcţii Green neomogene – la o relaţie simplă,

$$\Delta(x,x') = G_A(x,x') + G_R(x,x') \, , \tag{2.182}$$

dar mai rar utilizată, de definiţie a *funcţiei Wightmann complete.* Referitor la ceea ce spuneam cu privire la consultarea atentă a literaturii de specialitate, deoarece unele funcţii Green, generic notate tot cu Δ, pot să apară cu schimbări de semn şi/sau multiplicate cu unitatea imaginară i, în cele mai multe tratate, funcţia Green avansată este notată cu $\Delta_A(x,x')$ şi definită ca

$$\Delta_A(x,x') = G_A(x,x') = \theta[-(t-t')]\,\Delta(x,x') \, , \tag{2.183}$$

iar funcţia Green retardată este

$$\Delta_R(x,x') = -G_R(x,x') = -\theta[(t-t')]\,\Delta(x,x') \, , \tag{2.184}$$

fiind obţinută din (2.178) prin schimbarea sensului de parcurgere a conturului $\Gamma_R(-E_p\,,\,E_p)$. În aceste condiţii, relaţia (2.182) devine

$$\Delta(x,x') = \Delta_A(x,x') - \Delta_R(x,x') \, . \tag{2.185}$$

Aproape toate elementele prezentate până acum (referitoare la funcţiile Green şi "metoda unitară" de obţinere a lor) ne vor ajuta concret în introducerea şi discutarea celei de a treia funcţii Green neomogene a ecuaţiei Klein-Gordon.

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

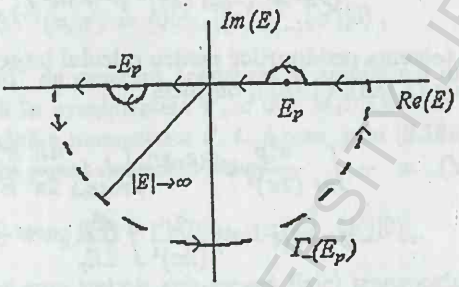
H. Funcţia Green cauzală sau propagatorul Feynman

Pentru abordarea acestui subiect, datorită importanţei sale deosebite în toată Teoria Cuantică a Câmpurilor, s-au formulat în decursul timpului mai multe metode, unele cu un pronunţat caracter axiomatic, altele "intuitive" (în sensul utilizat de Poincaré pentru acest cuvânt). Deşi foarte clare (şi efectiv concise) din punct de vedere matematic, – cum spun fizicienii, "ca reţetă de calcul" – metodele axiomatice (de tratare a funcţiei Green cauzale) sunt ermetice ca interpretare fizică directă (şi fundamentală). Din acest motiv, în cele ce urmează, vom prefera una din "metodele intuitive", bazată pe corelarea rezultatelor următoarelor două observaţii, una de ordin formal, matematic, iar cealaltă de natură fizică, principială (ca interpretare). Prima se referă la faptul că, în construirea celor două funcţii Green neomogene, $G_{R,A}(x,x')$, contururile corespunzătoare $\Gamma_{R,A}(-E_p\,,\,E_p)$ (de integrare în planul complex al componentei $p^4 = E$) includ ambii poli $E = \pm E_p$ ai integrandului $(p^2+m^2)^{-1}\,\exp[ip(x-x')]$. Apare în mod natural întrebarea: "ce se întâmplă – sau, mai concret, ce obţinem – dacă includem pe rând numai câte un pol, păstrând "ramurile" respective spre $Im\,E \to \mp\infty$?".

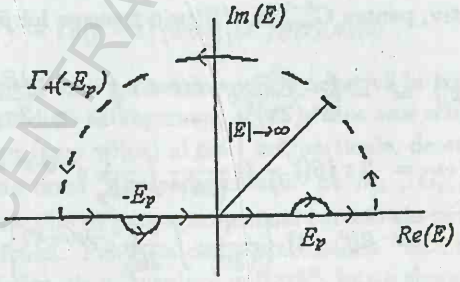
Modificând $\Gamma_R(-E_P\,,\,E_p)$, astfel încât să "lase în afară" polul simplu $E = -E_p$, rezultă conturul $\Gamma_-(E_p)$ (unde indicele "$-$" se referă la parcurgerea ramurii inferioare, $Im\,E < 0$) şi funcţia Green corespunzătoare (neomogenă, după cum se poate demonstra)

$$G^{(+)}_{t>t'}(x,x') = \left(\int_{\mathbb{R}^3\times\Gamma_-(E_p)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2}\right)\theta(t-t')\,, \qquad (2.186)$$

unde indicele superior "$(+)$" se referă la includerea numai a polului $E = E_p$, iar indicele inferior "$t > t'$ " provine din $\theta(t-t')$, care este necesară, ca şi în cazul funcţiei Green retardate, pentru asigurarea convergenţei.



În cazul "diametral opus", ca alegere a "ramurii spre infinit" şi a polului inclus, avem conturul $\Gamma_+(-E_p)$,



obţinut din $\Gamma_A(-E_p, E_p)$ prin excluderea din domeniul înconjurat de

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

contur a polului simplu $E = E_p$, conducând la funcţia Green neomogenă

$$G^{(-)}_{t<t'}(x,x') = \left(\int_{\mathbb{R}^3\times\Gamma_+(-E_p)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2}\right)\theta(t'-t)\,. \tag{2.187}$$

Aplicând teorema reziduurilor pentru calculul integralelor pe $\Gamma_\mp(\pm E_p)$ din relaţiile (2.186), (2.187), obţinem

$$\begin{aligned} G^{(+)}_{t>t'}(x,x') &= -\int_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\oint_{\Gamma_-(E_p)}\frac{dE}{2\pi}\,\frac{e^{-iE(t-t')}}{E^2-E_p^2}\,\theta(t-t') = \\ &= -2\pi i\,\theta(t-t')\,\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^3p}{2E_p}\,e^{i[\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')-E_p(t-t')]} = \\ &= \theta(t-t')\left\{-\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E_p}\,e^{ip(x-x')}\right\}, \end{aligned}$$

cu $p = (\vec{p},\, E_p)$ în ultima egalitate, adică (având în vedere (2.118))

$$G^{(+)}_{t>t'}(x,x') = \theta(t-t')\,\Delta^{(+)}(x,x')\,, \tag{2.188}$$

şi respectiv, pentru $G^{(-)}_{t<t'}(x,x')$ (prin trecerea lui $\vec{p}$ în $-\vec{p}$)

$$\begin{aligned} G^{(-)}_{t<t'}(x,x') &= -\int_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\oint_{\Gamma_+(-E_p)}\frac{dE}{2\pi}\,\frac{e^{-iE(t-t')}}{E^2-E_p^2}\,\theta(t'-t) = \\ &= 2\pi i\,\theta(t'-t)\,\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^3p}{2E_p}\,e^{-i[\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')-E_p(t-t')]} = \\ &= \theta(t'-t)\left\{\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E_p}\,e^{-ip(x-x')}\right\}. \end{aligned}$$

De fapt (având în vedere (2.120)), se obţine

$$G^{(-)}_{t<t'}(x,x') = \theta(t'-t)\,\Delta^{(-)}(x,x')\,. \tag{2.189}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aici intervine a doua observaţie, cea de ordin fizic. Am văzut, ca semnificaţie, că funcţia Wightmann de frecvenţă pozitivă reprezintă amplitudinea de tranziţie (2.129),

$$i\Delta^{(+)}(x,x') = \langle 0|\phi_{(+)}(x)\,\phi^{\dagger}_{(-)}(x')|0\rangle\,,$$

în "procesul vid-vid" de generare, transport şi anihilare a unui pachet de energie pozitivă în evenimentele x', x din M_4. Ceea ce lipsea era ordonarea cronologică a momentelor t', t. Acum, prin (2.188), o avem. Cu alte cuvinte, din punct de vedere cauzal,

$$G^{(+)}_{t>t'}(x,x') = -i\,\theta(t-t')\,\langle 0|\phi_{(+)}(x)\,\phi^{\dagger}_{(-)}(x')|0\rangle \qquad (2.190)$$

exprimă (exact aşa cum trebuie sub aspect fizic) transportul de energie pozitivă în viitor. În mod analog (ca interpretare), din (2.189) şi amplitudinea de tranziţie (2.133),

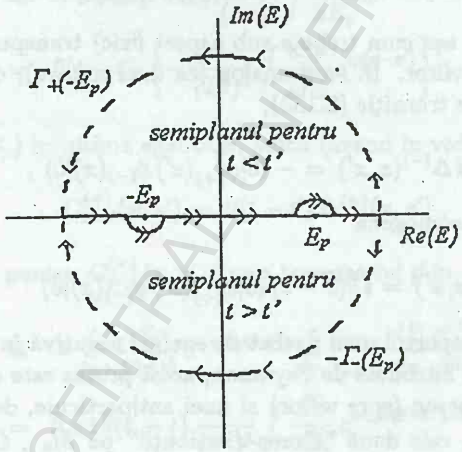
$$i\Delta^{(-)}(x,x') = -\langle\bar{0}|\phi^{\dagger}_{(+)}(x')\,\phi_{(-)}(x)|\bar{0}\rangle\,,$$

funcţia Green neomogenă

$$G^{(-)}_{t<t'}(x,x') = i\,\theta(t'-t)\,\langle\bar{0}|\phi^{\dagger}_{(+)}(x')\,\phi_{(-)}(x)|\bar{0}\rangle \qquad (2.191)$$

va exprima transportul unui pachet de energie negativă în trecut. Dar, în baza ipotezei introduse de Feynman, acest proces este echivalent cu transportul ortocron (spre viitor) al unei antiparticule, de energie pozitivă. Aşadar, cele două "Green-distribuţii" pe M_4 , $G^{(+)}_{t>t'}(x,x')$ şi $G^{(-)}_{t<t'}(x,x')$, sunt funcţiile de propagare cauzal corecte ale particulei şi, respectiv, antiparticulei. Pentru a completa metoda "intuitivă", mai trebuie să le combinăm, de o "manieră unitară", într-o singură funcţie $SO(3,1)$-invariantă, *two-point* pe M_4, numită *funcţia Green cauzală*, care să poată fi obţinută, ca şi celelalte funcţii Green analizate până acum, prin particularizarea (sau, mai corect, specificarea) conturului

de integrare Γ din reprezentarea (2.162) a funcţiei Green generale şi să descrie în ordonare cronologică sistemul particulă-antiparticulă, adică propagarea, cauzal corectă, a cuantelor câmpului. În acest sens, observăm că, dacă pur şi simplu suprapunem contururile $\Gamma_{\mp}(\pm E_p)$, atunci suma integralelor pe $Im(E) = 0$ şi pe cele două semicercuri din jurul polilor $\mp E_p$ se anulează, rămânând doar cu conturul $\Gamma(-E_p\,,\,E_p)$ ("extins la infinit", în ambele semiplane) care ne-a oferit deja funcţia de comutare, $\Delta(x, x')$.



Prin urmare, dacă dorim să obţinem o nouă funcţie Green, va trebui (cel puţin) să inversăm sensul parcursului pe unul din contururi. Deoarece porţiunile cu $Im\,E = 0$ ale conturului $\Gamma_+(-E_p)$ sunt parcurse

în sensul pozitiv al axei reale, vom schimba sensul numai pe $\Gamma_-(E_p)$ ceea ce înseamnă "trecerea" funcţiei Green neomogene $G^{(+)}_{t>t'}(x,x')$ în

$$\begin{aligned} -G^{(+)}_{t>t'}(x,x') &= -\theta(t-t')\Delta^{(+)}(x,x') = \\ &= i\,\theta(t-t')\,\langle 0|\phi_{(+)}(x)\,\phi^{\dagger}_{(-)}(x')|0\rangle \end{aligned} \tag{2.192}$$

şi reprezentarea celor două contururi sub forma din figura de mai sus. Dacă acum adunăm cele două funcţii Green, $-G^{(+)}_{t>t'}(x,x')$ şi $G^{(-)}_{t<t'}(x,x')$, integralele pe axa reală şi pe semicercurile mici nu se mai distrug reciproc, având acelaşi semn, şi obţinem funcţia Green cauzală

$$G_F(x,x') = -\{\theta(t-t')\,\Delta^{(+)}(x,x') - \theta(t'-t)\,\Delta^{(-)}(x,x')\}\,, \tag{2.193}$$

(indicele F provenind de la Feynman), adesea notată şi cu $D_F(x,x')$. Din (2.192) şi (2.191), obţinem expresia echivalentă cu (2.193)

$$\begin{aligned} &D_F(x,x') = \\ &= i\left\{\theta(t-t')\,\langle 0|\phi_{(+)}(x)\phi^{\dagger}_{(-)}(x')|0\rangle + \theta(t'-t)\,\langle\bar{0}|\phi^{\dagger}_{(+)}(x)\phi_{(-)}(x')|\bar{0}\rangle\right\}, \end{aligned} \tag{2.194}$$

care, după cum vom vedea imediat, permite definirea funcţiei Green cauzale prin intermediul valorii medii de aşteptare pe starea de vid a produsului ordonat cronologic al operatorilor de câmp $\phi(x)$, $\phi^{\dagger}(x')$, întărindu-ne convingerea că aceasta este funcţia Green căutată. Într-adevăr, din

$$\begin{aligned} &\langle\bar{0};0|\phi(x)\phi^{\dagger}(x')|0;\bar{0}\rangle = \\ &= \langle\bar{0};0|\left(\phi_{(+)}(x)+\phi_{(-)}(x)\right)\left(\phi^{\dagger}_{(+)}(x')+\phi^{\dagger}_{(-)}(x')\right)|0;\bar{0}\rangle = \\ &= \langle\bar{0};0|\phi_{(+)}(x)\,\phi^{\dagger}_{(-)}(x')|0;\bar{0}\rangle = \\ &= \langle\bar{0}|\bar{0}\rangle\langle 0|\phi_{(+)}(x)\,\phi^{\dagger}_{(-)}(x')|0\rangle = \\ &= \langle 0|\phi_{(+)}(x)\,\phi^{\dagger}_{(-)}(x')|0\rangle \end{aligned} \tag{2.195}$$

BCU IAŞI CENTRU UNIVERSITAR LIBRARY

şi

$$\begin{aligned}
&\langle \bar{0};0|\phi^\dagger(x')\phi(x)|0;\bar{0}\rangle = \\
&= \langle \bar{0};0|\left(\phi^\dagger_{(+)}(x') + \phi^\dagger_{(-)}(x')\right)\left(\phi_{(+)}(x) + \phi_{(-)}(x)\right)|0;\bar{0}\rangle = \\
&= \langle \bar{0};0|\phi^\dagger_{(+)}(x')\,\phi_{(-)}(x)|0;\bar{0}\rangle = \\
&= \langle 0|0\rangle\langle \bar{0}|\phi^\dagger_{(+)}(x')\,\phi_{(-)}(x)|\bar{0}\rangle = \\
&= \langle \bar{0}|\phi^\dagger_{(+)}(x')\,\phi_{(-)}(x)|\bar{0}\rangle \qquad (2.196)
\end{aligned}$$

rezultă, prin înlocuire în (2.194) şi notarea simplă, cu $|0\rangle$, a stării de vid particulă-antiparticulă,

$$D_F(x,x') = i\,\langle 0|\theta(t-t')\phi(x)\,\phi^\dagger(x') + \theta(t'-t)\,\phi^\dagger(x')\phi(x)|0\rangle\,. \quad (2.197)$$

Operatorul sumă "temperată" prin funcţiile θ-Heaviside a produselor celor doi operatori de câmp este chiar "produsul cronologic", definit sub forma

$$\mathrm{T}\left[\phi(x)\phi^\dagger(x')\right] = \begin{cases} \phi(x)\phi^\dagger(x') & , \quad x^4 = t > t' = x'^4 \\ \phi^\dagger(x')\phi(x) & , \quad x'^4 = t' > t = x^4\,, \end{cases} \qquad (2.198)$$

astfel încât, în raport cu acesta, funcţia Green cauzală poate fi definită într-o manieră generală, valabilă nu numai pentru câmpul scalar complex, prin relaţia

$$-i\,D_F(x,x') = \langle 0|\mathrm{T}\left[\phi(x)\phi^\dagger(x')\right]|0\rangle\,. \qquad (2.199)$$

Pentru sintetizarea şi, în acelaşi timp, "flexibilitatea" limbajului, valoarea medie pe starea de vid a produsului cronologic al operatorilor de câmp a primit denumirea simplă de *contracţie cronologică*,

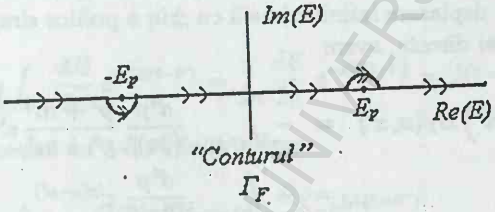
$$\overbrace{\phi(x)\,\phi^\dagger(x')} = \langle 0|\mathrm{T}\left[\phi(x)\phi^\dagger(x')\right]|0\rangle\,, \qquad (2.200)$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cu ajutorul căreia definiţia (2.199) se exprimă prescurtat sub forma

$$D_F(x,x') = i\,\overbrace{\phi(x)\,\phi^\dagger}(x')\,. \tag{2.201}$$

Au mai rămas de explicitat reprezentarea integrală a funcţiei Green cauzale şi imaginea Fourier a propagatorului Feynman. Pentru aceasta, să observăm că, dacă notăm cu Γ_F porţiunea comună, în sensul pozitiv al axei reale, a celor două contururi $\Gamma_+(-E_p)$ şi $-\Gamma_-(E_p)$, ca în figură,



atunci, cum fiecare din integralele pe semicercurile mari (extinse la $|E| \to \infty$) se anulează, datorită "restricţiei cauzale" $t < t'$ şi respectiv $t > t'$, expresiile (2.187) şi, respectiv, (2.186) (luată cu semn schimbat) se reduc la reprezentările integrale

$$\text{a)}\quad G^{(-)}_{t<t'}(x,x') = \theta(t'-t)\int_{\mathbb{R}^3\times\Gamma_F}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2}\,,$$

$$\text{b)}\quad -G^{(+)}_{t>t'}(x,x') = \theta(t-t')\int_{\mathbb{R}^3\times\Gamma_F}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2}\,, \tag{2.202}$$

cu ajutorul cărora deducem, din definiţia "primară"

$$D_F(x,x') = -G^{(+)}_{t>t'}(x,x') + G^{(-)}_{t<t'}(x,x')\,, \tag{2.203}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

expresia generală

$$D_F(x,x') = \int_{\mathbb{R}^3\times\Gamma_F} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2} \tag{2.204}$$

a funcţiei Green cauzale pe conturul Feynman Γ_F. Pentru a demonstra că aceasta satisface, într-adevăr, ecuaţia Gordon neomogenă (2.156) în cazul limită, când raza η a celor două semicercuri "mici" tinde la zero, putem aplica două metode echivalente, una directă, bazată pe calculul interval cu interval al integralei pe Γ_F şi luarea limitei $\eta \to 0$, cealaltă indirectă, bazată pe forma (2.161) a funcţiei Green generale şi "artificiul Feynman" de deplasare infinitezimală cu $\pm i\eta$ a polilor simpli $\mp E_p$. În cadrul metodei directe, avem

$$\begin{aligned}\left(\Box(x) - m^2\right) D_F(x,x') &= -\int_{\mathbb{R}^3\times\Gamma_F} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{p^2+m^2}{p^2+m^2}\,e^{ip(x-x')} = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3\times\Gamma_F} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,e^{ip(x-x')},\end{aligned}$$

adică

$$\begin{aligned}&\left[\left(\Box(x) - m^2\right) D_F(x,x')\right]_{\eta\to 0} = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \lim_{\eta\to 0}\int_{\Gamma_F} \frac{dE}{2\pi}\,e^{-iE(t-t')}\,.\end{aligned} \tag{2.205}$$

Cum semicercul din jurul polului $-E_p$ este parametrizat prin

$$E = -E_p + \eta e^{i\alpha}\,;\ \text{cu}\ \alpha \text{ de la } \pi \text{ la } 2\pi\,,$$

iar cel cu centrul în E_p are reprezentarea parametrică

$$E = E_p + \eta e^{i\alpha}\,,\ \text{cu}\ \alpha \text{ de la } \pi \text{ la } 0\,,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

rezultă, pentru limita $\eta \to 0$ a integralei după E pe Γ_F,

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{\Gamma_F}\frac{dE}{2\pi}\,e^{-iE(t-t')} =$$
$$= \lim_{\eta\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{-E_p-\eta}\frac{dE}{2\pi}\,e^{-iE(t-t')} + i\eta\,e^{iE_p(t-t')}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\alpha}{2\pi}\,e^{i\alpha}\,e^{-i\eta e^{i\alpha}(t-t')} + \right.$$
$$+ \int_{-E_p+\eta}^{E_p-\eta}\frac{dE}{2\pi}\,e^{-iE(t-t')} + i\eta\,e^{-iE_p(t-t')}\int_{\pi}^{0}\frac{d\alpha}{2\pi}\,e^{i\alpha}\,e^{-i\eta e^{i\alpha}(t-t')} +$$
$$\left. + \int_{E_p+\eta}^{\infty}\frac{dE}{2\pi}\,e^{-iE(t-t')}\right\},$$

adică

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{\Gamma_F}\frac{dE}{2\pi}\,e^{-iE(t-t')} = \int_{\mathbf{R}}\frac{dE}{2\pi}\,e^{-iE(t-t')} = \delta(t-t').$$

Astfel, împreună cu 3-distribuţia Dirac

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}\,') = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')},$$

obţinem, într-adevăr, din (2.205), ecuaţia Gordon neomogenă

$$\left[\Box(x) - m^2\right] D_F(x,x') = -\,\delta(x-x'). \tag{2.206}$$

În cazul metodei indirecte, ideea este următoarea. Funcţia Green (2.161) cu integrala "luată" pe $\mathbf{R}^4$, verifică "din start" ecuaţia (2.156), deoarece

$$\left(\Box(x) - m^2\right) G(x,x') = -\int_{\mathbf{R}^4}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,e^{ip(x-x\,')} = -\,\delta(x-x').$$

Mai rămâne să "evităm" printr-un procedeu de trecere la limită polii $\pm E_p$, pentru a nu avea probleme de convergenţă. Aici intervine "artificiul Feynman": în loc să curbăm conturul Γ_F în jurul polilor, prin cele

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

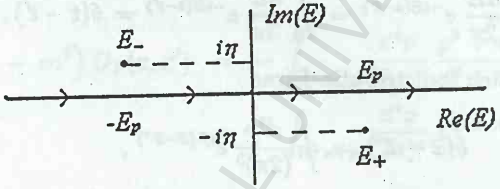
două semicercuri de rază η, deplasăm infinitezimal polii, faţă de axa reală $Im(E) = 0$, cu $\pm i\eta$ pentru $\mp E_p$, prin adăugarea unui termen, $-i\varepsilon$, cu $\varepsilon \to 0_+$, la numitorul $p^2 + m^2$. Astfel, din

$$p^2 + m^2 - i\varepsilon = 0 \,,$$

rezultă noii poli simpli

$$E_- = -E_p + i\eta \,, \quad E_+ = E_p - i\eta \,, \quad \text{cu } \eta = (2E_p)^{-1}\varepsilon \to 0_+$$

şi integrala după E se poate calcula direct pe axa reală, ca în figură,



conducând în mod riguros la definirea funcţiei Green cauzale sub forma şi prin intermediul limitei

$$D_F(x,x') = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} \,, \tag{2.207}$$

care este subînţeleasă în cadrul reprezentării integrale "prescurtate"

$$D_F(x,x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2 + m^2 - i0_+} \,. \tag{2.208}$$

În convenţia de signatură +2 (în care lucrăm) propagatorul Feynman se notează cu $\Delta_F(x,x')$ (la fel ca în cea de signatură -2) şi diferă

de funcţia Green cauzală, $D_F(x,x')$, numai prin semn, adică

$$\Delta_F(x,x') = -D_F(x,x') , \tag{2.209}$$

de unde rezultă integrala sa Fourier

$$\Delta_F(p) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\left(p^2+m^2-i0_+\right)^{-1} . \tag{2.210}$$

Aceasta este menţionată adesea în literatura de specialitate sub forma "ultraprescurtată"

$$\Delta_F(p) = -\left(p^2+m^2-i0\right)^{-1} , \tag{2.211}$$

care provine din (2.210) prin redefinirea adecvată a inversei transformatei Fourier (pentru eliminarea factorului $(2\pi)^{-2}$) şi subînţelegerea "limitei la zero" numai prin $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

În încheiere, dacă este să ne referim în mod exclusiv la propagatorul Feynman (al câmpului scalar), putem prezenta, pe lângă relaţiile (2.208 – 211), următoarea sinteză a principalelor rezultate:

(i) Din (2.209) şi (2.201), obţinem legătura

$$\Delta_F(x,x') = -i\,\overbrace{\phi(x)\phi^\dagger}(x') \tag{2.212}$$

între propagator şi contracţia cronologică. Dat fiind că "pe stânga" avem o entitate eminamente matematică, funcţia Green a ecuaţiei Gordon neomogene cu sursă spaţio-temporală punctuală, iar "pe dreapta" avem noţiunea fizică de valoare medie pe starea de vid a produsului ordonat cronologic al operatorilor de câmp, relaţia (2.212) reprezintă cu adevărat "puntea interpretativă" a formalismului (matematic) utilizat în teoriile cuantice de câmp.

BCU CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

(ii) Din (2.209) şi (2.193), rezultă imediat relaţia

$$\Delta_F(x,x') = \theta(t-t')\Delta^{(+)}(x,x') - \theta(t'-t)\Delta^{(-)}(x,x') \ , \quad (2.213)$$

care exprimă extrem de simplu,

$$\Delta_F(x,x') = \begin{cases} \Delta^{(+)}(x,x') & , \quad t = x^4 > x'^4 = t' \\ -\Delta^{(-)}(x,x') & , \quad t = x^4 < x'^4 = t' \ , \end{cases} \quad (2.214)$$

legătura cauzală dintre propagatorul Feynman şi cele două funcţii Wightmann $\Delta^{(\pm)}(x,x')$.

(iii) Pentru "scalarul real", cu $\phi^\dagger(x') = \phi(x')$, propagatorul Feynman se defineşte corespunzător (din (2.212)) prin relaţia

$$\Delta_F(x,x') = -i\,\overbrace{\phi(x)\phi}(x') \ , \quad (2.215)$$

având tot formele (2.209, 208) echivalente cu (2.210) sau (2.211), iar dacă mai este şi lipsit de masă (*massless*), adică $m = 0$, posedă imaginea Fourier (ultrasimplificată)

$$\Delta_F^0(k) = -\frac{1}{k^2 - i0} \ , \text{ cu } 4-\text{vectorul } k = (\vec{k},\omega) \text{ din } \mathbf{R}^4 \ . \quad (2.216)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.3 Produse de operatori

A. Produs normal

Din cele arătate în paragraful anterior, cu privire la operatorii de creare şi cei de anihilare, ştim că în studiul unui proces, dispariţia unei stări cuantice este însoţită întotdeauna de apariţia unei alte stări cuantice. În limbajul Teoriei Cuantice a Câmpului, aceasta indică aplicarea succesivă a doi operatori, unul care anihilează starea cuantică iniţială şi altul care creează starea cuantică finală. În acest sens, o deosebită importanţă o prezintă ordinea în care acţionează operatorii şi care trebuie să corespundă ordinii firești, logice, adică un produs de doi operatori, dintre care unul este de creare şi celălalt de anihilare, trebuie scris astfel încât să acţioneze întâi operatorul de anihilare (a unei stări) şi apoi operatorul de creare (a unei alte stări).

Să luăm, de pildă, produsul operatorilor $\psi^\dagger(x)$ şi $\psi(y)$, adică

$$\begin{aligned}\psi^\dagger(x)\psi(y) &= \psi^\dagger_{(+)}(x)\psi_{(+)}(y) + \psi^\dagger_{(-)}(x)\psi_{(-)}(y) + \\ &+ \psi^\dagger_{(+)}(x)\psi_{(-)}(y) + \psi^\dagger_{(-)}(x)\psi_{(+)}(y) \qquad (3.1)\end{aligned}$$

şi să îl aplicăm unei funcţii de stare. Se constantă următoarele: în primul şi al doilea termen din membrul drept, ambii operatori sunt de anihilare, respectiv de creare, astfel încât, din punctul nostru de vedere, ordinea este indiferentă. În ultimul termen, operatorul de anihilare fiind scris în dreapta celui de creare, va acţiona mai întâi, aşa cum este şi firesc. În termenul al treilea, ordinea logică a operatorilor este, însă, inversată. Vom evita această dificultate prin definirea noţiunii de produs normal al unui număr de operatori, înţelegând prin aceasta o astfel de aranjare a lor, încât operatorii de anihilare să fie întotdeauna scrişi la dreapta operatorilor de creare. Astfel, produsul normal al ope-

ratorilor $\psi^\dagger(x)$ şi $\psi(y)$ este

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left[\psi^\dagger(x)\psi(y)\right] &= \psi^\dagger_{(+)}(x)\psi_{(+)}(y) + \psi^\dagger_{(-)}(x)\psi_{(-)}(y) + \\ &+ \psi^\dagger_{(-)}(x)\psi_{(+)}(y) + \psi_{(-)}(y)\psi^\dagger_{(+)}(x)\,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

şi, efectuând diferenţa dintre relaţiile (3.1) şi (3.2), obţinem

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(x)\psi(y) - \mathrm{N}\left[\psi^\dagger(x)\psi(y)\right] &= \left[\psi^\dagger_{(+)}(x)\,,\,\psi_{(-)}(y)\right] = \\ = -i\,\Delta^{(-)}(y-x) &= i\,\Delta^{(+)}(x-y)\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

unde am ţinut seama de (2.113) şi de (2.151.b).

Întrucât ordinea în care intervin factorii în expresia diferitelor mărimi clasice este indiferentă, convenim ca, ori de câte ori vom efectua corespondenţa cuantică a mărimilor clasice, să alegem ordinea indicată de produsul normal. De exemplu, lagrangeianul câmpului scalar complex (în convenţia de signatură $\sigma = 2$), se va scrie sub forma

$$\begin{aligned} -\mathcal{L} &= \eta^{ik}\,\mathrm{N}\left[\phi^\dagger{}_{,i}\,\phi_{,k}\right] + m^2\,\mathrm{N}\left[\phi^\dagger\phi\right] = \\ &= :\eta^{ik}\phi^\dagger{}_{,i}\,\phi_{,k} + m^2\,\phi^\dagger\phi:\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

B. Produs cronologic

Revenind la produsul $\psi^\dagger(x)\psi(y)$, observăm că ordinea în care acţionează operatorii conţinuţi în produs trebuie să fie logică şi din punct de vedere cronologic, adică, dacă de pildă $x^4 > y^4$ (unde, conform notaţiei pe care am convenit să o utilizăm, x^4 şi y^4 reprezintă timpul t corespunzător evenimentului x, respectiv y), atunci va acţiona întâi operatorul $\psi(y)$ şi apoi operatorul $\psi^\dagger(x)$. În acest sens, definim produsul cronologic al unui număr de operatori, înţelegând prin acesta o astfel de aranjare a lor, încât dintre doi operatori corespunzători la două momente, t_1 şi t_2,

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cu $t_1 > t_2$, să acţioneze întâi operatorul corespunzător momentului t_2 şi apoi operatorul corespunzător momentului t_1 . Putem scrie atunci definiţia produsului cronologic sub forma

$$\mathrm{T}\left[\psi^\dagger(x)\psi(y)\right] = \begin{cases} \psi^\dagger(x)\psi(y) & \text{pentru } x^4 > y^4 \\ \psi(y)\psi^\dagger(x) & \text{pentru } y^4 > x^4 \,, \end{cases} \tag{3.5}$$

sau, introducând funcţia

$$\theta(x) = \begin{cases} 1\,, & x > 0 \\ 0\,, & x < 0 \,, \end{cases} \tag{3.6}$$

expresia produsului cronologic devine

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\left[\psi^\dagger(x)\psi(y)\right] &= \theta(x^4 - y^4)\psi^\dagger(x)\psi(y) + \\ &+ \theta(y^4 - x^4)\psi(y)\psi^\dagger(x)\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

În continuare, ne propunem să analizăm legătura care există între cele două tipuri de produse, normal şi cronologic. Având în vedere relaţiile (3.3) şi (3.7), putem scrie

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}\left[\psi^\dagger(x)\psi(y)\right] - \mathrm{N}\left[\psi^\dagger(x)\psi(y)\right] = \\ &= \left[\theta(x^4 - y^4) - 1\right]\psi^\dagger(x)\psi(y) + \\ &+ \theta(y^4 - x^4)\psi(y)\psi^\dagger(x) + i\Delta^{(+)}(x - y)\,, \end{aligned}$$

de unde, observând că

$$\left[\theta(x^4 - y^4) - 1\right] = -\theta(y^4 - x^4) \tag{3.8}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi ţinând cont de (3.3) şi (3.7), rezultă

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}\left[\psi^\dagger(x)\psi(y)\right] - \mathrm{N}\left[\psi^\dagger(x)\psi(y)\right] = \\ &= -\theta(y^4-x^4)\left[\psi^\dagger(x),\psi(y)\right] + i\Delta^{(+)}(x-y) = \\ &= i\left[-\theta(y^4-x^4)\Delta^{(-)}(x-y) - \theta(y^4-x^4)\Delta^{(+)}(x-y) + \right. \\ &\left. + \Delta^{(+)}(x-y)\right] . \end{aligned}$$

Dar, cum

$$1 - \theta(y^4-x^4) = \theta(x^4-y^4) , \tag{3.9}$$

avem, în fine,

$$\mathrm{T}\left[\psi^\dagger(x)\psi(y)\right] - \mathrm{N}\left[\psi^\dagger(x)\psi(y)\right] = i\Delta_F(x-y) \overset{(2.209)}{=} -iD_F(x-y) , \tag{3.10}$$

unde am reintrodus notaţia (2.213)

$$\Delta_F(x-y) = \theta(x^4-y^4)\Delta^{(+)}(x-y) - \theta(y^4-x^4)\Delta^{(-)}(x-y) \tag{3.11}$$

pentru propagatorul Feynman şi recunoaştem prin (2.209) funcţia Green cauzală, $D_F(x-y)$.

Dacă în relaţia (3.11) considerăm $y=0$ şi $x^4=t$ şi ţinem cont de (2.118) şi (2.120), avem

$$\begin{aligned} \Delta_F(x-y) &= \theta(t)\Delta^{(+)}(x) - \theta(-t)\Delta^{(-)}(x) = \\ &= \begin{cases} \frac{-i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E_p}\, e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-E_pt)} , & (t>0) \\ \frac{-i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E_p}\, e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}-E_pt)} , & (t<0) , \end{cases} \end{aligned} \tag{3.12}$$

care, prin trecerea, în cea de a doua integrală, a lui $\vec{p}$ în $-\vec{p}$, capătă forma unificată

$$D_F(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E_p}\, e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-E_p|t|)} = -\Delta_F(x-y) . \tag{3.13}$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

C. Stări de vid

Se numeşte stare de vid şi se notează prin $|0\rangle$ un vector de stare care se bucură de proprietatea că, dacă acţionăm asupra lui cu orice operator de anihilare, obţinem zero. Cu alte cuvinte, starea de vid (după cum arată şi numele) este acea stare în care nu există nici o particulă. De exemplu, acţionând asupra vectorului *ket* $|0\rangle$ cu operatorii de anihilare $\varphi_{(+)}(\vec{p})$ şi $\varphi^{\dagger}_{(+)}(\vec{p})$, întâlniţi în paragraful anterior, avem relaţiile

$$\begin{aligned} \varphi_{(+)}(\vec{p})|0\rangle &= 0 \\ \varphi^{\dagger}_{(+)}(\vec{p})|0\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

a căror conjugată hermitică

$$\begin{aligned} \langle 0|\varphi^{\dagger}_{(-)}(\vec{p}) &= 0 \\ \langle 0|\varphi_{(-)}(\vec{p}) &= 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

ne arată că, prin acţiunea operatorilor de creare $\varphi^{\dagger}_{(-)}(\vec{p})$ şi $\varphi_{(-)}(\vec{p})$ asupra vectorului *bra* $\langle 0|$, obţinem, de asemenea, zero. În acelaşi context, menţionăm că rezultatul obţinut în urma acţiunii unui operator de creare asupra vectorului $|0\rangle$, sau a unui operator de anihilare asupra vectorului $\langle 0|$, este diferit de zero, adică, de exemplu,

$$\varphi_{(-)}(\vec{p})|0\rangle \neq 0 \ , \tag{3.16}$$

deoarece, în caz contrar, nu s-ar putea realiza regulile de comutare pentru operatorii de creare şi anihilare.

În relaţia operatorială

$$\varphi_{(-)}(\vec{p}\,'')\varphi_{(-)}(\vec{p}\,')|0\rangle \neq 0 \ , \tag{3.17}$$

prin aplicarea operatorului $\varphi_{(-)}(\vec{p}\,')$ asupra vectorului $|0\rangle$, obţinem o particulă de impuls $\vec{p}\,'$, iar prin aplicarea, în continuare, a operatorului

BCU CLUJ-NAPOCA BABEŞ-BOLYAI UNIVERSITY LIBRARY

$\varphi_{(-)}(\vec{p}'')$, vom avea încă o particulă, cu impulsul $\vec{p}''$. Procedeul se poate repeta, conducând la un set de funcţii pentru toate stările posibile ale unui număr arbitrar de particule. Vectorii proprii astfel obţinuţi pot fi ortonormaţi, orice stare exprimându-se printr-o dezvoltare în serie după aceştia. O asemenea reprezentare a funcţiilor de stare poartă numele de reprezentare Fock.

În cele ce urmează, vom conveni ca valoarea medie a observabilelor (sarcină, energie, impuls etc.) să fie zero pentru starea de vid, adică, dacă notăm cu $\hat{F}$ operatorul corespunzător observabilei F, valoarea medie de vid a acestuia este

$$\langle 0|\hat{F}|0\rangle = 0\,,$$

care se mai notează cu

$$\langle \hat{F}\rangle_0 = 0\,. \tag{3.18}$$

Pentru a exemplifica utilitatea acestei convenţii, să considerăm, de pildă, hamiltonianul câmpului scalar complex

$$H = \int E_p \left[\varphi^{\dagger}_{(-)}(\vec{p})\varphi_{(+)}(\vec{p}) + \varphi^{\dagger}_{(+)}(\vec{p})\varphi_{(-)}(\vec{p})\right] d\vec{p}\,, \tag{3.19}$$

în care ultimul termen de sub integrală, nefiind scris sub semnul produsului normal, va fi înlocuit cu relaţia

$$\varphi^{\dagger}_{(+)}(\vec{p}')\varphi_{(-)}(\vec{p}) = \delta(\vec{p}' - \vec{p}) + \varphi_{(-)}(\vec{p})\varphi^{\dagger}_{(+)}(\vec{p}')\,, \tag{3.20}$$

care, introdusă în (3.19), conduce la o divergenţă. În acelaşi timp, din (3.19), am avea $\langle 0|H|0\rangle \neq 0$, chiar infinit, contrar convenţiei (3.18). În schimb, dacă luăm hamiltonianul sub semnul produsului normal, obţinem

$$\langle 0| : H : |0\rangle = \langle H\rangle_0 = 0\,, \tag{3.21}$$

deci toate convenţiile stabilite sunt compatibile.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

După cum am convenit, mărimile de câmp necuantificate fiind preluate în Teoria Cuantică a Câmpului sub semnul produsului normal, adică operatorii de anihilare sunt dispuşi la dreapta operatorilor de creare, valoarea medie a unui produs normal este întotdeauna zero. Reluând exemplul oferit de produsul operatorilor $\psi^\dagger(x)$ şi $\psi(y)$, avem deci

$$\langle \mathrm{N}\left[\psi^\dagger(x)\psi(y)\right]\rangle_0 = 0\,, \tag{3.22}$$

care, ţinând cont de (3.3), ne conduce la

$$\langle \psi^\dagger(x)\psi(y)\rangle_0 = i\,\Delta^{(+)}(x-y)\,, \tag{3.23}$$

deoarece

$$\langle 0|\Delta^{(+)}(x-y)|0\rangle = \Delta^{(+)}(x-y)\langle 0|0\rangle\,, \tag{3.24}$$

iar, în conformitate cu relaţia (3.10), valoarea medie a produsului cronologic va fi

$$\langle \mathrm{T}\left[\psi^\dagger(x)\psi(y)\right]\rangle_0 = i\,\Delta_F(x-y)\,. \tag{3.25}$$

Pentru valoarea medie de vid a produsului $\psi^\dagger(x)\psi(y)$, se mai foloseşte notaţia

$$\langle \psi^\dagger(x)\psi(y)\rangle_0 = \underbrace{\psi^\dagger(x)\psi}(y)\,, \tag{3.26}$$

numită contracţie de vid (sau, simplu, contracţie) a operatorilor $\psi^\dagger(x)$ şi $\psi(y)$, iar pentru valoarea medie a vid a produsului cronologic al acestor operatori se mai utilizează notaţia

$$\langle \mathrm{T}\left[\psi^\dagger(x)\psi(y)\right]\rangle_0 = \overbrace{\psi^\dagger(x)\psi}(y)\,, \tag{3.27}$$

numită contracţie cronologică (sau contracţie T) a operatorilor $\psi^\dagger(x)$ şi $\psi(y)$. Ţinând seama de ultimele două relaţii, mai avem atunci din

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(3.3) şi (3.10),

$$\psi^\dagger(x)\psi(y) = \mathrm{N}\left[\psi^\dagger(x)\psi(y)\right] + \overbrace{\psi^\dagger(x)\psi(y)} \tag{3.28}$$

$$\mathrm{T}\left[\psi^\dagger(x)\psi(y)\right] = \mathrm{N}\left[\psi^\dagger(x)\psi(y)\right] + \overbrace{\psi^\dagger(x)\psi(y)}\,. \tag{3.29}$$

În sfârşit, să reamintim că orice contracţie, fiind o funcţie, poate fi scoasă de sub semnul produsului normal, adică

$$\begin{aligned}&\mathrm{N}\left[\psi_1(x_1)\ldots\overbrace{\psi_j(x_j)\ldots\psi_k}(x_k)\ldots\psi_n(x_n)\right] = \\ &= \overbrace{\psi_j(x_j)\psi_k}(x_k)\,\mathrm{N}\left[\psi_1(x_1)\ldots\psi_{j-1}(x_{j-1})\psi_{j+1}(x_{j+1})\ldots\right. \\ &\left.\ldots\psi_{k-1}(x_{k-1})\psi_{k+1}(x_{k+1})\ldots\psi_n(x_n)\right]\,.\end{aligned} \tag{3.30}$$

D. Teoremele lui Wick

În secţiunile A şi B ne-am referit la un produs de doi operatori, definind pentru acesta noţiunile de produs normal şi produs cronologic, urmând ca, în cele ce urmează, să considerăm un produs de n operatori şi să demonstrăm trei teoreme importante care poartă numele de *teoremele Wick*. Precizăm, de la început, că vom abandona notaţiile cu litere greceşti pentru operatori, utilizând litere mari din alfabetul latin şi că ne vom referi la operatori care satisfac reguli de comutare, adică la operatori bozonici, teoremele lui Wick rămânând valabile (cu unele schimbări de semn) şi în cazul operatorilor fermionici, iar demonstrarea lor decurgând în mod cu totul similar.

Teorema 1 *Un produs de n operatori este egal cu suma produselor normale ale acestor operatori, cu toate contracţiile posibile, inclusiv produsul normal obişnuit (care nu conţine contracţii), adică*

$$A_1A_2A_3\ldots A_n = \mathrm{N}[A_1A_2A_3\ldots A_n] + \mathrm{N}\left[\underbrace{A_1A_2}A_3\ldots A_n\right] +$$
$$+\mathrm{N}\left[\underbrace{A_1A_2A_3}\ldots A_n\right] + \ldots + \mathrm{N}\left[\underbrace{A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n}\right] + \ldots$$
$$+\mathrm{N}\left[\underbrace{A_1A_2}\,\underbrace{A_3A_4}\ldots A_n\right] + \ldots + \mathrm{N}\left[\underbrace{A_1A_2}\,\underbrace{A_3\ldots A_{n-1}A_n}\right] +$$
$$+ \ldots + \mathrm{N}\left[\underbrace{A_1A_2}\,\underbrace{A_3A_4}\,\underbrace{A_5\ldots A_n}\right] + \ldots \qquad (3.31)$$

Aici contracţia se referă numai la primul şi ultimul operator de deasupra acoladei.

Pentru demonstraţia acestei teoreme, care se bazează pe metoda inducţiei complete, vom demonstra în prealabil lema

$$\mathrm{N}[A_1A_2A_3\ldots A_n]\,B = \mathrm{N}[A_1\ldots A_nB] + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{N}\left[A_1\ldots\underbrace{A_i}\ldots A_nB\right], \qquad (3.32)$$

prin considerarea a următoarelor două cazuri:

1. Dacă B este un operator de anihilare atunci, indiferent de natura operatorilor $A_1\ldots A_n$, operatorul B poate fi introdus sub semnul produsului normal în (3.32) şi, cum

$$\underbrace{A_iB} = \langle A_iB\rangle_0 = 0\,,$$

deoarece

$$B|0\rangle = 0\,,$$

lema (3.32) este satisfăcută.

2. Dacă B este un operator de creare, atunci avem, de asemenea, două posibilităţi, după cum operatorii $A_1\ldots A_n$ sunt operatori de creare sau de anihilare. Astfel,

   - dacă $A_1\ldots A_n$ sunt operatori de creare, atunci locul operatorului B este arbitrar, deci poate fi introdus sub semnul

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

produsului normal. Mai avem $\underbrace{A_i B} = \langle A_i B \rangle_0 = 0$, căci $\langle 0 | A_i = 0$ şi lema (3.32) este satisfăcută.

- dacă $A_1 \dots A_n$ sunt operatori de anihilare, avem

$$\begin{aligned} N[A_1 \dots A_n B] &= B A_1 \dots A_n , \\ N[A_1 \dots A_n] B &= A_1 \dots A_n B , \end{aligned}$$

de unde, prin scădere membru cu membru, obţinem

$$N[A_1 \dots A_n] B - N[A_1 \dots A_n B] = A_1 \dots A_n B - B A_1 \dots A_n$$

care, după aplicarea relaţiei (3.28), adică

$$A_n B = N[A_n B] + \underbrace{A_n B} = B A_n + \underbrace{A_n B} ,$$

devine

$$\begin{aligned} &N[A_1 \dots A_n] B - N[A_1 \dots A_n B] = \\ &= A_1 \dots A_{n-1} B A_n + A_1 \dots \underbrace{A_n B} - B A_1 \dots A_n . \end{aligned}$$

Repetând acest raţionament, obţinem în continuare

$$\begin{aligned} &N[A_1 \dots A_n] B - N[A_1 \dots A_n B] = \\ &= A_1 \dots A_{n-2} B A_{n-1} A_n + \\ &+ A_1 \dots \underbrace{A_{n-1} B} A_n + A_1 \dots \underbrace{A_n B} - B A_1 \dots A_n = \\ &= \dots = B A_1 \dots A_n + \underbrace{A_1 B} A_2 \dots A_n + \dots + \\ &+ A_1 \dots \underbrace{A_{n-1} B} A_n + A_1 \dots \underbrace{A_n B} - B A_1 \dots A_n = \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_1 \dots \underbrace{A_i B} A_{i+1} \dots A_n \end{aligned}$$

şi cum

$$A_1 \dots \underbrace{A_i B} A_{i+1} \dots A_n = N\left[A_1 \dots \underbrace{A_i \dots A_n B}\right] ,$$

lema (3.32) este demonstrată.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să aplicăm acum procedeul inducţiei complete. Relaţia (3.31) este evident valabilă pentru $n = 2$, deoarece, în conformitate cu (3.28),

$$A_1A_2 = \mathrm{N}[A_1A_2] + \underbrace{A_1A_2} = \mathrm{N}[A_1A_2] + \mathrm{N}\left[\underbrace{A_1A_2}\right].$$

Presupunând, atunci, că (3.31) este adevărată pentru n operatori, să arătăm că ea este valabilă şi pentru $n+1$ operatori. În acest scop, vom înmulţi (3.31) la dreapta cu operatorul A_{n+1} şi avem

$$A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1} = \mathrm{N}[A_1 \ldots A_n]\, A_{n+1} + \mathrm{N}\left[\underbrace{A_1A_2} \ldots A_n\right] A_{n+1} +$$
$$+ \mathrm{N}\left[\underbrace{A_1A_2A_3} \ldots A_n\right] A_{n+1} + \ldots + \mathrm{N}\left[\underbrace{A_1 \ldots A_n}\right] A_{n+1} + \ldots$$

Pe de altă parte, dacă în (3.32) facem $B = A_{n+1}$, obţinem

$$\mathrm{N}[A_1 \ldots A_n]\, A_{n+1} = \mathrm{N}[A_1 \ldots A_nA_{n+1}] + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N}\left[A_1 \ldots \underbrace{A_i \ldots A_nA_{n+1}}\right]$$

şi atunci rezultă relaţia

$$\begin{aligned} A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1} &= \mathrm{N}[A_1 \ldots A_nA_{n+1}] + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N}\left[A_1 \ldots \underbrace{A_i \ldots A_{n+1}}\right] + \\ &+ \mathrm{N}\left[\underbrace{A_1A_2} A_3 \ldots A_n\right] A_{n+1} + \ldots + \\ &+ \mathrm{N}\left[\underbrace{A_1 \ldots A_n}\right] A_{n+1} + \ldots , \end{aligned} \tag{3.33}$$

care, prin aplicarea lemei (3.32) în cel de al treilea termen din membrul

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

drept, devine

$$\begin{aligned} A_1A_2\dots A_nA_{n+1} &= \mathrm{N}[A_1\dots A_nA_{n+1}] + \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\mathrm{N}\left[A_1\dots \underbrace{A_i}\dots A_{n+1}\right] + \\ &+ \mathrm{N}\left[\underbrace{A_1A_2}\dots A_nA_{n+1}\right] + \\ &+ \sum_{i=3}^{n}\mathrm{N}\left[\underbrace{A_1A_2}A_3\dots \underbrace{A_i}\dots A_nA_{n+1}\right] + \\ &+ \mathrm{N}\left[\underbrace{A_1A_2A_3}\dots A_n\right]A_{n+1} + \dots \end{aligned}$$

Repetând procedeul, obţinem tocmai relaţia (3.31), scrisă de data aceasta pentru $n+1$ operatori şi, astfel, teorema este demonstrată.

Teorema 2 *Produsul cronologic a n operatori este egal cu suma tuturor produselor normale ale acestor operatori, cu toate contracţiile* T *posibile, inclusiv produsul normal uzual (care nu conţine contracţii), adică*

$$\begin{aligned} \mathrm{T}[A_1\dots A_n] &= \mathrm{N}[A_1\dots A_n] + \mathrm{N}\left[\overbrace{A_1A_2}\dots A_n\right] + \\ &+ \mathrm{N}\left[\overbrace{A_1A_2A_3}\dots A_n\right] + \dots + \mathrm{N}\left[\overbrace{A_1\dots A_n}\right] + \\ &+ \mathrm{N}\left[\overbrace{A_1A_2}\,\overbrace{A_3A_4}\dots A_n\right] + \dots + \left[\overbrace{A_1A_2}\,\overbrace{A_3\dots A_n}\right] + \dots \end{aligned} \tag{3.34}$$

Demonstraţia acestei teoreme se bazează pe teorema anterioară. În prealabil, observăm că pentru doi operatori, A_1 şi A_2, în conformitate cu relaţiile (3.28) şi (3.29), putem scrie

$$A_1A_2 = \mathrm{N}[A_1A_2] + \underbrace{A_1A_2}\,, \tag{3.35}$$

$$\mathrm{T}[A_1A_2] = \mathrm{N}[A_1A_2] + \overbrace{A_1A_2}\,. \tag{3.36}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În continuare, definim acţiunea operatorului T asupra unei sume de produse de operatori, ca fiind

$$T[B_1 + B_2] = T[B_1] + T[B_2] , \tag{3.37}$$

unde B_1 şi B_2 sunt produsele de operatori, şi avem, din (3.35),

$$T[A_1A_2] = T[N[A_1A_2]] + T\left[\underbrace{A_1A_2}\right],$$

care, identificat cu (3.36), ne dă

$$\begin{cases} T[N[A_1A_2]] = N[A_1A_2] , \\ T\left[\underbrace{A_1A_2}\right] = \overbrace{A_1A_2} . \end{cases} \tag{3.38}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aplicând acum operatorul T relaţiei (3.31), obţinem pe rând

$$
\begin{aligned}
&T[A_1 \dots A_n] = T[N[A_1 \dots A_n]] + T\left[N\left[\underbrace{A_1 A_2} \dots A_n\right]\right] + \\
&+ T\left[N\left[\underbrace{A_1 A_2 A_3} \dots A_n\right]\right] + \dots + T\left[N\left[\underbrace{A_1 \dots A_n}\right]\right] + \\
&+ \dots + T\left[N\left[\underbrace{A_1 A_2}\ \underbrace{A_3 A_4} \dots A_n\right]\right] + \dots + \\
&T\left[N\left[\underbrace{A_1 A_2} \dots \underbrace{A_{n-1} A_n}\right]\right] + \dots + T\left[N\left[\underbrace{A_1 A_2}\ \underbrace{A_3 A_4}\ \underbrace{A_5 \dots A_n}\right]\right] + \\
&+ \dots = N[A_1 \dots A_n] + T\left[\underbrace{A_1 A_2}\, N[A_3 \dots A_n]\right] + \\
&+ T\left[\underbrace{A_1 A_3}\, N[A_2 A_4 \dots A_n]\right] + \dots + T\left[\underbrace{A_1 A_n}\, N[A_2 \dots A_{n-1}]\right] + \\
&+ \dots + T\left[\underbrace{A_1 A_2}\ \underbrace{A_3 A_4}\, N[A_5 \dots A_n]\right] + \dots + \\
&+ T\left[\underbrace{A_1 A_2}\ \underbrace{A_{n-1} A_n}\, N[A_3 \dots A_{n-2}]\right] + \dots + \\
&+ T\left[\underbrace{A_1 A_2}\ \underbrace{A_3 A_4}\ \underbrace{A_5 A_n}\, N[A_6 \dots A_{n-1}]\right] + \dots = \\
&= N[A_1 \dots A_n] + \overbrace{A_1 A_2}\, N[A_3 \dots A_n] + \\
&+ \overbrace{A_1 A_3}\, N[A_2 A_4 \dots A_n] + \dots + \overbrace{A_1 A_n}\, N[A_2 \dots A_{n-1}] + \\
&+ \dots + \overbrace{A_1 A_2}\ \overbrace{A_3 A_4}\, N[A_5 \dots A_n] + \dots + \\
&+ \overbrace{A_1 A_2}\ \overbrace{A_{n-1} A_n}\, N[A_3 \dots A_{n-2}] + \dots + \\
&+ \overbrace{A_1 A_2}\ \overbrace{A_3 A_4}\ \overbrace{A_5 A_n}\, N[A_6 \dots A_{n-1}] + \dots ,
\end{aligned}
$$

de unde, reintroducând contracţiile T sub semnul produsului cronologic, rezultă (3.34).

q.e.d.

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Teorema 3 *Produsul cronologic al unui produs de produse normale de operatori este egal cu suma tuturor produselor normale, cu toate contracţiile* T *posibile, inclusiv produsul normal obişnuit (care nu conţine contracţii), în afară de termenii care conţin contracţii sub semnul aceluiaşi produs normal iniţial, adică*

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{T}\left[\mathrm{N}\left[A_1 \ldots A_{n_1}\right] \mathrm{N}\left[B_1 \ldots B_{n_2}\right] \ldots \mathrm{N}\left[X_1 \ldots X_{n_k}\right]\right] = \\
&= \mathrm{N}\left[A_1 \ldots A_{n_1} B_1 \ldots B_{n_2} \ldots X_{n_k}\right] + \\
&+ \mathrm{N}\left[\overbrace{A_1 \ldots A_{n_1} B_1} \ldots B_{n_2} \ldots X_{n_k}\right] + \\
&+ \mathrm{N}\left[\overbrace{A_1 \ldots A_{n_1} B_1 B_2} \ldots B_{n_2} \ldots X_{n_k}\right] + \ldots + \\
&+ \mathrm{N}\left[\overbrace{A_1 \ldots A_{n_1} B_{n_1} \ldots B_{n_2} \ldots X_{n_k}}\right] + \ldots + \\
&+ \mathrm{N}\left[\overbrace{A_1 \ldots A_{n_1} B_1} \ldots \overbrace{B_{n_2} \ldots X_{n_k}}\right] + \ldots \quad . \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

Demonstraţia acestei teoreme fiind anevoioasă, ne vom limita la justificarea valabilităţii ei în două dintre cele mai simple cazuri şi anume:

- Dacă sub semnul produsului cronologic avem un singur produs normal a doi operatori, atunci, utilizând (3.35 – 38), obţinem

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}\left[\mathrm{N}\left[A_1 A_2\right]\right] &= \mathrm{T}\left[A_1 A_2 - \underbrace{A_1 A_2}\right] = \mathrm{T}\left[A_1 A_2\right] - \overbrace{A_1 A_2} = \\
&= \mathrm{N}\left[A_1 A_2\right] + \overbrace{A_1 A_2} - \overbrace{A_1 A_2} = \mathrm{N}\left[A_1 A_2\right] . \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

- Dacă sub semnul produsului cronologic avem două produse normale, fiecare cu câte doi operatori, atunci, având din nou în vedere relaţiile (3.35 – 38) şi teorema a II-a a lui Wick (3.34), putem

scrie

$$
\begin{aligned}
&T[N[A_1A_2]N[B_1B_2]] = \\
&= T\left[\left(A_1A_2 - \underbrace{A_1A_2}\right)\left(B_1B_2 - \underbrace{B_1B_2}\right)\right] = \\
&= T[A_1A_2B_1B_2] - T[A_1A_2]\overbrace{B_1B_2} - \\
&- \overbrace{A_1A_2}T[B_1B_2] + \overbrace{A_1A_2}\,\overbrace{B_1B_2} = \\
&= N[A_1A_2B_1B_2] + N\left[\overbrace{A_1A_2}B_1B_2\right] + \\
&+ N\left[\overbrace{A_1A_2B_1}B_2\right] + N\left[\overbrace{A_1A_2B_1B_2}\right] + \\
&+ N\left[A_1\overbrace{A_2B_1}B_2\right] + N\left[A_1\overbrace{A_2B_1B_2}\right] + \\
&+ N\left[A_1A_2\overbrace{B_1B_2}\right] + N\left[\overbrace{A_1A_2}\,\overbrace{B_1B_2}\right] + \\
&+ N\left[\overbrace{A_1A_2B_1}B_2\right] + N\left[\overbrace{A_1\overbrace{A_2B_1}B_2}\right] - \\
&- N[A_1A_2]\overbrace{B_1B_2} - \overbrace{A_1A_2}\,\overbrace{B_1B_2} - \\
&- \overbrace{A_1A_2}N[B_1B_2] - \overbrace{A_1A_2}\,\overbrace{B_1B_2} + \overbrace{A_1A_2}\,\overbrace{B_1B_2}\ . \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

Întrucât contracţiile T pot fi introduse sau scoase de sub semnul produsului normal, unii termeni din (3.41) se reduc şi avem

$$
\begin{aligned}
&T[N[A_1A_2]N[B_1B_2]] = N[A_1A_2B_1B_2] + N\left[\overbrace{A_1A_2B_1}B_2\right] + \\
&+ N\left[\overbrace{A_1A_2B_1B_2}\right] + N\left[A_1\overbrace{A_2B_1}B_2\right] + N\left[A_1\overbrace{A_2B_1B_2}\right] + \\
&+ N\left[\overbrace{A_1A_2B_1}B_2\right] + N\left[\overbrace{A_1\overbrace{A_2B_1}B_2}\right]\ , \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

ceea ce justifică, de asemenea, relaţia (3.41).

BCU ALEXANDRU IOAN CUZA UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul 4

CUANTIFICAREA CÂMPULUI SPINORIAL

4.1 Ecuaţia Dirac şi algebra matricelor γ

După cum se ştie, ecuaţia lui Dirac se obţine prin liniarizarea relaţiei lui Einstein

$$p^2 + m^2 = 0\,, \tag{1.1}$$

în care p este 4-vectorul impuls $(p^i)_{i=\overline{1,4}} = \left((p^\mu)_{\mu=\overline{1,3}}, p^4 = E\right)$, iar m este masa de repaus a electronului. În cazul electronului liber, ecuaţia lui Dirac este

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m - E)|\psi\rangle = 0\,, \tag{1.2}$$

unde $(\alpha^\mu) = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ şi β sunt matricele lui Dirac:

$$\alpha^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}\ ;\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$(\sigma^\mu)_{\mu=\overline{1,3}}$ fiind matricele Pauli, iar 1 (în expresia lui β) – matricea unitate 2×2. Evident, $\vec{p}$ şi E sunt, respectiv, operatorii impuls şi energie ai Mecanicii Cuantice,

$$p^\mu = p_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x^\mu} = -i\partial_\mu$$
$$p^4 = -p_4 = i\frac{\partial}{\partial t} = i\partial_4 \tag{1.4}$$

deci

$$p_i = -i\partial_i\,,\ i = \overline{1,4}$$

Inspectând (1.2), observăm că aceasta se mai poate scrie şi sub forma

$$(\alpha^\mu p_\mu + 1\cdot(-E) + \beta m)\,|\psi\rangle = 0\,, \tag{1.5}$$

din care, dacă notăm $\alpha^4 = 1$ (matricea unitate 4×4) şi avem în vedere că $p_4 = -E$, rezultă

$$\left(\alpha^\mu p_\mu + \alpha^4 p_4 + \beta m\right)|\psi\rangle = 0\,. \tag{1.6}$$

Analizând această ecuaţie, se vede că, aşa cum $(\vec{p}, E)$ sunt componentele cuadrivectorului impuls $(p^i)_{i=\overline{1,4}}$, tot aşa $(\vec{\alpha}, 1)$ pot fi considerate drept componente ale cuadrivectorului matriceal $(\alpha^i)_{i=\overline{1,4}} = \left((\alpha^\mu)_{\mu=\overline{1,3}}, 1\right)$. Atunci, (1.6) devine

$$\left(\alpha^i p_i + \beta m\right)|\psi\rangle = 0 \tag{1.7}$$

şi, înmulţind la stânga cu $-i\beta$, rezultă ecuaţia

$$\left(\gamma^i p_i - im\right)|\psi\rangle = 0\,, \tag{1.8}$$

unde am introdus matricele von Neumann

$$\gamma^\mu = \gamma_\mu = -i\beta\alpha^\mu\,;\ \gamma^4 = -\gamma_4 = -i\beta \tag{1.9}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

fiindcă $\alpha^4 = 1$ şi $\eta_{44} = -1$.

Convenim ca, ori de câte ori avem un cuadrivector contractat cu matricele von Neumann $(\gamma^i)_{\overline{1,4}}$, să utilizăm simbolul "circumflex" deasupra 4-vectorului respectiv, adică, de exemplu,

$$\hat{p} = \gamma^i p_i \tag{1.10}$$

evident, cu sumare după i de la 1 la 4.

Aşadar, ecuaţia lui Dirac (1.8) se poate scrie condensat

$$(\hat{p} - im)|\psi\rangle = 0. \tag{1.11}$$

Cum, însă, $p_i = -i\partial_i$, rezultă $\hat{p} = -i\gamma^i\partial_i = -i\hat{\partial}$, astfel încât ecuaţia (1.11) ia forma concret utilizată în practica de calcul

$$(\hat{\partial} + m)|\psi\rangle = 0\,, \quad \text{cu } \hat{\partial} = \gamma^i\partial_i = \gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i}\,. \tag{1.12}$$

Să stabilim două proprietăţi esenţiale de care se bucură matricele γ.

1. Satisfac relaţiile de anticomutare

$$\gamma_i\gamma_k + \gamma_k\gamma_i = 2\eta_{ik}\,, \text{ cu } (\eta) = \text{diag}\,[1, 1, 1, -1]\,. \tag{1.13}$$

Demonstraţie

Pe partea spaţială $i = \mu$, $k = \nu$, avem

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = (-i\beta\alpha_\mu)(-i\beta\alpha_\nu) + (-i\beta\alpha_\nu)(-i\beta\alpha_\mu) =$$
$$= -[\beta(\alpha_\mu\beta\alpha_\nu + \alpha_\nu\beta\alpha_\mu)] = +\beta^2\alpha_{(\mu}\alpha_{\nu)} = \alpha_{(\mu}\alpha_{\nu)}$$

adică

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = \alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 2\delta_{\mu\nu}\,. \tag{1.14}$$

Pe partea spaţio-temporală $i = \mu$, $k = 4$, avem

$$\gamma_\mu\gamma_4 + \gamma_4\gamma_\mu = -i\beta\alpha_\mu(i\beta) + (i\beta)(-i\beta\alpha_\mu) =$$
$$= \beta\alpha_\mu\beta + \alpha_\mu = -\alpha_\mu + \alpha_\mu \equiv 0\,, \tag{1.15}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar pe partea temporală, $i = k = 4$, rezultă imediat

$$\gamma_4\gamma_4 + \gamma_4\gamma_4 = 2\gamma_4\gamma_4 = -2\beta^2 = -2,$$

adică

$$\gamma_4\gamma_4 + \gamma_4\gamma_4 = 2\eta_{44}. \tag{1.16}$$

Evident, relaţiile (1.14), (1.15) şi (1.16) nu reprezintă altceva decât rezultatele stabilite, pe componente, de către relaţia covariant 4-dimensională, în sens Lorentz, (1.13).

2. În această reprezentare de signatură +2 a tensorului fundamental η, matricele von Neumann $\gamma^\mu = \gamma_\mu$ sunt hermitice, iar $\gamma^4 = -\gamma_4$ este antihermitică.
Demonstraţie
Pentru $\mu = \overline{1,3}$ avem

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu)^\dagger &= (-i\beta\alpha^\mu)^\dagger = i(\alpha^\mu)^\dagger\beta^\dagger = \\ &= i\alpha^\mu\beta = -i\beta\alpha^\mu \Leftrightarrow (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^\mu,\end{aligned} \tag{1.17}$$

iar pentru $i = 4$, rezultă imediat

$$\left(\gamma^4\right)^\dagger = (-i\beta)^\dagger = i\beta^\dagger = i\beta = -(-i\beta) = -\gamma^4 \Leftrightarrow \left(\gamma^4\right)^\dagger = -\gamma^4. \tag{1.18}$$

Bazându-ne pe ecuaţia Dirac (1.12), să trecem acum la obţinerea aşanumitei ecuaţii adjuncte a lui Dirac (sau, pe scurt, a conjugatei Dirac a ecuaţiei (1.12)). Fie, deci,

$$(\hat{\partial} + m)|\psi\rangle = 0,$$

adică,

$$\left(\gamma^\mu\partial_\mu + \gamma^4\partial_4 + m\right)\psi = 0. \tag{1.19}$$

Conjugata hermitică se scrie

$$\psi^\dagger\left(\partial_\mu\gamma^\mu - \partial_4\gamma^4 + m\right) = 0 \tag{1.20}$$

BCU IAŞI / CENTRUL UNIVERSITAR / LIBRARY

şi, înmulţind la dreapta cu β, avem

$$\left(\partial_\mu \psi^\dagger\right)\gamma^\mu\beta - \left(\partial_4\psi^\dagger\right)\gamma^4\beta + \psi^\dagger\beta m = 0,$$

adică, dat fiind că $\gamma^\mu\beta = -\beta\gamma^\mu$ şi $\gamma^4\beta = \beta\gamma^4$,

$$\partial_\mu\left(\psi^\dagger\beta\right)\gamma^\mu + \partial_4\left(\psi^\dagger\beta\right)\gamma^4 - \left(\psi^\dagger\beta\right)m = 0. \tag{1.21}$$

Definind prin

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\beta \tag{1.22}$$

conjugata Dirac a stării (bispinoriale) ψ, ecuaţia (1.21) se scrie

$$\bar{\psi}(\gamma^i\partial_i - m) = 0, \tag{1.23}$$

unde operatorul din dreapta acţionează la stânga, rezultând astfel, în scriere condensată, ecuaţia Dirac adjunctă

$$\bar{\psi}(\hat{\partial} - m) = 0. \tag{1.24}$$

În cele ce urmează, vom stabili o serie de proprietăţi algebrice ale matricelor γ. În primul rând, prin definiţie, se introduce matricea hermitică

$$\gamma_5 = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{ijkl}\gamma^i\gamma^j\gamma^k\gamma^l, \tag{1.25}$$

unde ε_{ijkl} este tensorul complet antisimetric, cu $\varepsilon_{1234} = -1$, care anticomută cu oricare dintre matricele γ^i. Într-adevăr, avem, de exemplu,

$$\gamma_5\gamma^1 = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4\gamma^1 = \gamma^1 i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = -\gamma^1\gamma^5 \text{ etc.}$$

Observăm, de asemenea, că

$$\begin{aligned}\gamma_5^2 &= -\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3\eta^{44} = \\ &= -\gamma^1\gamma^2\gamma^1\gamma^2 = 1.\end{aligned} \tag{1.26}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În al doilea rând, folosind regula fundamentală (1.13) de anticomutare a matricelor von Neumann, se pot demonstra următoarele rezultate importante:

a) $\gamma^i\gamma_i = 4$

b) $\gamma^i\hat{a}\gamma_i = -2\hat{a}$

c) $\gamma^i\hat{a}\hat{b}\gamma_i = 4a\cdot b$

d) $\gamma^i\hat{a}\hat{b}\hat{c}\gamma_i = -2\hat{c}\hat{b}\hat{a}$

e) $\hat{a}\hat{b} = -\hat{b}\hat{a} + 2a\cdot b$

f) $\gamma_i\gamma_5 = \frac{i}{3!}\varepsilon_{ijkl}\gamma^j\gamma^k\gamma^l$

g) $\gamma^i\gamma^j\gamma^k = \eta^{ij}\gamma^k - \eta^{ik}\gamma^j + \eta^{jk}\gamma^i + i\gamma_5\varepsilon^{ijkl}\gamma_l\,,$ (1.27)

din care vom exemplifica doar c). Într-adevăr,

$$\gamma^i\hat{a}\hat{b}\gamma_i = \gamma^i\gamma^k\gamma^l\gamma_i a_k b_l = \left(2\eta^{ik} - \gamma^k\gamma^i\right)\left(2\delta^l_i - \gamma_i\gamma^l\right)a_k b_l =$$
$$= 4\eta^{lk}a_k b_l - 2\eta^{ik}\gamma_i\gamma^l a_k b_l - 2\gamma^k\gamma^l a_k b_l + \gamma^k 4\gamma^l a_k b_l =$$
$$= 4a^k b_k - 2\hat{a}\hat{b} - 2\hat{a}\hat{b} + 4\hat{a}\hat{b} = 4a\cdot b\,.$$

(*q.e.d.*)

În continuare, este necesar să introducem noţiunea de trasă (urmă) a unei matrice, definită ca

$$\mathrm{Tr}A = \sum_i A_{ii} = A^i{}_i\,. \tag{1.28}$$

Cum trasa unui produs de matrice nu se modifică dacă are loc o permutare circulară a acestora, deoarece

$$\mathrm{Tr}AB\ldots XZ = A_{ij}B_{jk}\ldots X_{ls}Z_{si} = Z_{si}A_{ij}B_{jk}\ldots X_{ls} = \mathrm{Tr}ZAB\ldots X\,, \tag{1.29}$$

unde am subînţeles sumare după toţi indicii, rezultă imediat că trasa unei matrice este invariantă faţă de o transformare matriceală de tipul

$$A' = SAS^{-1} \tag{1.30}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

deoarece

$$\mathrm{Tr}A' = \mathrm{Tr}SAS^{-1} = \mathrm{Tr}S^{-1}SA = \mathrm{Tr}A\,. \tag{1.31}$$

Dacă S este o matrice unitară, adică $S^{\dagger} = S^{-1}$, atunci transformarea (1.30) poartă numele de transformare unitară.

Trasa unui produs format dintr-un număr impar de matrice γ este întotdeauna zero. Aceasta rezultă folosind un artificiu şi bazându-ne pe proprietatea (1.29) şi pe relaţia de anticomutare a matricei γ_5 cu γ^i

$$\{\gamma_5, \gamma^i\} = 0\,. \tag{1.32}$$

Astfel, putem scrie

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,\gamma_{k_1}\gamma_{k_2}\ldots\gamma_{k_n} &= \mathrm{Tr}\,\gamma_5\gamma_5\gamma_{k_1}\gamma_{k_2}\ldots\gamma_{k_n} = \\ &= (-1)^n\,\mathrm{Tr}\,\gamma_5\gamma_{k_1}\gamma_{k_2}\ldots\gamma_{k_n}\gamma_5 = (-1)^n\,\mathrm{Tr}\,\gamma_{k_1}\gamma_{k_2}\ldots\gamma_{k_n}\end{aligned}$$

de unde, pentru n impar, rezultă că

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_{k_1}\gamma_{k_2}\ldots\gamma_{k_n} = 0\,. \tag{1.33}$$

În consecinţă, vom avea

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_k = 0\,,\ \mathrm{Tr}\,[\gamma_k\gamma_l\gamma_n] = 0\,. \tag{1.34}$$

Să adăugăm acum o regulă generală pentru calcularea trasei unui produs format dintr-un număr par de matrice γ. Folosind regula (1.13), avem succesiv:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\,\gamma^{k_1}\gamma^{k_2}\ldots\gamma^{k_{2n}} = \mathrm{Tr}\left(2\eta^{k_1k_2} - \gamma^{k_2}\gamma^{k_1}\right)\gamma^{k_3}\ldots\gamma^{k_{2n}} = \\ &= 2\eta^{k_1k_2}\,\mathrm{Tr}\,\gamma^{k_3}\ldots\gamma^{k_{2n}} - \mathrm{Tr}\,\gamma^{k_2}\gamma^{k_1}\gamma^{k_3}\ldots\gamma^{k_{2n}} = \\ &= 2\eta^{k_1k_2}\,\mathrm{Tr}\,\gamma^{k_3}\ldots\gamma^{k_{2n}} - \mathrm{Tr}\,\gamma^{k_2}\left(2\eta^{k_1k_3} - \gamma^{k_3}\gamma^{k_1}\right)\gamma^{k_4}\ldots\gamma^{k_{2n}} = \\ &= \ldots = 2\eta^{k_1k_2}\,\mathrm{Tr}\,\gamma^{k_3}\ldots\gamma^{k_{2n}} - 2\eta^{k_1k_3}\,\mathrm{Tr}\,\gamma^{k_2}\gamma^{k_4}\ldots\gamma^{k_{2n}} + \\ &+ 2\eta^{k_1k_4}\,\mathrm{Tr}\,\gamma^{k_2}\gamma^{k_3}\gamma^{k_5}\ldots\gamma^{k_{2n}} - \ldots + \mathrm{Tr}\,\gamma^{k_2}\ldots\gamma^{k_{2n-1}}\gamma^{k_1}\gamma^{k_{2n}}\,.\end{aligned}$$

BCU - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă, în ultimul termen, înlocuim

$$\gamma^{k_1}\gamma^{k_{2n}} = 2\eta^{k_1k_{2n}} - \gamma^{k_{2n}}\gamma^{k_1},$$

mai putem scrie

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\gamma^{k_1}\ldots\gamma^{k_{2n}} &= 2\sum_r(-1)^r\eta^{k_1k_r}\operatorname{Tr}\gamma^{k_2}\ldots\gamma^{k_{r-1}}\gamma^{k_{r+1}}\ldots\gamma^{k_{2n}} - \\ &- \operatorname{Tr}\gamma^{k_1}\gamma^{k_2}\ldots\gamma^{k_{2n}},\end{aligned}$$

de unde obţinem, în sfârşit,

$$\operatorname{Tr}\gamma^{k_1}\ldots\gamma^{k_{2n}} = \sum_r(-1)^r\eta^{k_1k_r}\operatorname{Tr}\gamma^{k_2}\gamma^{k_3}\ldots\gamma^{k_{r-1}}\gamma^{k_{r+1}}\ldots\gamma^{k_{2n}}. \quad (1.35)$$

Avantajul acestei reguli constă în faptul că reduce numărul matricelor γ de sub semnul trasei cu două unităţi. De exemplu, trasa a două matrice γ este

$$\operatorname{Tr}\left[\gamma^k\gamma^j\right] = \eta^{kj}\operatorname{Tr}1 = 4\eta^{kj}, \quad (1.36)$$

iar în cazul a patru matrice γ rezultă imediat că

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\left[\gamma^k\gamma^j\gamma^m\gamma^p\right] &= \eta^{kj}\operatorname{Tr}\gamma^m\gamma^p - \eta^{km}\operatorname{Tr}\gamma^j\gamma^p + \eta^{kp}\operatorname{Tr}\gamma^j\gamma^m = \\ &= 4\left(\eta^{kj}\eta^{mp} - \eta^{km}\eta^{jp} + \eta^{kp}\eta^{jm}\right). \quad (1.37)\end{aligned}$$

Ultimele două relaţii conduc la următoarele teoreme de trase

$$\operatorname{Tr}\left[\hat{a}\,\hat{b}\right] = 4\,a\cdot b \quad (1.38)$$

$$\operatorname{Tr}\left[\hat{a}\,\hat{b}\,\hat{c}\,\hat{d}\right] = 4\left[(a\cdot b)(c\cdot d) - (a\cdot c)(b\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c)\right] \quad (1.39)$$

a căror demonstraţie este imediată.

În acelaşi timp, deosebit de utilizate în studiul cuantic al interacţiunii câmpurilor fermionice sunt şi următoarele teoreme de trasă, implicând

BCU "Lucian Blaga" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

matricea γ_5

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \mathrm{Tr}\left[\gamma_5 \hat{a}\right] = 0 \\
&\text{b)}\quad \mathrm{Tr}\left[\gamma_5 \hat{a}\,\hat{b}\right] = 0 \\
&\text{c)}\quad \mathrm{Tr}\left[\gamma_5 \hat{a}\,\hat{b}\,\hat{c}\right] = 0 \\
&\text{d)}\quad \mathrm{Tr}\left[\gamma_5 \hat{a}\,\hat{b}\,\hat{c}\,\hat{d}\right] = 4i\,\varepsilon_{ijkl}\,a^i b^j c^k d^l \,. \qquad (1.40)
\end{aligned}$$

Primele trei relaţii fiind evidente (deşi (1.40.b) reclamă puţin mai multă atenţie), vom demonstra identitatea (1.40.d). Din (1.27.g), prin înmulţire la dreapta cu γ^m şi apoi la stânga cu γ_5, avem

$$\gamma_5\gamma^i\gamma^j\gamma^k\gamma^m = \eta^{ij}\,\gamma_5\gamma^k\gamma^m - \eta^{ik}\,\gamma_5\gamma^j\gamma^m + \eta^{jk}\gamma_5\gamma^i\gamma^m + i\,\varepsilon^{ijkl}\gamma_l\gamma^m \,,$$

expresie a cărei trasă devine

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_5\gamma^i\gamma^j\gamma^k\gamma^m\right] = i\,\varepsilon^{ijkl}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma_l\gamma^m\right] = 4i\,\varepsilon^{ijkm} \,,$$

rezultând imediat (1.40.d), prin "contracţie" cu $a_i b_j c_k d_m$.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

4.2 Formalismul lagrangeian

Pentru a construi densitatea de lagrangeian a câmpului spinorial liber, se pleacă de la observaţia că, prin multiplicarea cu $\bar{\psi}$ la stânga ecuaţiei Dirac (1.12), rezultă funcţia

$$\mathcal{L}_{(1)}\left[\bar{\psi}, \psi\right] = \bar{\psi}\left[\left(\hat{\partial} + m\right)\psi\right] \tag{2.1}$$

cu $\mathcal{L}_{(1)}\left[\bar{\psi}, \psi\right] = 0$, atunci când ψ este *on-shell*.

După cum se poate constata uşor, interpretând $\mathcal{L}_{(1)}\left[\bar{\psi}, \psi\right]$ ca o densitate de lagrangeian, ecuaţiile Euler-Lagrange conduc atât la ecuaţia Dirac, cât şi la adjuncta acesteia. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{(1)}}{\partial \psi_{,i}} = \bar{\psi}\gamma^i \; ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{(1)}}{\partial \psi} = m\bar{\psi} \\ &\text{b)} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{(1)}}{\partial \bar{\psi}_{,i}} = 0 \; ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{(1)}}{\partial \bar{\psi}} = \gamma^i \psi_{,i} + m\psi \, , \end{aligned} \tag{2.2}$$

deci ecuaţiile Euler-Lagrange se scriu

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial \mathcal{L}_{(1)}}{\partial \psi_{,i}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}_{(1)}}{\partial \psi} = 0 \;\Leftrightarrow\; \bar{\psi}_{,i}\gamma^i - m\bar{\psi} = 0 \, , \\ &\text{b)} \quad \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial \mathcal{L}_{(1)}}{\partial \bar{\psi}_{,i}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}_{(1)}}{\partial \bar{\psi}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \gamma^i \psi_{,i} + m\psi = 0 \, , \end{aligned} \tag{2.3}$$

oferindu-ne "adjuncta" şi, respectiv, ecuaţia lui Dirac. Din punct de vedere tehnic, problema cu densitatea de lagrangeian $\mathcal{L}_{(1)}$ este aceea că aceasta este asimetrică în raport cu derivatele funcţiilor de câmp ψ, $\bar{\psi}$. Astfel, dacă s-ar încerca o cuantificare canonică atât în raport cu ψ, cât şi cu $\bar{\psi}$, privite ca variabile independente, atunci impulsul canonic asociat lui $\bar{\psi}$, adică $\pi^4 = \frac{\partial \mathcal{L}_{(1)}}{\partial \psi_{,4}}$ este zero deci este imposibilă scrierea unei relaţii de anticomutare (de tip Bohr-Heisenberg, pentru fermioni) în aceste variabile canonic conjugate. Pentru a depăşi această dificultate, se observă mai întâi că, sub aspect formal cel puţin, densitatea

de lagrangeian $\mathcal{L}_{(1)}\left[\bar{\psi},\psi\right]$ nu este invariantă la acţiunea operaţiei de conjugare hermitică, dat fiind că

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\dagger}_{(1)}\left[\bar{\psi},\psi\right] &= \left(\gamma^{\mu}\psi_{,\mu}+\gamma^{4}\psi_{,4}+m\psi\right)^{\dagger}\left(\psi^{\dagger}\beta\right)^{\dagger} = \\ &= \left(\psi^{\dagger}{}_{,\mu}\gamma^{\mu}-\psi^{\dagger}{}_{,4}\gamma^{4}+m\psi^{\dagger}\right)\beta\psi = \\ &= \left[-\left(\psi^{\dagger}\beta\right)_{,\mu}\gamma^{\mu}-\left(\psi^{\dagger}\beta\right)_{,4}\gamma^{4}+m\left(\psi^{\dagger}\beta\right)\right]\psi\end{aligned}$$

adică obţinem în loc de $\mathcal{L}_1$, densitatea de lagrangeian

$$\mathcal{L}_{(2)}\left[\bar{\psi},\psi\right] = \mathcal{L}^{\dagger}_{(1)}\left[\bar{\psi},\psi\right] = -\left[\bar{\psi}\left(\hat{\partial}-m\right)\right]\psi, \qquad (2.4)$$

cu operatorul $\left(\hat{\partial}-m\right)$, acţionând la stânga.

Din punct de vedere dinamic, la nivel semiclasic (deci fără a angaja "a doua cuantificare"), densitatea de lagrangeian $\mathcal{L}_{(2)}\left[\bar{\psi},\psi\right]$ este echivalentă cu $\mathcal{L}_{(1)}\left[\bar{\psi},\psi\right]$, dat fiind că diferă de aceasta numai printr-o cuadridivergenţă care, mai mult, dacă cele două câmpuri sunt *on-shell*, se anulează, exprimând legea de conservare a cuadricurentului (deci manifest şi a sarcinii) câmpului Dirac. Într-adevăr, avem

$$\mathcal{L}_{(1)}\left[\bar{\psi},\psi\right]-\mathcal{L}_{(2)}\left[\bar{\psi},\psi\right] = \bar{\psi}\left(\gamma^{i}\psi_{,i}+m\psi\right)+\left(\bar{\psi}_{,i}\gamma^{i}-m\bar{\psi}\right)\psi = \left(\bar{\psi}\gamma^{i}\psi\right)_{,i}, \qquad (2.5)$$

iar în cazul când $\bar{\psi}$, ψ satisfac respectiv ecuaţiile (2.3.a, b), rezultă, fără dificultăţi, că

$$\begin{aligned}&\text{a)}\quad \bar{\psi}_{,i}\gamma^{i}\psi = m\bar{\psi}\psi \\ &\text{b)}\quad \bar{\psi}\gamma^{i}\psi_{,i} = -m\bar{\psi}\psi,\end{aligned} \qquad (2.6)$$

adică, prin sumare membru cu membru, $\left(\bar{\psi}\gamma^{i}\psi\right)_{,i} = 0$ *on-shell*. Având $\mathcal{L}_{(1)}$ şi $\mathcal{L}_{(2)}$, precum şi echivalenţa dinamică a acestora, în baza căreia orice combinaţie liniară cu coeficienţi constanţi a celor doi lagrangeieni

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

conduce tot la o funcţie Lagrange, "simetria" în raport cu prezenţa derivatelor câmpurilor $\bar{\psi}$, ψ, în densitatea de lagrangeian a câmpului spinorial, se instaurează imediat, dacă impunem simplu condiţia de invarianţă a *lagrangeianului complet* la acţiunea conjugării hermitice adică, dacă lucrăm cu lagrangeianul

$$\mathcal{L}\left[\bar{\psi}, \psi\right] = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}_{(1)} + \mathcal{L}_{(1)}^{\dagger}\right] = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}_{(1)} + \mathcal{L}_{(2)}\right] \tag{2.7}$$

deci

$$\mathcal{L}\left[\bar{\psi}, \psi\right] = \frac{1}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^{i}\psi_{,i} - \bar{\psi}_{,i}\gamma^{i}\psi\right] + m\bar{\psi}\psi\,. \tag{2.8}$$

Evident, dat fiind că, *on-shell*, $\mathcal{L}_{(1)} = \mathcal{L}_{(2)} = 0$, funcţia Lagrange $\mathcal{L}$ se va anula, de asemenea.

Să trecem acum la determinarea observabilelor asociate câmpului Dirac, acestea fiind: impulsul total (al câmpului), energia totală, spinul şi sarcina electrică. Primele trei se mai numesc în literatura de specialitate (contemporană) şi *sarcini simplectice*, având la bază invarianţa densităţii de lagrangeian (2.8) sub acţiunea locală a grupului Lorentz $SO(3,1)$, care conduce la apariţia unei densităţi de curent simplectic, concret reprezentată de tensorul conservativ impuls-energie T_{ik}, prin care câmpul se cuplează univoc, geometro-dinamic, la structura spaţiu-timpului şi la gravitaţie, în general. Analiza riguroasă a naturii şi a consecinţelor acestui cuplaj depăşeşte cu mult cadrul, în special formativ, al prezentei lucrări, ea făcând obiectul aşa-numitelor teorii *gauge* ale gravitaţiei şi surselor sale materiale. Ceea ce trebuie să reţinem, însă, chiar şi la nivelul unei discuţii de principiu, este faptul că prezenţa densităţii de spin a unui câmp material joacă un rol esenţial, împreună cu tensorul canonic impuls-energie, în definirea concretă a curentului simplectic T^{ik} al câmpului. Acesta trebuie să fie simetric şi conservativ, adică

$$T^{[ik]} = 0 \;;\; T^{ik}{}_{,k} = 0\,, \tag{2.9}$$

pentru a asigura conservarea observabilelor fundamentale (de natură dinamică) impuls, energie şi moment cinetic total. După cum se poate

demonstra, chiar şi în cazul unui spaţiu-timp plat, relaţia de definiţie a tensorului conservativ impuls-energie, T^{ik}, are expresia

$$T^{ik} = \frac{1}{2}\overset{(c)}{T}{}^{(ik)} - \frac{1}{2}\sigma^{l(ik)}{}_{,l} \tag{2.10}$$

unde tensorul canonic impuls-energie este dat de relaţia generală

$$\overset{(c)}{T}{}^{ik} = \bar{\pi}^i\psi^{,k} + \bar{\psi}^{,k}\pi^i - \eta^{ik}\mathcal{L}\left[\bar{\psi},\psi\right], \tag{2.11}$$

cu

$$\bar{\pi}^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,i}} \quad ; \quad \pi^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,i}}, \tag{2.12}$$

iar tensorul densităţii de spin, σ^{lik}, este definit geometro-dinamic drept partea antisimetrică în primii doi indici ai derivatei funcţionale a lagrangeianului, în raport cu conexiunea spaţiu-timpului, adică

$$\sigma^{lik} = \left[\frac{\delta\mathcal{L}\left[\bar{\psi},\psi\right]}{\delta\Gamma}\right]^{[li]k}, \tag{2.13}$$

unde, în cazul spaţiu-timpului plat, toţi coeficienţii Γ ai conexiunii se iau egali cu zero, după efectuarea derivatei funcţionale. Evident, odată determinaţi $\overset{(c)}{T}$ şi σ din densitatea de lagrangeian a câmpului, se calculează tensorul conservativ impuls-energie şi observabilele simplectice $(P^i)_{i=\overline{1,4}} = \left(\vec{P}, H\right)$, adică 4-vectorul impuls-energie, şi tensorul (antisimetric, de ordinul 2) moment cinetic total, J^{ik}.

Pe orice suprafaţă de $t = const.$, pentru care, deci, $dS_4 = d^3x$ (în spaţiu-timp plat, Minkowski), acestea sunt definite după cum urmează

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a) $P^\mu = P_\mu = \int T^{\mu 4}\, d^3x$, $\mu = \overline{1,3}$: componentele impulsului total;

b) $P^4 = H = \int T^{44}\, d^3x$: energia totală sau hamiltonianul câmpului;

c) $J^{ik} = \int \left[x^i T^{k4} - x^k T^{i4}\right] d^3x$, $i,k = \overline{1,4}$: tensorul momentului cinetic total al câmpului

(2.14)

unde notaţia " : " semnifică "prin definiţie". Dat fiind că, în capitolul anterior, ne-am ocupat de cuantificarea câmpului scalar, care este, prin definiţie, invariant la rotaţii, fiind deci lipsit de moment cinetic propriu, adică de spin, considerăm ca bine venită o analiză mai atentă a formulei (2.14.c), pe baza relaţiei de definiţie (2.10) şi a identităţii Belinfante-Rosenfeld [4]

$$\overset{(c)}{T}{}^{[ik]} = \sigma^{kil}{}_{,l} \quad . \tag{2.15}$$

(pentru spaţiu-timp plat). Aceasta ne va permite să explicităm nu numai relaţia de definiţie a tensorului moment cinetic orbital, L^{ik}, cât şi, mai ales, relaţia de definiţie a tensorului de spin, S^{ik}, adică a momentului cinetic propriu al unui câmp general, precum şi legea de conservare locală a tensorului densităţii de moment cinetic total, J^{ikl}. Pentru aceasta, să înlocuim expresia (2.10) a tensorului conservativ în expresia (2.14.c) şi avem

$$\begin{aligned} J^{ik} &= \frac{1}{2}\int \left\{ x^i \left[\overset{(c)}{T}{}^{k4} + \overset{(c)}{T}{}^{4k} - \left(\sigma^{lk4}{}_{,l} + \sigma^{l4k}{}_{,l}\right)\right] - \right. \\ &\left. - x^k \left[\overset{(c)}{T}{}^{i4} + \overset{(c)}{T}{}^{4i} - \left(\sigma^{li4}{}_{,l} + \sigma^{l4i}{}_{,l}\right)\right]\right\} d^3x = \\ &\overset{(2.15)}{=} \frac{1}{2}\int \left\{ x^i \left[2\,\overset{(c)}{T}{}^{4k} + \sigma^{4kl}{}_{,l} - \sigma^{lk4}{}_{,l} + \sigma^{4lk}{}_{,l}\right] - \right. \\ &\left. - x^k \left[2\,\overset{(c)}{T}{}^{4i} + \sigma^{4il}{}_{,l} - \sigma^{li4}{}_{,l} + \sigma^{4li}{}_{,l}\right]\right\} d^3x \,, \end{aligned} \tag{2.16}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde rezultă

$$J^{ik} = \int \left[x^i \overset{(c)}{T}{}^{4k} - x^k \overset{(c)}{T}{}^{4i} \right] d^3x + \frac{1}{2} \int \Big[\left(x^i \sigma^{4kl} \right)_{,l} - \overbrace{\sigma^{4ki}}^{1} - \\ - \left(x^i \sigma^{lk4} \right)_{,l} + \sigma^{ik4} + \left(x^i \sigma^{4lk} \right)_{,l} - \overbrace{\sigma^{4ik}}^{2} - \left(x^k \sigma^{4il} \right)_{,l} + \\ + \overbrace{\sigma^{4ik}}^{2} + \left(x^k \sigma^{li4} \right)_{,l} - \sigma^{ki4} - \left(x^k \sigma^{4li} \right)_{,l} + \overbrace{\sigma^{4ki}}^{1} \Big] d^3x \,. \quad (2.17)$$

Cum toate divergenţele din a doua integrală trec, prin teorema Green-Gauss-Ostrogradski, în integrale pe 2-suprafeţe închise, extinse la infinitul spaţial, unde câmpurile fizice regulate se anulează, rezultă că acestea sunt zero, neaducând nici o contribuţie fizică (cel puţin în cazul spaţiu-timpului plat), deci expresia (2.17) ia forma concretă

$$J^{ik} = L^{ik} + S^{ik} \quad (2.18)$$

în care,

$$L^{ik} = \int \left[x^i \overset{(c)}{T}{}^{4k} - x^k \overset{(c)}{T}{}^{4i} \right] dS_4 \quad (2.19)$$

este tensorul momentului cinetic orbital, având drept densitate tensorul

$$L^{ikl} = x^i \overset{(c)}{T}{}^{lk} - x^k \overset{(c)}{T}{}^{li} \quad (2.20)$$

iar

$$S^{ik} = \int \sigma^{ik4} \, dS_4 \quad (2.21)$$

este tensorul momentului cinetic propriu, de spin, având drept densitate, după cum şi trebuia, de altfel, tensorul σ^{ikl} (definit prin relaţia (2.13)) adică

$$S^{ikl} = \sigma^{ikl} \,. \quad (2.22)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Evident, tensorul densitate a momentului cinetic total va fi dat de relaţia

$$J^{ikl} = L^{ikl} + S^{ikl} = x^i \overset{(c)}{T}{}^{lk} - x^k \overset{(c)}{T}{}^{li} + \sigma^{ikl} \tag{2.23}$$

iar caracterul său local conservativ provine din faptul că

$$J^{ikl}{}_{,l} = x^i \overset{(c)}{T}{}^{lk}{}_{,l} - x^k \overset{(c)}{T}{}^{li}{}_{,l} + \left[\overset{(c)}{T}{}^{[ik]} - \sigma^{kil}{}_{,l}\right] \equiv 0 \tag{2.24}$$

în lumina identităţii Belinfante-Rosenfeld (2.15) şi a legii de cuadridivergenţă nulă,

$$\overset{(c)}{T}{}^{lm}{}_{,l} = 0\,, \quad m = \overline{1,4} \tag{2.25}$$

a tensorului canonic impuls-energie. Bineînţeles, pentru cuadriimpulsul total al câmpului, legea de conservare a acestuia este exprimată local de a doua relaţie (2.9) care se demonstrează astfel

$$\begin{aligned} T^{ik}{}_{,k} &= \frac{1}{2}\overset{(c)}{T}{}^{ik}{}_{,k} + \frac{1}{2}\overset{(c)}{T}{}^{ki}{}_{,k} - \frac{1}{2}\sigma^{lik}{}_{,lk} - \frac{1}{2}\sigma^{lki}{}_{,lk} = \\ &= \frac{1}{2}\left[\overset{(c)}{T}{}^{ki} + \sigma^{kil}{}_{,l}\right]{}_{,k} + \frac{1}{2}\sigma^{ilk}{}_{,lk} = -\frac{1}{2}\left[\sigma^{ikl} - \sigma^{ilk}\right]{}_{,lk} \equiv 0\,. \end{aligned} \tag{2.26}$$

În cazul câmpului Dirac, descris de lagrangeianul (2.8), tensorul densităţii de spin are, precum vom demonstra puţin mai încolo, o proprietate algebrică specială, şi anume este complet antisimetric, ceea ce face ca tensorul conservativ să fie dat, simplu, de partea simetrică a tensorului canonic, adică

$$T_{ik} = \frac{1}{2}\overset{(c)}{T}{}_{(ik)}\,. \tag{2.27}$$

Utilizând relaţia de definiţie (2.11), cu

$$\bar{\pi}_i = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_i \quad ; \quad \pi_i = -\frac{1}{2}\gamma_i\psi \tag{2.28}$$

calculate din (2.8), precum şi faptul că, *on-shell*, $\mathcal{L}\left[\bar{\psi}, \psi\right] = 0$, rezultă imediat tensorul canonic impuls-energie

$$\overset{(c)}{T}_{ik} = \frac{1}{2}\left[\bar{\psi}\gamma_i\psi_{,k} - \bar{\psi}_{,k}\gamma_i\psi\right] \tag{2.29}$$

din care, prin (2.27), obţinem concret tensorul conservativ al câmpului spinorial,

$$T_{ik} = \frac{1}{4}\left[\bar{\psi}\gamma_i\psi_{,k} + \bar{\psi}\gamma_k\psi_{,i} - \bar{\psi}_{,i}\gamma_k\psi - \bar{\psi}_{,k}\gamma_i\psi\right]. \tag{2.30}$$

Putem trece acum la determinarea expresiei componentelor 4-vectorului impuls-energie, P^i. Astfel, pentru componentele (spaţiale) ale impulsului total al câmpului Dirac avem, utilizând relaţia de definiţie (2.14.a),

$$P_\mu = \int T_\mu^{\ 4}\, d^3x = -\int T_{\mu 4}\, d^3x \tag{2.31}$$

adică,

$$P_\mu = -\frac{1}{4}\int\left[\bar{\psi}\gamma_\mu\psi_{,4} - \bar{\psi}_{,\mu}\gamma_4\psi + \bar{\psi}\gamma_4\psi_\mu - \bar{\psi}_{,4}\gamma_\mu\psi\right] d^3x\,. \tag{2.32}$$

În termenul al doilea, formăm gradientul după μ,

$$\bar{\psi}_{,\mu}\gamma_4\psi = \left(\bar{\psi}\gamma_4\psi\right)_{,\mu} - \bar{\psi}\gamma_4\psi_{,\mu}$$

astfel încât, după aplicarea teoremei Green-Gauss-Ostrogradski, rămânem cu

$$P_\mu = \frac{1}{2}\int\bar{\psi}\gamma^4\psi_{,\mu}\, d^3x - \frac{1}{4}\int\left[\bar{\psi}\gamma_\mu\psi_{,4} - \bar{\psi}_{,4}\gamma_\mu\psi\right] d^3x\,. \tag{2.33}$$

În ultima integrală, exprimăm $\psi_{,4}$ şi $\bar{\psi}_{,4}$ în raport cu derivatele lor spaţiale, utilizând ecuaţiile de câmp (2.3), adică

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \psi_{,4} = \gamma^4\gamma^\nu\psi_{,\nu} + m\gamma^4\psi \\ &\text{b)}\quad \bar{\psi}_{,4} = \bar{\psi}_{,\nu}\gamma^\nu\gamma^4 - m\bar{\psi}\gamma^4 \end{aligned} \tag{2.34}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

astfel încât obţinem

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi_{,4} - \bar{\psi}_{,4}\gamma_\mu\psi = -\bar{\psi}\gamma^4\gamma_\mu\gamma^\nu\psi_{,\nu} + \bar{\psi}_{,\nu}\gamma^4\gamma^\nu\gamma_\mu\psi\,, \tag{2.35}$$

deci, formând o 3-divergenţă în al doilea termen, rezultă pentru integrand expresia

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi_{,4} - \bar{\psi}_{,4}\gamma_\mu\psi = -\bar{\psi}\gamma^4(\gamma_\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma_\mu)\psi_{,\nu} + \left(\bar{\psi}\gamma^4\gamma^\nu\gamma_\mu\psi\right)_{,\nu}.$$

Utilizând algebra (1.13) a matricelor von Neumann, obţinem, în sfârşit

$$P_\mu = \frac{1}{2}\int \bar{\psi}\gamma^4\psi_{,\mu}\, d^3x + \frac{1}{2}\int \bar{\psi}\gamma^4\psi_{,\mu}\, d^3x\,,$$

adică

$$P_\mu = -i\int \psi^\dagger\psi_{,\mu}\, d^3x\,. \tag{2.36}$$

Pentru calculul hamiltonianului, situaţia este mai simplă, dat fiind că $i = k = 4$, deci .

$$H = \int T^{44}d^3x = \int T_{44}\, d^3x = \frac{1}{2}\int \left[\bar{\psi}\gamma_4\psi_{,4} - \bar{\psi}_{,4}\gamma_4\psi\,.\right] d^3x\,. \tag{2.37}$$

Cum $\bar{\psi} = \psi^\dagger\beta$ şi $\gamma_4 = i\beta$, rezultă imediat, din $\beta^2 = 1$, expresia de uz curent

$$H = \frac{i}{2}\int \left[\psi^\dagger\psi_{,4} - \psi^\dagger{}_{,4}\,\psi\right] d^3x\,. \tag{2.38}$$

În vederea obţinerii tensorului de spin, S^{ik}, avem de calculat mai întâi, utilizând relaţia de definiţie (2.13), expresia tensorului densităţii de spin, σ^{ikl}. Pentru aceasta, reamintim faptul că, într-o bază neolonomă, rigidă, $\{\vec{e}_a\}_{a=\overline{1,4}}$, pe spaţiul tangent $T_p(M_4)$ (în fiecare punct p al varietăţii de bază M_4), care se bucură de proprietăţile

$$[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = D^c_{ab}\vec{e}_c \text{ si } \eta_{ab} = g(\vec{e}_a, \vec{e}_b)\,, \text{ cu } (\eta_{ab}) = \operatorname{diag}[1, 1, 1, -1]\,, \tag{2.39}$$

BCU IAŞI - BIBLIOTECA UNIVERSITARĂ LIBRARY

derivatele covariante ale bispinorilor ψ, $\bar{\psi}$ sunt date de relaţiile

$$\begin{aligned}\psi_{;a} &= \psi_{|a} + \frac{1}{4}\Gamma_{bca}\gamma^b\gamma^c\psi \\ \bar{\psi}_{;a} &= \bar{\psi}_{|a} - \frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma^b\gamma^c\Gamma_{bca}\end{aligned} \tag{2.40}$$

unde $(\cdot)_{|a} = \vec{e}_a(\cdot)$, iar coeficienţii Γ_{bca} ai conexiunii liniare ∇_a sunt antisimetrici în primii doi indici, atunci când conexiunea este, în plus, şi conexiune metrică. Prin urmare, numai partea antisimetrică în (b, c) a termenilor $\gamma^b\gamma^c$ va da o contribuţie nenulă prin contracţie cu Γ_{bca}, adică

$$\begin{aligned}\psi_{;a} &= \psi_{|a} + \frac{1}{8}\Gamma_{bca}\gamma^{[b}\gamma^{c]}\psi \\ \bar{\psi}_{;a} &= \bar{\psi}_{|a} - \frac{1}{8}\bar{\psi}\gamma^{[b}\gamma^{c]}\Gamma_{bca}\,.\end{aligned} \tag{2.41}$$

De asemenea, este cunoscut faptul că matricele

$$S^{bc} = \frac{1}{4}\gamma^b\gamma^c\,. \tag{2.42}$$

valuate[1] în algebra $SO(3,1)$, formează o reprezentare a acţiunii infinitezimale a generatorilor grupului Lorentz, $SO(3,1)$, pe spaţiul liniar $\mathbb{C}^4$ al bispinorilor ψ, $\bar{\psi}$. În aceste condiţii, formulele (2.42) se scriu condensat

$$\begin{aligned}\psi_{;a} &= \psi_{|a} + \frac{1}{2}\Gamma_{bca}S^{[bc]}\psi \\ \bar{\psi}_{;a} &= \bar{\psi}_{|a} - \frac{1}{2}\bar{\psi}S^{[bc]}\Gamma_{bca}\,,\end{aligned} \tag{2.43}$$

de unde rezultă că

$$\begin{aligned}\delta_\Gamma\psi_{;a} &= \frac{1}{2}S^{[bc]}\psi\,\delta\Gamma_{bca} \\ \delta_\Gamma\bar{\psi}_{;a} &= -\frac{1}{2}\bar{\psi}S^{[bc]}\delta\Gamma_{bca}\,.\end{aligned} \tag{2.44}$$

[1] cu valori

BCU IASI / CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

Astfel, aplicând principiul cuplajului minimal, în sensul conexiunii metrice ∇, în densitatea de lagrangeian a câmpului Dirac, avem

$$\mathcal{L}\left[\bar{\psi}, \psi\right] = \frac{1}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^a\psi_{;a} - \bar{\psi}_{;a}\gamma^a\psi\right] + m\bar{\psi}\psi\,, \tag{2.45}$$

deci

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Gamma_{bcd}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{;a}}\frac{\delta\psi_{;a}}{\delta\Gamma_{bcd}} + \frac{\delta\bar{\psi}_{;a}}{\delta\Gamma_{bcd}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_{;a}} = \bar{\pi}^a\,\delta_{\Gamma_{bcd}}\psi_{;a} + \delta_{\Gamma_{bcd}}\bar{\psi}_{;a}\,\pi^a\,.$$

Având în vedere (2.44), rezultă pentru variaţia funcţională în raport cu conexiunea Γ

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Gamma_{bcd}} = \bar{\pi}^a\frac{1}{2}S^{[bc]}\psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}\,S^{[bc]}\pi^a\,, \quad \text{cu} \begin{cases} \bar{\pi}^a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{;a}} \\ \pi^a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_{;a}} \end{cases} \tag{2.46}$$

şi aplicând, în baza definiţiei (2.13), antisimetrizarea după indicii (bc), care dă evident

$$S^{[bc]} - S^{[cb]} = 2S^{[bc]}\,,$$

obţinem expresia generală a tensorului densităţii de spin a câmpurilor $\left(\psi, \bar{\psi}\right)$

$$\sigma^{bca} = \bar{\pi}^a\,S^{[bc]}\psi - \bar{\psi}\,S^{[bc]}\pi^a\,. \tag{2.47}$$

Cum, în această expresie, coeficienţii Γ nu mai intervin, rezultă că formula este valabilă şi în cazul spaţiu-timpului plat, Minkowski, deci obţinem, pentru cazul concret (2.8), utilizând (2.28) în (2.47), forma tensorului densităţii de spin a câmpului Dirac,

$$\sigma^{ikl} = \frac{1}{8}\bar{\psi}\left[\gamma^l\gamma^{[i}\gamma^{k]} + \gamma^{[i}\gamma^{k]}\gamma^l\right]\psi\,. \tag{2.48}$$

Definind tensor-matricea de spin

$$\sigma^{ik} = \frac{1}{2}\gamma^{[i}\gamma^{k]} \tag{2.49}$$

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

formula (2.48) ia forma "tradiţională"

$$\sigma^{ikl} = \frac{1}{4}\bar{\psi}\left[\gamma^l\sigma^{ik} + \sigma^{ik}\gamma^l\right]\psi \tag{2.50}$$

întâlnită în literatura de specialitate cu caracter convenţional, adică pe spaţiu-timp plat. Oricum, în cadrul teoriilor *gauge* ale gravitaţiei cu surse spinoriale, relaţia (2.50) este mai rar utilizată ca atare, dat fiind că necesită calculul produselor de trei matrice γ. În locul ei, se utilizează o formulă mult mai simplă, obţinută prin aplicarea proprietăţii (1.27.g), pentru explicitarea produselor $\gamma\gamma\gamma$. Avem

$$\begin{aligned}
\gamma^l\gamma^i\gamma^k - \gamma^l\gamma^k\gamma^i &= \eta^{li}\gamma^k - \eta^{lk}\gamma^i + \overset{1}{\overbrace{\eta^{ik}\gamma^l}} - i\varepsilon^{likm}\gamma_m\gamma_5 - \\
&- \eta^{lk}\gamma^i + \eta^{li}\gamma^k - \overset{1}{\overbrace{\eta^{ki}\gamma^l}} + i\varepsilon^{lkim}\gamma_m\gamma_5 \\
\gamma^i\gamma^k\gamma^l - \gamma^k\gamma^i\gamma^l &= \overset{1}{\overbrace{\eta^{ik}\gamma^l}} - \eta^{li}\gamma^k + \eta^{kl}\gamma^i - i\varepsilon^{iklm}\gamma_m\gamma_5 - \\
&- \overset{1}{\overbrace{\eta^{ki}\gamma^l}} + \eta^{lk}\gamma^i - \eta^{il}\gamma^k + i\varepsilon^{kilm}\gamma_m\gamma_5
\end{aligned} \tag{2.51}$$

adică

$$\begin{aligned}
\gamma^l\sigma^{ik} &= \eta^{li}\gamma^k - \eta^{lk}\gamma^i - i\varepsilon^{likm}\gamma_m\gamma_5 \\
\sigma^{ik}\gamma^l &= \eta^{lk}\gamma^i - \eta^{li}\gamma^k - i\varepsilon^{iklm}\gamma_m\gamma_5
\end{aligned} \tag{2.52}$$

de unde rezultă

$$\gamma^l\sigma^{ik} + \sigma^{ik}\gamma^l = -2i\varepsilon^{iklm}\gamma_m\gamma_5\,, \tag{2.53}$$

deci

$$\sigma^{ikl} = -\frac{i}{2}\varepsilon^{iklm}\bar{\psi}\gamma_m\gamma_5\psi\,. \tag{2.54}$$

Se poate observa imediat antisimetria totală (în raport cu indicii), a tensorului densităţii de spin, pe care o anunţasem ca o proprietate

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

algebrică specială în cazul câmpului Dirac, atunci când, în baza ei, am redus formula generală (2.10) a tensorului conservativ la forma particulară (2.27), din care am obţinut expresia (2.30). Tot în baza acestei proprietăţi, rezultă imediat că, în ceea ce priveşte tensorul de spin S^{ik}, evaluat prin (2.21) pe hipersuprafeţele spaţiale de $t = constant$, $dS_4 = d^3x$, acesta are numai componente spaţiale $S^{\mu\nu}$, legate de 3-vectorul de spin S_ρ al câmpului prin relaţia de dualitate

$$S_\rho = \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\mu\nu}S^{\mu\nu}\,. \tag{2.55}$$

Într-adevăr, utilizând relaţiile (2.54) şi (2.21), obţinem

$$S^{ik} = -\frac{i}{2}\varepsilon^{ik4m}\int\bar{\psi}\gamma_m\gamma_5\psi\,d^3x = \frac{i}{2}\varepsilon^{ikm4}\cdot\int\bar{\psi}\gamma_m\gamma_5\psi\,d^3x \tag{2.56}$$

şi cum tensorul Levi-Civita este complet antisimetric, rezultă că indicii (i,k,m) pot lua numai valorile "spaţiale" $(\mu,\nu,\sigma)\in\{1,2,3\}$, adică

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma}\int\bar{\psi}\gamma_\sigma\gamma_5\psi\,d^3x\,, \tag{2.57}$$

dat fiind că $\varepsilon^{\mu\nu\sigma4} = \varepsilon^{\mu\nu\sigma}$, cu $\varepsilon^{123} = 1$. Din (2.55), obţinem atunci

$$S_\rho = \frac{i}{4}\varepsilon_{\rho\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu\sigma}\int\bar{\psi}\gamma_\sigma\gamma_5\psi\,d^3x = \frac{i}{4}\left[\delta^\nu_\nu\delta^\sigma_\rho - \delta^\nu_\rho\delta^\sigma_\nu\right]\int\bar{\psi}\gamma_\sigma\gamma_5\psi\,d^3x\,,$$

adică

$$S_\rho = \frac{i}{2}\int\bar{\psi}\gamma_\rho\gamma_5\psi\,d^3x\,. \tag{2.58}$$

Sugestivitatea fizică a acestei formule a vectorului de spin al câmpului Dirac poate fi sporită considerabil dacă avem în vedere că

$$\bar{\psi}\gamma_\rho\gamma_5\psi = \psi^\dagger\beta(-i\beta\alpha_\rho)\gamma_5\psi = -i\psi^\dagger\alpha_\rho\gamma_5\psi \tag{2.59}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi înlocuim matricele α_ρ şi γ_5 cu forma lor de "blocuri matriceale 2×2", adică

$$\alpha_\rho = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\rho \\ \sigma_\rho & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.60}$$

obţinând astfel expresia

$$S_\rho = \frac{1}{2}\int \psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\rho \\ \sigma_\rho & 0 \end{pmatrix} \psi \, d^3x \,, \tag{2.61}$$

în care prezenţa operatorilor de spin

$$\hat{S}_\rho = \frac{1}{2}\sigma_\rho \,, \tag{2.62}$$

introduşi de Pauli, este mai mult decât evidentă.

În încheierea acestui paragraf, să obţinem şi formula celei de a patra observabile a câmpului, şi anume sarcina electrică. Pentru aceasta, ne aducem aminte din Capitolul 1 că, sub acţiunea unei transformări de fază $U(1)$, $T(\alpha) = \exp(ie\alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, iar e este sarcina electrică elementară, câmpurile se transformă după legea

$$\delta\psi = ie\alpha\psi \quad , \quad \delta\bar{\psi} = -ie\alpha\bar{\psi}, \tag{2.63}$$

α fiind un parametru infinitezimal, iar cerinţa de invarianţă a acţiunii $S\left[\bar{\psi}, \psi\right]$ a câmpului revine la

$$\begin{aligned} \delta S\left[\bar{\psi},\psi\right] &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,i}}(\delta\psi)_{,i} + \left(\delta\bar{\psi}\right)_{,i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_{,i}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\delta\psi + \delta\bar{\psi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}}\right] d^3x = \\ &= \int [\bar{\pi}^i \delta\psi + \delta\bar{\psi}\pi^i]_{,i}\, d^3x - \\ &\quad - \int \left\{ \left[\bar{\pi}^i{}_{,i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\right]\delta\psi + \delta\bar{\psi}\left[\pi^i{}_{,i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}}\right]\right\} d^3x = 0 \,. \end{aligned}$$

Dat fiind că ultima integrală se anulează în virtutea condiţiei *on-shell*, reprezentată de satisfacerea ecuaţiilor Euler-Lagrange, rezultă

$$\delta_\alpha S\left[\bar{\psi},\psi\right] = \alpha \int \{ie[\bar{\pi}^i\psi - \bar{\psi}\pi^i]\}_{,i}\, d^3x = 0 \,, \tag{2.64}$$

BCU ALEXANDRU IOAN CUZA UNIVERSITY LIBRARY

care exprimă legea (locală) de conservare a cuadricurentului

$$j^i = ie\left[\bar{\pi}^i\psi - \bar{\psi}\pi^i\right] \quad \Leftrightarrow \quad j^i = ie\bar{\psi}\gamma^i\psi\,, \tag{2.65}$$

deci, global, a sarcinii totale a câmpului,

$$Q = \int j^4\, dS_4 \;\Leftrightarrow\; Q = ie\int \bar{\psi}\gamma^4\psi\, d^3x = e\int \psi^\dagger\psi\, d^3x\,. \tag{2.66}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

4.3 Sistemul fundamental de soluţii şi forma generală a funcţiilor de stare

Pentru început, ca şi în cazul câmpului scalar, să determinăm forma (funcţională) a modurilor de frecvenţă $f_{\vec{p}}(x)$, $\bar{f}_{\vec{p}}(x)$. În vederea acestui lucru, luăm ecuaţia Dirac (1.12) şi îi aplicăm, la stânga, operatorul matriceal $\hat{\partial} = \gamma^k \partial_k$. Avem

$$\hat{\partial}\left(\hat{\partial}\psi\right) + m\hat{\partial}\psi = 0 \;\Rightarrow\; \gamma^k\gamma^i\psi_{,ik} - m^2\psi = 0 \qquad (3.1)$$

unde, în ultimul termen, am utilizat din nou $\hat{\partial}\psi = -m\psi$. Din algebra matricelor Dirac şi, de asemenea, din comutarea derivatelor parţiale $\psi_{,ik} = \psi_{,ki}$, rezultă că numai partea simetrică a produsului $\gamma^k\gamma^i$ contribuie la primul termen. Astfel, obţinem

$$\gamma^k\gamma^i\psi_{,ik} - m^2\psi = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\left(\gamma^k\gamma^i + \gamma^i\gamma^k\right)\psi_{,ik} - m^2\psi = 0$$
$$\Leftrightarrow\; \eta^{ik}\psi_{,ik} - m^2\psi = 0\,, \qquad (3.2)$$

adică ajungem la o ecuaţie de tip Gordon

$$\Box\psi - m^2\psi = 0\,, \qquad (3.3)$$

drept condiţie necesară, dar nu şi suficientă, pe care trebuie să o satisfacă funcţia bispinorială de stare $\psi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{C}^4$ pentru a fi o soluţie a ecuaţiei Dirac (1.12). Procedând analog în cazul ecuaţiei adjuncte a lui Dirac, "înmulţind" la dreapta cu $\hat{\partial}$ (care acţionează, în acest caz, numai la stânga), rezultă exact acelaşi tip de ecuaţie, aşa cum şi trebuie, de altfel, dacă avem în vedere direct conjugata Dirac a ecuaţiei (3.3) pentru conjugata Dirac a funcţiei de stare ψ, adică

$$\Box\bar{\psi} - m^2\bar{\psi} = 0\,. \qquad (3.4)$$

La ce folosesc cele două ecuaţii (3.3) şi (3.4)? Din punct de vedere matriceal, adică al valuării în $\mathbf{C}^4$, la aproape nimic. Dar, sub aspectul

dependenţei spaţio-temporale $\mathbf{R}^4$ a stărilor ψ, $\bar{\psi}$, ecuaţiile (3.3) şi (3.4) ne spun că soluţiile ecuaţiei Dirac (1.12) şi ale adjunctei acesteia (1.24) trebuie să fie de forma

$$\begin{aligned} \text{a)}\quad \psi(x) &= \int d^3p \left[C_+(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) + C_-(\vec{p}) \bar{f}_{\vec{p}}(x)\right] \\ \text{b)}\quad \bar{\psi}(x) &= \int d^3p \left[\bar{C}_-(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) + \bar{C}_+(\vec{p}) \bar{f}_{\vec{p}}(x)\right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

unde, sistemul de matrice (4×1) şi, respectiv, (1×4)

$$\left\{C_+(\vec{p}),\, C_-(\vec{p}),\, \bar{C}_-(\vec{p}),\, \bar{C}_+(\vec{p})\right\}$$

este, deocamdată, nedeterminat, funcţia $\bar{f}_{\vec{p}}(x)$ este conjugata complexă a funcţiei $f_{\vec{p}}(x)$, iar aceasta din urmă este soluţia fundamentală de frecvenţă pozitivă şi impuls $\vec{p}$ a ecuaţiei Gordon

$$\Box f_{\vec{p}}(x) - m^2 f_{\vec{p}}(x) = 0\,. \tag{3.6}$$

Este evident, prin comparare cu modurile de frecvenţă ale câmpului scalar, că avem de-a face, în cazul câmpului Dirac liber, cu aceleaşi moduri de frecvenţă,

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad f_{\vec{p}}(x) = \frac{(2\pi)^{-3/2}}{\sqrt{2E_p}}\, e^{ipx}\,, \text{ pentru frecvenţele pozitive,} \\ &\text{b)}\quad \bar{f}_{\vec{p}}(x) = \frac{(2\pi)^{-3/2}}{\sqrt{2E_p}}\, e^{-ipx}\,, \text{ pentru frecvenţele negative,} \end{aligned} \tag{3.7}$$

cu $E_p = +\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} = p^4$ (altfel spus, componenta a patra a cuadri-impulsului este întotdeauna pozitivă), care satisfac relaţia de ortonormalizare generalizată

$$i \int \left[\bar{f}_{\vec{p}'}(x) f_{\vec{p},4}(x) - \bar{f}_{\vec{p}',4}(x) f_{\vec{p}}(x)\right] d^3x = \delta(\vec{p}' - \vec{p})\,, \tag{3.8}$$

unde $(\cdot)_{,4} = (\cdot)_{,t} = \partial_t(\cdot)$. Bineînţeles, matricele $\bar{C}_\mp(\vec{p})$ sunt conjugatele Dirac ale matricelor $C_\mp(\vec{p})$, adică $\bar{C}_\mp(\vec{p}) = C_\mp^\dagger(\vec{p})\beta$.

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Odată clarificate aceste lucruri, să trecem la "problema suficienţei" expresiilor (3.5) adică, sub aspect concret, la determinarea matricelor $C_{\pm}(\vec{p})$ care fac din $\psi(x)$, în mod explicit, o soluţie a ecuaţiei Dirac (1.12). Desigur, dacă acest lucru se va întâmpla, atunci şi $\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\beta$ va fi (automat) o soluţie (exactă) a ecuaţiei adjuncte (1.24). Prin urmare, este suficient să ne concentrăm asupra ecuaţiei

$$\gamma^i \partial_i \left\{ \int d^3p \left[C_+(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) + C_-(\vec{p}) \bar{f}_{\vec{p}}(x) \right] \right\} + \\ + m \int d^3p \left[C_+(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) + C_-(\vec{p}) \bar{f}_{\vec{p}}(x) \right] = 0. \tag{3.9}$$

Cum, din (3.7), rezultă că

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \partial_i f_{\vec{p}}(x) = f_{\vec{p},i}(x) = i p_i f_{\vec{p}}(x) \\ &\text{b)} \quad \partial_i \bar{f}_{\vec{p}}(x) = \bar{f}_{\vec{p},i}(x) = -i p_i \bar{f}_{\vec{p}}(x), \end{aligned} \tag{3.10}$$

iar modurile $f_{\vec{p}}(x)$, $\bar{f}_{\vec{p}}(x)$ sunt liniar independente, ecuaţia (3.9) se separă după părţile ei de frecvenţă pozitivă, respectiv negativă, adică obţinem sistemul (decuplat)

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad +i \int d^3p \left[(\hat{p} - im) C_+(\vec{p}) \right] f_{\vec{p}}(x) = 0, \\ &\text{b)} \quad -i \int d^3p \left[(\hat{p} + im) C_-(\vec{p}) \right] \bar{f}_{\vec{p}}(x) = 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

din care rezultă ecuaţiile matriceale

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad (\hat{p} - im) C_+(\vec{p}) = 0, \\ &\text{b)} \quad (\hat{p} + im) C_-(\vec{p}) = 0, \end{aligned} \tag{3.12}$$

ce trebuie satisfăcute de vectorii $C_{\pm}(\vec{p})$ din $\mathbf{C}^4$, pentru orice cuadri-impuls $p = (\vec{p}, E_p)$. Deoarece forma concretă a fiecăreia din ecuaţiile (matriceale) (3.12) este destul de "stufoasă", o tentativă naivă de rezolvare directă a acestora, deşi posibilă matematic, este nu numai laborioasă, dar şi greoaie sub aspectul interpretării fizice. De aceea, vom

aplica o metodă mai elegantă, anume aceea a *descompunerii matriceale în blocuri* (2×2), care nu numai că oferă, aproape imediat, sistemul fundamental de soluţii ale ecuaţiei Dirac, dar este şi foarte clară intuitiv, cu privire la interpretarea şi semnificaţia rezultatelor.

Fie, pentru început, cazul referenţialului propriu, adică $\vec{p} = 0$, $E_p = m$. Cele două ecuaţii devin

$$\begin{aligned} &\left[\gamma^4(-m) - im\right] C_+(\vec{0}) = 0 \qquad (\beta - 1)\, C_+(\vec{0}) = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \\ &\left[\gamma^4(-m) + im\right] C_-(\vec{0}) = 0 \qquad (\beta + 1)\, C_-(\vec{0}) = 0\,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Descompunând în blocuri (2×2), cu

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,, \quad C_\pm(\vec{0}) = \begin{pmatrix} \varphi_\pm(\vec{0}) \\ \chi_\pm(\vec{0}) \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

unde $\varphi_\pm(\vec{0})$, $\chi_\pm(\vec{0})$ sunt spinori Pauli, obţinem respectiv

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_+(\vec{0}) \\ \chi_+(\vec{0}) \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_-(\vec{0}) \\ \chi_-(\vec{0}) \end{pmatrix} &= 0\,, \end{aligned} \tag{3.15}$$

de unde rezultă imediat $\chi_+(\vec{0}) = 0$ şi $\varphi_-(\vec{0}) = 0$, adică

$$C_+(\vec{0}) = \begin{pmatrix} \varphi_+(\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad C_-(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_-(\vec{0}) \end{pmatrix}\,. \tag{3.16}$$

Coroborând, intuitiv teoria Dirac a golurilor cu teoria Pauli a spinului şi considerând, în general, în spaţiul-spin $\mathcal{S}_2$,

$$\varphi_+(\vec{0}) = a_A\, \xi^A\,, \; \chi_-(\vec{0}) = b_A^*\, \xi^A\,, \; \sum_{A=1}^{2} |a_A|^2 = \sum_{A=1}^{2} |b_A|^2 = 1\,, \tag{3.17}$$

BCU IAŞI - CETATEA UNIVERSITARĂ LIBRARY

cu

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

drept bază canonică în $\mathcal{S}_2$, putem spune că $C_+(\vec{0})$ descrie particula, ce are spinul *up*, cu o probabilitate $|a_1|^2$, şi *down*, cu o probabilitate $|a_2|^2$, iar $C_-(\vec{0})$ descrie antiparticula de spin *up*, cu o probabilitate $|b_1|^2$, şi *down*, cu probabilitatea $|b_2|^2$. Prin urmare, ajungem, în mod natural, la setul de soluţii fundamentale ale versiunii simplificate (3.13) (în referenţialul propriu) a ecuaţiilor matriceale (3.12), anume

$$u^A(\vec{0}) = \begin{pmatrix} \xi^A \\ 0 \end{pmatrix}, \; v^A(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^A \end{pmatrix}, \; A = 1,2 \tag{3.19}$$

care, după cum se observă (având în vedere (3.18)), formează chiar o bază canonică, ortonormală

$$\begin{aligned} &\text{a)} \;\; u^{\dagger A}(\vec{0})\, u^B(\vec{0}) = \delta^{AB} \\ &\text{b)} \;\; u^{\dagger A}(\vec{0})\, v^B(\vec{0}) = v^{\dagger B}(\vec{0})\, u^A(\vec{0}) \equiv 0 \\ &\text{c)} \;\; v^{\dagger A}(\vec{0})\, v^B(\vec{0}) = \delta^{AB}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

a spaţiului liniar ce conţine vectorii "amplitudine"

$$\begin{aligned} &\text{a)} \;\; C_+(\vec{0}) = a_A\, u^A(\vec{0}) \\ &\text{b)} \;\; C_-(\vec{0}) = b_A^*\, v^A(\vec{0}). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Dat fiind că $\vec{p} = 0$ este singura valoare a impulsului în referenţialul propriu, soluţia generală a ecuaţiei Dirac corespunzătoare este de forma

$$\psi(\tau) = a_A\, u^A(\vec{0}) e^{-im\tau} + b_A^*\, v^A(\vec{0}) e^{im\tau}, \tag{3.22}$$

unde τ este timpul propriu, în care am omis factorii de normare $\left[(2\pi)^3\, 2m\right]^{-1/2}$, care ar rezulta din (3.21), (3.7) şi (3.5) pentru $\vec{p} = 0$,

BCU "ŞTIINŢĂ" UNIVERSITY LIBRARY

$p^4 = E_p = m$, ca neesenţiali la această etapă a discuţiilor. Evident, sistemul soluţiilor fundamentale, în raport cu care se exprimă (3.22), este reprezentat de bispinorii

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \psi_+^A(\tau) = u^A(\vec{0})\, e^{-im\tau} \\ &\text{b)} \quad \psi_-^A(\tau) = v^A(\vec{0})\, e^{im\tau} \end{aligned} \tag{3.23}$$

ce corespund particulei $\left(\psi_+^A(\tau)\right)$ şi, respectiv, antiparticulei $\left(\psi_-^A(\tau)\right)$ aflate în stări de spin *up* $(A = 1)$ şi, respectiv, *down* $(A = 2)$.

Avem acum suficiente elemente intuitiv interpretative pentru a ataca rezolvarea ecuaţiilor (3.12), în referenţialul laboratorului, când $p = (\vec{p},\, E_p)$, prin generalizarea metodei tocmai prezentate. Fie, deci,

$$C_\pm(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \varphi_\pm(\vec{p}) \\ \chi_\pm(\vec{p}) \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

şi matricele von Neumann reprezentate prin blocuri matriceale (2×2)

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^\mu \\ i\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Atunci, ecuaţiile (3.12.a), (3.12.b) devin, respectiv,

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -i\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ i\vec{p}\cdot\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iE_p & 0 \\ 0 & -iE_p \end{pmatrix} + \right. \\ &\qquad \left. + \begin{pmatrix} -im & 0 \\ 0 & -im \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \varphi_+(\vec{p}) \\ \chi_+(\vec{p}) \end{pmatrix} = 0 \\ &\text{b)} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -i\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ i\vec{p}\cdot\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iE_p & 0 \\ 0 & -iE_p \end{pmatrix} + \right. \\ &\qquad \left. + \begin{pmatrix} im & 0 \\ 0 & im \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \varphi_-(\vec{p}) \\ \chi_-(\vec{p}) \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{3.26}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi se pot reprezenta "unificat" sub forma

$$\begin{pmatrix} (E_p \mp m) & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -(E_p \pm m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_\pm(\vec{p}) \\ \chi_\pm(\vec{p}) \end{pmatrix} = 0, \tag{3.27}$$

în care pentru sistemul lui $C_+(\vec{p})$ se ia întotdeauna semnul de deasupra, iar pentru cel al lui $C_-(\vec{p})$, evident, semnul de dedesubt. Rezultă, astfel, sistemul

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad (E_p \mp m)\varphi_\pm(\vec{p}) - \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\chi_\pm(\vec{p}) = 0 \\ &\text{b)} \quad (E_p \pm m)\chi_\pm(\vec{p}) - \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\varphi_\pm(\vec{p}) = 0\,. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Cum întotdeauna $E_p + m > 0$, pentru a evita singularităţile induse de o eventuală împărţire prin zero, rezultă că $\chi_+(\vec{p})$ va fi exprimat din (3.28.b), iar $\varphi_-(\vec{p})$ din (3.28.a). Obţinem, deci, spinorii

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \chi_+(\vec{p}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E_p + m}\varphi_+(\vec{p}) \\ &\text{b)} \quad \varphi_-(\vec{p}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E_p + m}\chi_-(\vec{p}) \end{aligned} \tag{3.29}$$

pe care trebuie să-i probăm dacă verifică ecuaţiile complementare (3.28.a) pentru $\chi_+(\vec{p})$ şi (3.28.b) pentru $\varphi_-(\vec{p})$. Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} (E_p - m)\varphi_+(\vec{p}) - \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\chi_+(\vec{p}) &= \left\{E_p - m - \frac{(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2}{E_p + m}\right\}\varphi_+(\vec{p}) \\ (E_p - m)\chi_-(\vec{p}) - \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\varphi_-(\vec{p}) &= \left\{E_p - m - \frac{(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2}{E_p + m}\right\}\chi_-(\vec{p}) \end{aligned} \tag{3.30}$$

şi cum

$$(\vec{p}\cdot\sigma)^2 = p_\mu\sigma^\mu p_\nu\sigma^\nu = \frac{1}{2}\sigma^{(\mu}\sigma^{\nu)}p_\mu p_\nu = \delta^{\mu\nu}p_\mu p_\nu = |\vec{p}|^2,$$

BCU IASI / CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

adică

$$E_p - m - \frac{(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2}{E_p+m} = (E_p+m)^{-1}\left[E_p^2 - m^2 - |\vec{p}|^2\right] \equiv 0,$$

rezultă imediat

$$\begin{aligned}(E_p - m)\varphi_+(\vec{p}) - \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\chi_+(\vec{p}) &= 0\\ (E_p - m)\chi_-(\vec{p}) - \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\varphi_-(\vec{p}) &= 0\end{aligned} \qquad (3.31)$$

oricare ar fi spinorii $\varphi_+(\vec{p})$, $\chi_-(\vec{p})$ în (3.29). Ca şi în metoda referenţialului propriu, pe aceştia îi vom alege coliniari cu vectorii proprii ortonormali ξ^A (daţi de (3.18)) ai operatorului $S_z = 1/2\,\sigma_z$, adică

$$\varphi_+^A(\vec{p}) = \chi_-^A(\vec{p}) = \mathcal{N}\xi^A\,,\ A = 1,2. \qquad (3.32)$$

Aici, $\mathcal{N}$ este un factor de normare pe care îl vom stabili puţin mai târziu, pe considerente specifice definirii adecvate a operatorilor de creare şi anihilare în teoria celei de a doua cuantificări a câmpului Dirac. Pentru moment, analog construirii sistemului fundamental de bispinori ortonormali (3.19), obţinem din relaţiile (3.32), (3.29) şi (3.24), următorul sistem fundamental de bispinori, ortogonali în cadrul fiecărui subspaţiu $span\{u^A\}_{A=1,2}$, $span\{v^A\}_{A=1,2}$,

$$\begin{aligned}&\text{a)}\ u^A(\vec{p}) = \mathcal{N}\begin{pmatrix}\xi^A\\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E}\xi^A\end{pmatrix}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\text{, cu } A=1,2\,,\ E = E_p + m\\ &\text{b)}\ v^A(\vec{p}) = \mathcal{N}\begin{pmatrix}\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E}\xi^A\\ \xi^A\end{pmatrix}\end{aligned} \qquad (3.33)$$

care formează o bază în spaţiul liniar al vectorilor $C_\pm(\vec{p})$, deci, în general,

$$\begin{aligned}C_+(\vec{p}) &= a_A(\vec{p})\,u^A(\vec{p})\\ C_-(\vec{p}) &= b_A^\dagger(\vec{p})\,v^A(\vec{p})\,.\end{aligned} \qquad (3.34)$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Utilizarea semnului de conjugare hermitică, în locul celui de conjugare complexă utilizat, de exemplu, în (3.17), este o chestiune tehnică, de convenabilitate a interpretării fizice a rezultatelor celei de a doua cuantificări, când $a_A(\vec{p})$ vor fi operatori de anihilare a unei particule de impuls $\vec{p}$, iar $b_A^\dagger(\vec{p})$, operatori de creare a unei antiparticule (de impuls $\vec{p}$), stările de spin ale acestora fiind precizate de indicele $A \in \{1,2\}$. Atragem încă o dată atenţia că, deşi fiecare pereche $\{u^A\}_{A=1,2}, \{v^A\}_{A=1,2}$ este un sistem bidimensional, de vectori ortogonali, perechile, între ele, nu sunt reciproc ortogonale. Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned}
u^{\dagger A}(\vec{p})u^B(\vec{p}) &= |\mathcal{N}|^2 \left(\xi^{\dagger A} \quad \xi^{\dagger A} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \right) \begin{pmatrix} \xi^B \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E}\xi^B \end{pmatrix} = \\
&= |\mathcal{N}|^2 \frac{E_p^2 + 2mE_p + m^2 + |\vec{p}|^2}{(E_p+m)^2} \xi^{\dagger A}\xi^B = \frac{|\mathcal{N}|^2}{E_p+m} 2E_p\delta^{AB} \\
v^{\dagger A}(\vec{p})v^B(\vec{p}) &= |\mathcal{N}|^2 \left(\xi^{\dagger A} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \quad \xi^{\dagger A} \right) \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E}\xi^B \\ \xi^B \end{pmatrix} = \\
&= |\mathcal{N}|^2 \frac{E_p^2 + 2mE_p + m^2 + |\vec{p}|^2}{(E_p+m)^2} \xi^{\dagger A}\xi^B = \frac{|\mathcal{N}|^2}{E_p+m} 2E_p\delta^{AB}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

dar şi

$$u^{\dagger A}(\vec{p})\, v^B(\vec{p}) = v^{\dagger A}(\vec{p})\, u^B(\vec{p}) = \frac{2|\mathcal{N}|^2}{E_p+m} \xi^{\dagger A} (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\, \xi^B \neq 0, \tag{3.36}$$

în general (pentru $\vec{p}$ oarecare). În schimb, dacă modificăm semnul impulsului doar în una din perechile $\{u^A(\vec{p})\}_{A=1,2}$ sau $\{v^A(\vec{p})\}_{A=1,2}$, sistemul cuadridimensional astfel obţinut, adică $\{u^A(\pm\vec{p}), v^A(\mp\vec{p})\}_{A=1,2}$,

BCU IAŞI / CENTRUL UNIVERSITAR

este complet ortogonal, în sensul că

$$\text{a)}\quad u^{\dagger A}(\pm\vec{p})\,u^{B}(\pm\vec{p}) = \frac{|\mathcal{N}|^2}{E}\,2E_p\,\delta^{AB}$$

$$\text{b)}\quad v^{\dagger A}(\mp\vec{p})\,v^{B}(\mp\vec{p}) = \frac{|\mathcal{N}|^2}{E}\,2E_p\,\delta^{AB}$$

$$\text{c)}\quad u^{\dagger A}(\pm\vec{p})\,v^{B}(\mp\vec{p}) = v^{\dagger A}(\mp\vec{p})\,u^{B}(\pm\vec{p}) = 0\,, \qquad (3.37)$$

deci perechile $\{u^A(\pm\vec{p})\}_{A=1,2}$ şi $\{v^A(\mp\vec{p})\}_{A=1,2}$ sunt reciproc ortogonale.

Din (3.34) şi (3.5.a) rezultă explicit forma soluţiei generale a ecuaţiei Dirac

$$\psi(x) = \int d^3p\,\left[a_A(\vec{p})\,u^A(\vec{p})\,f_{\vec{p}}(x) + b_A^{\dagger}(\vec{p})\,v^A(\vec{p})\,\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right] \qquad (3.38)$$

în care $\{f_{\vec{p}}(x)\,,\,\bar{f}_{\vec{p}}(x)\}$ sunt date de relaţia (3.7), iar bispinorii de bază $\{u^A(\vec{p}),\,v^A(\vec{p})\}_{A=1,2}$ au forma (3.33), adică, în mod concret, până la factorul de normare $\mathcal{N}$,

$$u^1(\vec{p}) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E} \\ \frac{p_+}{E} \end{pmatrix}\;;\quad u^2(\vec{p}) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E} \\ -\frac{p_z}{E} \end{pmatrix}$$

$$v^1(\vec{p}) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} \frac{p_z}{E} \\ \frac{p_+}{E} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\;;\quad v^2(\vec{p}) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} \frac{p_-}{E} \\ -\frac{p_z}{E} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.39)$$

Evident, pentru orice cuadrivector p de forma $(\vec{p},\,E_p)$, setul de bispinori: $\mathrm{R}^4 \to \mathrm{C}^4$,

$$\psi^A_{\vec{p}+}(x) = u^A(\vec{p})\,f_{\vec{p}}(x)\,,\;\psi^A_{\vec{p}-}(x) = v^A(\vec{p})\,\bar{f}_{\vec{p}}(x) \qquad (3.40)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

reprezintă sistemul fundamental de soluţii ale ecuaţiei Dirac, în raport cu care soluţia generală (3.38) se exprimă simplu, sub forma

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \psi(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x)\,, \text{ unde avem respectiv} \\ &\text{b)}\quad \psi_+(x) = \int d^3p\, a_A(\vec{p})\, \psi^A_{\vec{p}+}(x) \\ &\text{c)}\quad \psi_-(x) = \int d^3p\, b^\dagger_A(\vec{p})\, \psi^A_{\vec{p}-}(x)\,. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Aşa cum menţionam şi la început, odată determinaţi $C_\pm(\vec{p})$, integrarea adjunctei (1.24) a ecuaţiei Dirac nu mai prezintă nici un fel de dificultate deoarece, în mod automat, $\bar{\psi}(x)$ dat de (3.5.b) cu sistemul de bispinori

$$\bar{C}_\mp(\vec{p}) = C^\dagger_\mp(\vec{p})\beta \tag{3.42}$$

este soluţia generală a acestuia. Dacă, totuşi, dorim să verificăm acest lucru, atunci putem lua conjugata Dirac a ecuaţiilor (3.12) şi avem

$$\begin{aligned} C^\dagger_+(\vec{p})\beta\beta\,(\hat{p} - im)^\dagger\,\beta &= \bar{C}_+(\vec{p})\beta\left(\gamma^\mu p_\mu - \gamma^4 p_4 + im\right)\beta = 0 \\ C^\dagger_-(\vec{p})\beta\beta\,(\hat{p} + im)^\dagger\,\beta &= \bar{C}_-(\vec{p})\beta\left(\gamma^\mu p_\mu - \gamma^4 p_4 - im\right)\beta = 0 \end{aligned} \tag{3.43}$$

adică

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \bar{C}_+(\vec{p})\,(\hat{p} - im) = 0 \\ &\text{b)}\quad \bar{C}_-(\vec{p})\,(\hat{p} + im) = 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

sunt ecuaţiile matriceale ce trebuie satisfăcute de conjugaţii Dirac (3.42) ai vectorilor "amplitudine" (3.34). În reprezentarea bloc-matriceală (2×2), ştim deja că, din (3.26),

$$\hat{p} \mp im = i \begin{pmatrix} (E_p \mp m) & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -(E_p \pm m) \end{pmatrix}, \tag{3.45}$$

B.C.U. "M. EMINESCU" IAŞI

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar din (3.42), (3.34) şi (3.33) rezultă

$$\begin{aligned} \bar{C}_-(\vec{p}) &= b_A(\vec{p})\, v^{\dagger A}(\vec{p})\beta \\ \bar{C}_+(\vec{p}) &= a_A^\dagger(\vec{p})\, u^{\dagger A}(\vec{p})\beta \end{aligned} \tag{3.46}$$

adică, explicit,

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \ \bar{C}_+(\vec{p}) = \mathcal{N} a_A^\dagger(\vec{p}) \left(\xi^{\dagger A} \ \ -\xi^{\dagger A} \tfrac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \right) \\ &\text{b)}\ \ \bar{C}_-(\vec{p}) = \mathcal{N} b_A(\vec{p}) \left(\xi^{\dagger A} \tfrac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \ \ -\xi^{\dagger A} \right). \end{aligned} \tag{3.47}$$

Împreună cu (3.45), obţinem pentru ecuaţia (3.44.a)

$$\begin{aligned} &\left(\xi^{\dagger A} \ \ -\xi^{\dagger A} \tfrac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \right) \begin{pmatrix} E_p - m & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -E \end{pmatrix} = \\ &= \left(\xi^{\dagger A} \left(E_p - m - \tfrac{|\vec{p}|^2}{E} \right) \ \ 0 \right) \equiv \left(0 \ \ 0 \right), \end{aligned}$$

iar pentru (3.44.b),

$$\begin{aligned} &\left(\xi^{A\dagger} \tfrac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \ \ -\xi^{\dagger A} \right) \begin{pmatrix} E & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -(E_p - m) \end{pmatrix} = \\ &= \left(0 \ \ -\xi^{\dagger A} \left(\tfrac{|\vec{p}|^2}{E} - (E_p - m) \right) \right) \equiv \left(0 \ \ 0 \right), \end{aligned}$$

deci ambele ecuaţii sunt verificate de bispinorii (3.47), oricare ar fi setul $\left\{ a_A^\dagger(\vec{p}),\, b_A(\vec{p}) \right\}_{A=1,2}$. Prin urmare, setul cuadridimensional de bispinori adjuncţi

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \ \bar{u}^A(\vec{p}) = u^{\dagger A}(\vec{p})\beta = \mathcal{N} \left(\xi^{\dagger A} \ \ -\xi^{\dagger A} \tfrac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \right) \\ &\text{b)}\ \ \bar{v}^A(\vec{p}) = v^{\dagger A}(\vec{p})\beta = \mathcal{N} \left(\xi^{\dagger A} \tfrac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \ \ -\xi^{\dagger A} \right) \end{aligned} \quad , A = 1,2 \tag{3.48}$$

BCU IAŞI / GENERAL UNIVERSITY LIBRARY

sau, la modul cel mai concret,

$$\begin{aligned}
\bar{u}^1(\vec{p}) &= \mathcal{N}\left(1 \;\; 0 \;\; -\tfrac{p_z}{E} \;\; -\tfrac{p_-}{E}\right)\\
\bar{u}^2(\vec{p}) &= \mathcal{N}\left(0 \;\; 1 \;\; -\tfrac{p_+}{E} \;\; \tfrac{p_z}{E}\right)\\
\bar{v}^1(\vec{p}) &= \mathcal{N}\left(\tfrac{p_z}{E} \;\; \tfrac{p_-}{E} \;\; 1 \;\; 0\right)\\
\bar{v}^2(\vec{p}) &= \mathcal{N}\left(\tfrac{p_+}{E} \;\; -\tfrac{p_z}{E} \;\; 0 \;\; 1\right)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

este un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiilor Dirac adjuncte (3.44.a), respectiv (3.44.b), şi formează o bază în spaţiul liniar dual (în sens Dirac) căreia îi aparţin vectorii $\bar{C}_\pm(\vec{p})$. Din (3.46) şi (3.5.b), obţinem explicit forma soluţiei generale a adjunctei ecuaţiei Dirac

$$\bar{\psi}(x) = \int d^3p \left[b_A(\vec{p})\bar{v}^A(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) + a_A^\dagger(\vec{p})\bar{u}^A(\vec{p})\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right] \tag{3.50}$$

cu $\left\{\bar{v}^A(\vec{p})\,,\,\bar{u}^A(\vec{p})\right\}_{A=1,2}$ daţi de (3.48) sau (3.49), din care observăm că setul de bispinori adjuncţi, în sens Dirac, $\bar{\psi} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^4$, pentru orice cuadrivector $p = (\vec{p}, E_p)$,

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}^A_{\vec{p}-}(x) &= \overline{\left(\psi^A_{\vec{p}+}(x)\right)} = \bar{u}^A(\vec{p})\bar{f}_{\vec{p}}(x)\\
\bar{\psi}^A_{\vec{p}+}(x) &= \overline{\left(\psi^A_{\vec{p}-}(x)\right)} = \bar{v}^A(\vec{p})f_{\vec{p}}(x)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

reprezintă sistemul fundamental de soluţii ale ecuaţiei adjuncte (1.24) astfel încât $\bar{\psi}(x)$ se poate exprima sub forma

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\;\; \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}_+(x) + \bar{\psi}_-(x)\,,\ \text{cu}\ \bar{\psi}_+(x) = \overline{(\psi_-(x))}\,,\ \bar{\psi}_-(x) = \overline{(\psi_+(x))}\\
&\text{b)}\;\; \bar{\psi}_+(x) = \int d^3p\, b_A(\vec{p})\bar{\psi}^A_{\vec{p}+}(x)\\
&\text{c)}\;\; \bar{\psi}_-(x) = \int d^3p\, a_A^\dagger(\vec{p})\bar{\psi}^A_{\vec{p}-}(x)\,.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Profitând de expresiile (3.48) şi (3.33) ale celor două sisteme fundamentale, intuitiv reciproc duale, în sens Dirac, să urmărim mai în

detaliu proprietăţile algebrice esenţiale ale acestora. În primul rând, referitor la legătura ce există între conjugarea Dirac, conjugarea Hermite şi reflexia spaţială a impulsului $\vec{p}$, observăm că (fără a mai menţiona factorul $\mathcal{N}$)

$$u^{\dagger A}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \xi^{\dagger A} & \xi^{\dagger A}\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^{\dagger A} & -\xi^{\dagger A}\frac{-\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \end{pmatrix} = \bar{u}^A(-\vec{p})$$
$$v^{\dagger A}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \xi^{\dagger A}\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} & \xi^{\dagger A} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \xi^{\dagger A}\frac{-\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} & -\xi^{\dagger A} \end{pmatrix} = -\bar{v}^A(-\vec{p}), \tag{3.53}$$

adică bispinorii adjuncţi $\left\{\bar{u}^A(\vec{p}),\, \bar{v}^A(\vec{p})\right\}_{A=1,2}$ au proprietatea algebrică "internă"

$$\bar{u}^A(\vec{p}) = u^{\dagger A}(-\vec{p})\,;\; \bar{v}^A(\vec{p}) = -v^{\dagger A}(-\vec{p})\,. \tag{3.54}$$

În al doilea rând, inspiraţi de relaţiile (3.37) şi de proprietatea algebrică tocmai demonstrată, putem verifica efectiv dualitatea Dirac a celor două baze $\left\{u^A(\vec{p}),\, v^A(\vec{p})\right\}_{A=1,2}$, $\left\{\bar{u}^A(\vec{p}),\, \bar{v}^A(\vec{p})\right\}_{A=1,2}$.

Într-adevăr, avem

$$\bar{u}^A(\vec{p})\,u^B(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \xi^{\dagger A} & -\xi^{\dagger A}\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^B \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E}\xi^B \end{pmatrix}|\mathcal{N}|^2 =$$
$$= \delta^{AB}\left[1 - \frac{|\vec{p}|^2}{E^2}\right]|\mathcal{N}|^2$$
$$\bar{v}^A(\vec{p})\,v^B(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \xi^{\dagger A}\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} & -\xi^{\dagger A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E}\xi^B \\ \xi^B \end{pmatrix}|\mathcal{N}|^2 =$$
$$= -\delta^{AB}\left[1 - \frac{|\vec{p}|^2}{E^2}\right]|\mathcal{N}|^2$$
$$\bar{u}^A(\vec{p})\,v^B(\vec{p}) = u^{\dagger A}(-\vec{p})\,v^B(\vec{p}) \equiv 0 \quad (\text{din } (3.37.c)$$
$$\bar{v}^A(\vec{p})\,u^B(\vec{p}) = -v^{\dagger A}(-\vec{p})\,u^B(\vec{p}) \equiv 0 \quad (\text{din } (3.37.c)\,. \tag{3.55}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cum

$$1 - \frac{|\vec{p}|^2}{E^2} = \frac{E_p^2 + 2mE_p + m^2 - \left(E_p^2 - m^2\right)}{(E_p + m)^2} = \frac{2m}{E_p + m},$$

obţinem concret relaţiile de dualitate (în sens Dirac)

$$\text{a)}\quad \bar{u}^A(\vec{p})\,u^B(\vec{p}) = -\,\bar{v}^A(\vec{p})\,v^B(\vec{p}) = \frac{|\mathcal{N}|^2}{E_p + m}\,2m\,\delta^{AB}$$

$$, \forall A, B \in \{1,2\}$$

$$\text{b)}\quad \bar{u}^A(\vec{p})\,v^B(\vec{p}) = \bar{v}^A(\vec{p})\,u^B(\vec{p}) = 0\,. \tag{3.56}$$

În ceea ce priveşte termenii ştiinţifici, dorim să precizăm, pentru a evita confuziile sau neînţelegerile ce ar putea rezulta din "alinierea" la nomenclatura întrebuinţată în alte lucrări de specialitate, că preferăm pentru proprietăţile (3.56) denumirea de "relaţii de dualitate", deoarece, în general, duala $\mathcal{B}^* = \{\omega^a\}_{a=\overline{1,n}} \in V_n^*$ a unei baze $\mathcal{B} = \{e_a\}_{a=\overline{1,n}} \in V_n$ se defineşte prin

$$\langle \omega^a, e_b \rangle = \delta_b^a\,, \ \forall a, b \in \{1, 2, \ldots, n\} \tag{3.57}$$

unde croşetul $\langle , \rangle : V_n^* \times V_n \to \mathbf{R}$ este operaţia biliniară de contracţie a oricărui element din spaţiu dual V_n^*, să spunem $\sigma = \sigma_a \omega^a$, cu oricare alt element din V_n, să zicem $q = q^b e_b$, şi anume,

$$\langle \sigma, v \rangle = \sigma_c\, q^c \tag{3.58}$$

(cu sumare după c, de la 1 la n). Or, în mod evident, sistemele $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ şi $\{u, v\}$ nu aparţin aceluiaşi spaţiu liniar şi satisfac o relaţie (3.57). Semnul "negativ" prezent în contracţiile $\bar{v}v$ provine de la matricea β, utilizată în definirea conjugării Dirac, şi este legat, sub aspect fizic, de existenţa stărilor de energie (frecvenţă) negativă, care sunt, de fapt, o tară a tuturor teoriilor cuantice relativiste. Alţi autori au preferat (sau

încă mai preferă), pentru relaţiile (3.56), denumirea de "proprietate de pseudoortonormalitate" a vectorilor bazei

$$\mathcal{W} = \left\{w^a(\vec{p}) \,|\, w^A(\vec{p}) = u^A(\vec{p})\,,\; w^{A+2}(\vec{p}) = v^A(\vec{p})\right\}_{a=\overline{1,4}}\,,$$

dat fiind că, luând

$$\mathcal{N} = \left[\frac{E_p + m}{2m}\right]^{1/2}\,,$$

pot introduce produsul scalar al oricăror două elemente ale lui $\mathcal{W}$ ca aplicaţie biliniară

$$g : span\{\mathcal{W}\} \times span\{\mathcal{W}\} \to \mathrm{R} \tag{3.59}$$

definită prin

$$g\left(w^a(\vec{p})\,,\, w^b(\vec{p})\right) = \bar{w}^a(\vec{p})\, w^b(\vec{p}) = g^{ab}\,. \tag{3.60}$$

Evident, din $w^A(\vec{p}) = u^A(\vec{p})\,, w^{A+2}(\vec{p}) = v^A(\vec{p})$ şi (3.56), rezultă metrica indefinită, de signatură zero, $\left(g^{ab}\right) = \mathrm{diag}\,[1,\,1,\,-1,\,-1]$.

Revenind la subiect, dar având în minte posibilităţile de utilizare a inversei $(g_{ab}) = \mathrm{diag}\,[1,\,1,\,-1,\,-1]$ a matricei $\left(g^{ab}\right)$, să demonstrăm şi a treia proprietate esenţială a sistemelor fundamentale, reciproc duale, de bispinori $\left\{\bar{u}^A(\vec{p})\,,\, \bar{v}^A(\vec{p})\right\}_{A=1,2}$, $\left\{u^A(\vec{p})\,,\, v^A(\vec{p})\right\}_{A=1,2}$, sau, echivalent, a sistemului $\mathcal{W} = \{w^a(\vec{p})\}_{a=\overline{1,4}}$, şi anume, proprietatea de completitudine

$$g_{ab} w^a(\vec{p}) \bar{w}^b(\vec{p}) = 1 \;\Leftrightarrow\; \delta_{AB}\left[u^A(\vec{p})\bar{u}^B(\vec{p}) - v^A(\vec{p})\bar{v}^B(\vec{p})\right] = 1 \tag{3.61}$$

unde $1 = \mathrm{diag}\,[1,\,1,\,1,\,1]$ reprezintă deci, matricea unitate (4×4).

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Într-adevăr, din (3.48) şi (3.33) avem

$$\delta_{AB}\, u^A(\vec{p})\bar{u}^B(\vec{p}) = \delta_{AB}\begin{pmatrix} \xi^A \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E}\xi^A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^{\dagger B} & -\xi^{\dagger B}\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \end{pmatrix}|\mathcal{N}|^2 =$$

$$= |\mathcal{N}|^2\begin{pmatrix} \delta_{AB}\xi^A\xi^{\dagger B} & -\delta_{AB}\xi^A\xi^{\dagger B}\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E}\xi^A\xi^{\dagger B}\delta_{AB} & -\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E}\delta_{AB}\xi^A\xi^{\dagger B}\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \end{pmatrix}$$

$$\delta_{AB}\, v^A(\vec{p})\bar{v}^B(\vec{p}) = \delta_{AB}\begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E}\xi^A \\ \xi^A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^{\dagger B}\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} & -\xi^{\dagger B} \end{pmatrix}|\mathcal{N}|^2 =$$

$$= |\mathcal{N}|^2\begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E}\delta_{AB}\xi^A\xi^{\dagger B}\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} & -\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E}\xi^A\xi^{\dagger B}\delta_{AB} \\ \delta_{AB}\xi^A\xi^{\dagger B}\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} & -\delta_{AB}\xi^A\xi^{\dagger B} \end{pmatrix} \tag{3.62}$$

şi cum

$$\delta_{AB}\xi^A\xi^{\dagger B} = 1\,,\ \text{cu}\ 1 = \text{diag}\,(1,\,1)\,, \tag{3.63}$$

rezultă

$$\text{a)}\quad \delta_{AB}\, u^A(\vec{p})\bar{u}^B(\vec{p}) = |\mathcal{N}|^2\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} & -\frac{|\vec{p}|^2}{E^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{b)}\quad \delta_{AB}\, v^A(\vec{p})\bar{v}^B(\vec{p}) = |\mathcal{N}|^2\begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|^2}{E^2} & -\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.64}$$

deci, luând diferenţa (3.64.a) − (3.64.b), obţinem

$$\delta_{AB}\left[u^A(\vec{p})\bar{u}^B(\vec{p}) - v^A(\vec{p})\bar{v}^B(\vec{p})\right] = |\mathcal{N}|^2\frac{2m}{E_p+m}1 \tag{3.65}$$

BCU ASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică tocmai (3.61) pentru $\mathcal{N} = \left(\frac{E_p+m}{2m}\right)^{1/2}$. Bineînţeles, pentru un factor de normare deocamdată nespecificat, relaţia de completitudine (3.61) se va scrie, de fapt, sub forma (3.65). În fine, după cum se cunoaşte şi din Mecanica Cuantică, existenţa unor relaţii de completitudine, în general, este deosebit de utilă în studiul unor operatori liniari de interes tehnic special, şi anume, proiectorii. De aceea, ne vom ocupa în încheierea acestui paragraf de aşa-numiţii *proiectori Dirac de energie*. Atributul "de energie", este necesar pentru a-i deosebi de ceilalţi proiectori foarte importanţi, mai ales în teoria câmpului spinorial nemasiv (cum este cel neutrinic) şi anume:

- *proiectorul de spin*

$$\Sigma(n) = \frac{1}{2}\left[1 - i\gamma_5\gamma^i n_i\right] ,$$

unde $(n^i) = \left(\vec{n}, \frac{\vec{p}\vec{n}}{E_p}\right)$ este cuadrivectorul unitar de gen spaţial, $n^2 = \eta_{ik}n^i n^k = 1$, ce stabileşte direcţia de proiecţie a spinului, şi

- *proiectorii de chiralitate*

$$\Gamma_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) ,$$

matricea γ_5 fiind în reprezentare Weyl, introdusă în Capitolul 1,

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cu 1 drept matricea unitate (2×2).

Prin convenţie, se spune despre Γ_+ că proiectează un bispinor pe subspaţiul (liniar) de chiralitate dreaptă (*right handed*) şi, reciproc, despre Γ_-, că proiectează un bispinor pe subspaţiul ortogonal (complementar primului) de chiralitate stângă (*left handed*). Dat fiind că, în acest paragraf, ne ocupăm de câmpuri spinoriale masive (denumite, în jargonul

ştiinţific, şi câmpuri Dirac), care, după cum se cunoaşte, distrug, sau "au ruptă", simetria de chiralitate, nu mai continuăm acum pe această direcţie, ci ne întoarcem la studiul proiectorilor de energie.

Pentru a-i introduce, să pornim de la proprietatea seturilor bidimensionale de bispinori $\left\{u^A(\vec{p})\right\}_{A=1,2}$, $\left\{v^A(\vec{p})\right\}_{A=1,2}$ de a fi soluţii fundamentale ale ecuaţiilor matriceale (3.12.a), respectiv (3.12.b), adică

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \ (\hat{p} - im)\, u^A(\vec{p}) = 0 \\ &\text{b)}\ \ (\hat{p} + im)\, v^A(\vec{p}) = 0\,. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Cineva şi-ar putea pune acum întrebarea ce se întâmplă dacă, în (3.66), schimbăm între ei bispinorii u, v, adică, în glumă fie spus, "dacă uităm cine asupra cui acţionează". Dacă se întâmplă aşa, atunci avem

$$\begin{aligned} \text{a)}\ \ (\hat{p} + im)\, u^A(\vec{p}) &= i \begin{pmatrix} E_p + m & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -(E_p - m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^A \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E_p+m}\,\xi^A \end{pmatrix} \mathcal{N} = \\ &= 2im \begin{pmatrix} \xi^A \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E}\,\xi^A \end{pmatrix} \mathcal{N} \\ \text{b)}\ \ (\hat{p} - im)\, v^A(\vec{p}) &= i \begin{pmatrix} E_p - m & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -(E_p + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E_p+m}\,\xi^A \\ \xi^A \end{pmatrix} \mathcal{N} = \\ &= -2im \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E}\,\xi^A \\ \xi^A \end{pmatrix} \mathcal{N} \end{aligned} \tag{3.67}$$

adică

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \ (\hat{p} + im)\, u^A(\vec{p}) = 2im\, u^A(\vec{p}) \\ &\text{b)}\ \ (\hat{p} - im)\, v^A(\vec{p}) = -2im\, v^A(\vec{p}) \end{aligned} \tag{3.68}$$

de unde tragem concluzia că operatorul

$$\Lambda_+ = \frac{\hat{p} + im}{2im} \tag{3.69}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

are bispinorii $u^A(\vec{p})$, ai bazei în subspaţiul frecvenţelor pozitive, drept vectori proprii de valoare principală $\lambda_+^{(1)} = 1$ şi "distruge", pe baza ecuaţiei (3.66.b), vectorii $v^A(\vec{p})$ ai bazei din subspaţiul frecvenţelor negative. Altfel spus, aceştia îi sunt vectori proprii corespunzători valorii principale $\lambda_+^{(2)} = 0$. Similar, din (3.68.b), rezultă că operatorul

$$\Lambda_- = -\frac{\hat{p} - im}{2im} \tag{3.70}$$

are vectorii proprii $v^A(\vec{p})$, ai bazei de frecvenţe negative, corespunzători valorii proprii $\lambda_-^{(1)} = 1$, şi-i "distruge" pe cei ai bazei de frecvenţe pozitive, $\{u^A(\vec{p})\}_{A=1,2}$, care-i sunt vectori proprii de valoare principală $\lambda_-^{(2)} = 0$. Pe scurt,

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \Lambda_+ u^A(\vec{p}) = \lambda_+^{(1)} u^A(\vec{p}) = u^A(\vec{p}) \\
&\text{b)}\quad \Lambda_+ v^A(\vec{p}) = \lambda_+^{(2)} v^A(\vec{p}) = 0 \\
&\text{c)}\quad \Lambda_- v^A(\vec{p}) = \lambda_-^{(1)} v^A(\vec{p}) = v^A(\vec{p}) \\
&\text{d)}\quad \Lambda_- u^A(\vec{p}) = \lambda_-^{(2)} u^A(\vec{p}) = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Prezenţa unor proprietăţi, ca existenţa valorilor proprii 0, 1 şi invarianţa unui subspaţiu, acompaniată de eliminarea altuia, sugerează deja că cei doi operatori, Λ_+ şi Λ_-, sunt proiectorii pe care îi căutăm. Prin acţiunea lor, ei proiectează spaţiul liniar complex al soluţiilor ecuaţiei Dirac pe subspaţiul soluţiilor de energie pozitivă şi, respectiv, negativă; de aici şi denumirea de proiectori Dirac de energie. Oricum, nu avem voie să ne pronunţăm complet până nu demonstrăm că operatorii $\Lambda_\pm$ satisfac următoarele proprietăţi (cărora li se mai spune *globale*, din cauza independenţei exprimării lor de natura şi forma elementelor spaţiilor liniare pe care sunt formulate) ale proiectorilor, şi anume

(i) *Idempotenţa*: $\Lambda_+^2 = \Lambda_+$; $\Lambda_-^2 = \Lambda_-$;

(ii) *Ortogonalitatea*: $\Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = 0$;

(iii) *Completitudinea*: $\Lambda_+ + \Lambda_- = 1$. (3.72)

Într-adevăr, putem arăta imediat că

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = \frac{\hat{p} + im}{2im} - \frac{\hat{p} - im}{2im} = 1$$

şi, de asemenea,

$$\Lambda_+\Lambda_- = \frac{1}{4m^2}(\hat{p}+im)(\hat{p}-im) = \frac{1}{4m^2}\left(p^2+m^2\right) \equiv 0,$$

$$\Lambda_-\Lambda_+ = \frac{1}{4m^2}(\hat{p}-im)(\hat{p}+im) = \frac{1}{4m^2}\left(p^2+m^2\right) \equiv 0,$$

care rezultă din proprietatea

$$\hat{p}\hat{p} = \gamma^i\gamma^k p_i p_k = \frac{1}{2}\left(\gamma^i\gamma^k + \gamma^k\gamma^i\right)p_i p_k = \eta^{ik}p_i p_k = p^2$$

şi condiţia *on-shell* $p^2+m^2 = 0$. Astfel, relaţiile (3.72.iii, ii) fiind practic demonstrate, mai avem de arătat (3.71.i). Fie, deci, Λ_+ dat de (3.69) şi să calculăm Λ_+^2. Avem imediat

$$\Lambda_+^2 = -\frac{1}{4m^2}\left(2im\hat{p} - m^2 + p^2\right) = -\frac{2im}{4m^2}(\hat{p} + im) \equiv \Lambda_+$$

şi, analog, pentru Λ_- dat (3.70),

$$\Lambda_-^2 = \frac{1}{4m^2}\left(2im\hat{p} + m^2 - p^2\right) = \frac{2im}{4m^2}(\hat{p} - im) \equiv \Lambda_-,$$

ceea ce demonstrează complet idempotenţa şi, totodată, şirul de proprietăţi (3.72).

Ce se poate spune despre hermiticitatea operatorilor $\Lambda_\pm$? Observăm, în acest sens, că au loc relaţiile

$$\text{a)}\quad \Lambda_+^\dagger = \left(\frac{\hat{p}+im}{2im}\right)^\dagger = -\frac{\hat{p}^\dagger - im}{2im} = \frac{-\hat{p}^\dagger + im}{2im},$$

$$\text{b)}\quad \Lambda_-^\dagger = -\left(\frac{\hat{p}-im}{2im}\right)^\dagger = \frac{\hat{p}^\dagger + im}{2im} = -\frac{-\hat{p}^\dagger - im}{2im}, \tag{3.73}$$

BCU IAŞI CONTA UNIVERSITY LIBRARY

deci, dacă ar fi îndeplinită antihermiticitatea $\hat{p}^\dagger = -\hat{p}$, atunci cei doi proiectori ar fi hermitici. Dar, din proprietăţile

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^\mu\,,\ \left(\gamma^4\right)^\dagger = -\gamma^4$$

ale matricelor von Neumann, rezultă

$$\hat{p}^\dagger + \hat{p} = \gamma^\mu p_\mu - \gamma^4 p_4 + \gamma^\mu p_\mu + \gamma^4 p_4 = 2\gamma^\mu p_\mu$$

şi, astfel, deducem că operatorii $\Lambda_\pm$ sunt hermitici numai în referenţialul propriu, în care $\vec{p} = 0$. Fizic vorbind, dat fiind că pentru bispinori conjugarea Dirac are un sens mai profund decât cel al conjugării hermitice (de exemplu, $\bar{\psi}\psi$ este un invariant relativist, în timp ce $\psi^\dagger\psi$ este "doar" componenta temporală a cuadricurentului), ne aşteptam oarecum la acest rezultat. Lăsându-ne în continuare purtaţi de această intuiţie, a "dominanţei" conjugării Dirac faţă de cea hermitică, putem bănui că proiectorii de energie vor fi, probabil, Dirac-autoadjuncţi, adică

$$\beta\Lambda_\pm^\dagger\beta \equiv \bar{\Lambda}_\pm = \Lambda_\pm\,. \tag{3.74}$$

Într-adevăr, apelând la relaţiile (3.73), avem

$$\bar{\Lambda}_+ = \beta\Lambda_+^\dagger\beta = \frac{1}{2im}\left[-\beta\hat{p}^\dagger\beta + im\right]$$
$$\bar{\Lambda}_- = \beta\Lambda_-^\dagger\beta = -\frac{1}{2im}\left[-\beta\hat{p}^\dagger\beta - im\right]$$

şi cum

$$-\beta\hat{p}^\dagger\beta = -\beta\gamma^\mu\beta p_\mu + \gamma^4 p_4 = \gamma^\mu p_\mu + \gamma^4 p_4 \equiv \hat{p}\,,$$

obţinem imediat proprietatea (3.74), de Dirac-autoadjunctivitate a proiectorilor de energie; de aici şi denumirea de proiectori Dirac.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În fine, acestea fiind spuse, mai avem de tratat o singură chestiune importantă, şi anume reprezentarea proiectorilor de energie pe produsul tensorial al spaţiilor liniare reciproc Dirac-duale $span\,\mathcal{W} \otimes span\,\bar{\mathcal{W}}$.

Formal, soluţia acestei probleme nu este deloc dificilă, dat fiind că, în baza proprietăţilor de proiecţie (3.71) şi a ortogonalităţii-Dirac (3.56.b), operatorii Λ_+, Λ_- vor avea componente doar în subspaţiile tensoriale

$$span\{u^A(\vec{p})\}_{A=1,2} \otimes span\{\bar{u}^B(\vec{p})\}_{B=1,2}\,,$$

pentru Λ_+ şi, respectiv,

$$span\{v^A(\vec{p})\}_{A=1,2} \otimes span\{\bar{v}^B(\vec{p})\}_{B=1,2}\,,$$

pentru Λ_- . Trebuie, totuşi, avut în vedere că, pentru un factor $\mathcal{N}$ oarecare (constrâns cel mult de a fi în $\mathbb{R}_+$) "metricile" g_+^{AB}, g_-^{AB} definite în sensul relaţiei (3.60) pe subspaţiile $span\{u^A(\vec{p})\}$, $span\{v^A(\vec{p})\}$ nu sunt normate la unitate, ci avem, în baza relaţiilor de dualitate (3.56.a),

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad g_+^{AB} = \mathrm{g}\left(u^A(\vec{p}),\, u^B(\vec{p})\right) = \bar{u}^A(\vec{p})u^B(\vec{p}) = \frac{|\mathcal{N}|^2}{E}\,2m\,\delta^{AB} \\ &\text{b)}\quad g_-^{AB} = \mathrm{g}\left(v^A(\vec{p}),\, v^B(\vec{p})\right) = \bar{v}^A(\vec{p})v^B(\vec{p}) = -\frac{|\mathcal{N}|^2}{E}\,2m\,\delta^{AB}\,. \end{aligned} \tag{3.75}$$

În mod corespunzător, inversele acestor metrici vor avea elementele

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad g^{(+)}_{AB} = \frac{E}{|\mathcal{N}|^2}\,\frac{1}{2m}\,\delta_{AB} \\ &\text{b)}\quad g^{(-)}_{AB} = -\frac{E}{|\mathcal{N}|^2}\,\frac{1}{2m}\,\delta_{AB}\,. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Atunci, reprezentând proiectorii Dirac de energie sub forma

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \Lambda_+ = (\Lambda_+)_{AB}\; u^A(\vec{p})\bar{u}^B(\vec{p}) \\ &\text{b)}\quad \Lambda_- = (\Lambda_-)_{AB}\; v^A(\vec{p})\bar{v}^B(\vec{p}) \end{aligned} \tag{3.77}$$

BCU IAŞI / CENTRUL UNIVERSITAR

vom avea că

$$\begin{aligned}
\bar{u}^C(\vec{p})\Lambda_+ u^D(\vec{p}) &= \bar{u}^C(\vec{p})u^D(\vec{p}) = g_+^{CD} = (\Lambda_+)^{CD} = \\
&= (\Lambda_+)_{AB}\, g_+^{CA} g_+^{BD} = g_+^{CA} g_+^{BD} (\Lambda_+)_{AB} \\
\bar{v}^C(\vec{p})\Lambda_- v^D(\vec{p}) &= \bar{v}^C(\vec{p})v^D(\vec{p}) = g_-^{CD} = (\Lambda_-)^{CD} = \\
&= (\Lambda_-)_{AB}\, g_-^{CA} g_-^{BD} = g_-^{CA} g_-^{BD} (\Lambda_-)_{AB} ,
\end{aligned}$$

adică

$$\begin{aligned}
g_+^{CA} g_+^{BD} (\Lambda_+)_{AB} = g_+^{CD} &\Rightarrow (\Lambda_+)_{AB} = g_{AB}^{(+)} \\
g_-^{CA} g_-^{BD} (\Lambda_-)_{AB} = g_-^{CD} &\Rightarrow (\Lambda_-)_{AB} = g_{AB}^{(-)} ,
\end{aligned} \tag{3.78}$$

astfel încât rezultă simplu, din (3.76), că

$$\begin{aligned}
\text{a)}\quad (\Lambda_+)_{AB} &= \frac{E_p + m}{|\mathcal{N}|^2} \frac{1}{2m} \delta_{AB} \\
\text{b)}\quad (\Lambda_-)_{AB} &= -\frac{E_p + m}{|\mathcal{N}|^2} \frac{1}{2m} \delta_{AB} ,
\end{aligned} \tag{3.79}$$

deci reprezentările căutate, (3.77), sunt date explicit de relaţiile

$$\begin{aligned}
\text{a)}\quad \Lambda_+ &= \frac{E_p + m}{|\mathcal{N}|^2} \frac{1}{2m} \delta_{AB}\, u^A(\vec{p}) \bar{u}^B(\vec{p}) , \\
\text{b)}\quad \Lambda_- &= -\frac{E_p + m}{|\mathcal{N}|^2} \frac{1}{2m} \delta_{AB}\, v^A(\vec{p}) \bar{v}^B(\vec{p}) ,
\end{aligned} \tag{3.80}$$

valabile oricare ar fi factorul de normare $\mathcal{N}$. Proprietăţile (3.72) sunt mai mult decât evidente, iar forma "bloc-matriceală (2×2)", de reprezentare a proiectorilor Dirac de energie (3.80), se poate da pe loc, dacă utilizăm rezultatul obţinut deja, anume (3.64). Bineînţeles că ceea ce obţinem pe această cale trebuie să coincidă, având în vedere definiţiile (3.60), (3.70), cu expresiile deduse direct din (3.45), prin simpla împărţire cu $\mp 2im$, pentru $\Lambda_\mp$, respectiv.

4.4 A doua cuantificare

Până acum, în cadrul acestui capitol, ne-am ocupat de câmpul Dirac clasic, care descrie stările fizice ale unei particule (relativiste) de spin 1/2 (şi masă de repaus m), la nivelul aşa-numitei *prime cuantificări*, adică aşa cum sunt obţinute şi analizate în cadrul Mecanicii Cuantice relativiste. Ca semnificaţie de ordin general, reamintim că prima cuantificare se referă la faptul că numai valorile observabilelor sistemului sunt, în principiu, cuantificate, nu însă şi funcţiile de stare ale acestuia. Evident, prin generalizarea logică, rezultă că în formalismul *celei de a doua cuantificări*, nu numai observabilele, dar şi funcţiile de stare însele sunt cuantificate. Trecând concret la cazul câmpului spinorial, să vedem mai întâi, de ce ar trebui să ne preocupe cuantificarea acestui câmp? Pentru a răspunde, să presupunem contrariul, şi anume că, la nivelul primei cuantificări, câmpul Dirac se comportă foarte bine. Dacă este aşa, atunci ar trebui ca modurile de frecvenţă negativă,

$$\psi_-(x) = \int d^3p\, b_A^\dagger(\vec{p}) v^A(\vec{p}) \bar{f}_{\vec{p}}(x) \tag{4.1}$$

să descrie deja antiparticula, adică, lucrând cu $\left\{ b_A(\vec{p}),\, b_A^\dagger(\vec{p}) \right\}_{A=1,2}$ ca scalari din $\mathbf{C}$ (complex conjugaţi unul altuia), să obţinem pentru hamiltonianul

$$H_- = \frac{i}{2} \int \left[(\psi_-)^\dagger \psi_{-,4} - (\psi_{-,4})^\dagger \psi \right] d^3x\,, \tag{4.2}$$

o expresie pozitiv definită, iar pentru sarcina electrică

$$Q_- = e \int (\psi_-)^\dagger \psi_-\, d^3x\,, \tag{4.3}$$

una negativ definită, dacă $e > 0$ este asociat(ă) particulei. Dar, din (4.1) şi conjugata ei hermitică

$$[\psi_-(x)]^\dagger = \int d^3p\, b_B(\vec{p}) v^{\dagger B}(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x)\,, \tag{4.4}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

împreună cu expresiile (3.7) ale modurilor $\left\{f_{\vec{p}}(x)\,,\ \bar{f}_{\vec{p}}(x)\right\}$, obţinem pentru $H_-\,, Q_-$ expresiile

$$\begin{aligned} H_- &= -\frac{1}{2}\int d^3p\, b_A(\vec{p}) b_B^\dagger(\vec{p}) v^{\dagger A}(\vec{p}) v^B(\vec{p})\,, \\ Q_- &= e\int \frac{d^3p}{2E_p}\, b_A(\vec{p}) b_B^\dagger(\vec{p}) v^{\dagger A}(\vec{p}) v^B(\vec{p})\,, \end{aligned} \tag{4.5}$$

care devin, concret,

$$\begin{aligned} H_- &= -\int d^3p\, E_p \left[|b_1(\vec{p})|^2 + |b_2(\vec{p})|^2\right] < 0 \\ Q_- &= e\int d^3p \left[|b_1(\vec{p})|^2 + |b_2(\vec{p})|^2\right] > 0\,, \end{aligned} \tag{4.6}$$

dacă se are în vedere relaţia de ortogonalitate (3.35), cu normarea $|\mathcal{N}|^2 = E_p + m$, precum şi faptul că (la nivelul primei cuantificări) amplitudinile $b_A(\vec{p}) \in \mathbf{C}$, deci $b_A^\dagger(\vec{p}) = \bar{b}_A(\vec{p})$ (în sensul conjugării complexe). Prin urmare, rezultatele obţinute sunt exact contrare speranţelor noastre că Mecanica Cuantică relativistă, prin ea însăşi, este suficientă descrierii corecte şi a stărilor fizice ale antiparticulei unei particule date. Astfel, dacă ne bazăm pe interpretarea probabilistă (fundamentală în toată Mecanica Cuantică), atunci

$$\int d^3p \left[|b_1(\vec{p})|^2 + |b_2(\vec{p})|^2\right] = 1\,,$$

$|b_A(\vec{p})|^2$ reprezentând probabilitatea de a găsi "particule" în starea de impuls $\vec{p}$ şi spin *up* (pentru $A = 1$), respectiv *down* (pentru $A = 2$). Deci, după cum rezultă din relaţiile (4.5), avem de a face, de fapt, în locul unei antiparticule perfect observabile, de energie pozitivă şi sarcină "conjugată", cu ceea ce Gamov numea – cu bine cunoscutul său umor – o "particulă-măgar", de energie negativă şi sarcină (electrică) egală cu cea a antiparticulei descrise de partea de frecvenţă pozitivă,

$$\psi_+(x) = \int d^3p\, a_A(\vec{p}) u^A(\vec{p})\, f_{\vec{p}}(x)$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a soluţiei ecuaţiei Dirac. Desigur, prin teoria sa (a "golurilor"), Dirac soluţionează formal problema energiilor negative, presupunând că "particulele-măgar" ocupă două câte două, în virtutea principiului lui Pauli, toate nivelurile de energie negativă pe care le au la dispoziţie, de la $-\infty$ la $-m$ (în scara energie/particulă), formând "marea Fermi-Dirac". Aceasta, deşi este un mediu superdens, este complet echivalentă vidului, dat fiind că nu sunt posibile nici un fel de tranziţii (deci, clasic vorbind, nu este posibilă mişcarea) în interiorul ei. Cu alte cuvinte, la energii sub $2m$, nu putem schimba starea cuantică a nici uneia din "particulele-măgar" ce o alcătuiesc, pentru simplul motiv că acestea nu au unde tranzita, în interiorul ei, toate nivelurile energetice fiind, practic, complet ocupate. Putem spune, deci, că atât în cazul particulelor fermionice libere, cât şi în cazul proceselor (deci a interacţiunilor) de joasă energie, prezenţa mării lui Fermi este practic inobservabilă şi astfel, *by hand*, putem "curăţa" teoria de soluţiile ei de energie negativă. Oricum, în paranteză fie spus, nu putem afirma acelaşi lucru despre eliminarea *by hand* a sarcinii electrice teoretic infinite a vidului Fermi-Dirac. Chiar considerând spaţiul fizic de extensiune infinită, să nu uităm că şi numărul de "particule-măgar" este, de asemenea, infinit, şi astfel, densitatea volumică de sarcină ar fi dată de nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$, care nu este nicidecum aprioric zero. Deci nu putem spera ca prin diluţie, într-un spaţiu infinit, să reducem oricât de mult densitatea de sarcină a mării Fermi, astfel încât aceasta să nu dea nici un fel de efecte asupra particulelor reale (de energie pozitivă), care, prin însăşi omogenitatea ecuaţiei Dirac, sunt presupuse libere. Cu toate acestea, dacă ne referim numai la fermioni, problema densităţii de sarcină a vidului poate fi rezolvată formal, la nivelul primei cuantificări, pe o cale deosebit de simplă. Cum noi am considerat sarcina elementară e ca fiind pozitivă, înseamnă că particulele despre care vorbim (mai ales dacă le presupunem stabile) sunt protonii. Dar în natură există şi electroni, fiecare dintre ei având exact sarcina $-e$. Ca urmare, sarcina totală a *mării Dirac protono-electronice* va fi, indubitabil, zero. Deşi această

soluţie pare deosebit de naturală, caracterul global-neutru al Universului, deci implicit şi al vidului, fiind un deziderat, sau chiar un postulat, în marea majoritate a teoriilor fizice, să observăm totuşi următoarele două aspecte. Primul, de ordin estetic, se referă la faptul că, în timp ce problema energiilor negative poate fi soluţionată (pe calea menţionată) lucrând cu o singură specie de particule, pentru soluţionarea, în cadrul aceleiaşi teorii, a problemei densităţii de sarcină a vidului, avem indiscutabil nevoie de o a doua specie de particule. .Mai mult decât atât, dacă ne referim concret la protoni şi electroni, aceştia, cu excepţia spinului, şi a sarcinilor electrice riguros opuse, nu mai au în comun nici un alt număr cuantic. Aşa deci, reparând într-o parte, distrugem complet în alta: marea Fermi-Dirac protono-electronică este infinit "colorată" bariono-leptonic şi nu mai avem alte specii de "particule-măgar" pe care să le adăugăm, deoarece toţi barionii au $B = +1$ şi, respectiv, toţi leptonii au $L = +1$. Acesta era al doilea aspect pe care doream să-l menţionăm.

Referitor la antiparticule, ca să încheiem această digresiune asupra insuficienţei formalismului de primă cuantificare (în special în regimuri relativiste), acestea apar drept "goluri" în marea lui Fermi, produse prin convertirea unei "particule-măgar" în particulă reală, când este excitată cu energii mai mari decât $2m$. Evident că acestei afirmaţii, luată prin ea însăşi, adică separat de problemele vidului Fermi-Dirac, nu avem ce să-i reproşăm logico-fizic. Un gol în marea Dirac înseamnă absenţa unei sarcini pozitive de energie negativă, deci prezenţa, alături de particula reală (fostă "măgar"), a unei entităţi de sarcină negativă şi energie pozitivă care este tocmai antiparticula (pentru evitarea posibilelor confuzii, amintim din nou că lucrăm în convenţia $e > 0$). Problema de fond priveşte teoria în ansamblul ei. Putem sau nu putem să o "curăţăm" de tarele ce le posedă? Avem sau nu avem nevoie de ea? Există oare o cale, o metodă, de a îngloba unitar, în soluţia ecuaţiei Dirac, particule şi antiparticule, şi nu "buclucaşa" pereche cu "particule-măgar" ?... Ordinea în care am formulat întrebările nu este

întâmplătoare. Dacă ne referim la bozoni şi, mai precis, la stările de energie negativă ale acestora, care, de asemenea, apar la nivelul primei cuantificări, devine clar că întreaga *teorie a golurilor* pică deoarece bozonii, nerespectând principiul lui Pauli, nu mai pot asigura saturarea a ceea ce ar fi "marea Bose". Deci aceasta, pe lângă că şi-ar pierde inobservabilitatea, ar înghiţi, pe loc, toţi bozonii de energie iniţial pozitivă, dată fiind infinitatea de stări pe care le are libere (nefiind saturată) în abisul de energie $-\infty$... Cu un astfel de NU, atât de hotărât, dat ca răspuns primei întrebări, răspunsul la a doua întrebare devine chiar "ameninţător" : ar fi bine să nu avem nevoie de teoria golurilor sau de oricare alta asemănătoare. Ajunşi aici, răspunsul la a treia întrebare este imperativ: Trebuie să existe o cale !...

A. Relaţiile de anticomutare la timpi egali Jordan-Pauli-Wigner

Din punct de vedere tehnic şi local, adică referindu-ne pentru moment numai la formulele (4.5), (4.6), trucul de care avem nevoie şi care deschide calea celei de a doua cuantificări a câmpului Dirac, este foarte simplu. Observăm mai întâi că, bazaţi pe relaţiile (4.5) şi ortogonalitatea (3.35) cu normarea $|\mathcal{N}|^2 = E_p + m$, relaţiile (4.6) ar trebui scrise sub forma

$$\begin{aligned} H_- &= -\int d^3p\, E_p\, \delta^{AB}\, b_A(\vec{p}) b_B^\dagger(\vec{p}) \\ Q_- &= e\int d^3p\, \delta^{AB}\, b_A(\vec{p}) b_B^\dagger(\vec{p})\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Evident, dacă persistăm în a considera amplitudinile b_A, $b_B^\dagger$ drept numere complexe obişnuite, atunci dăm peste (4.6), cu toată suita de probleme pe care tocmai le-am discutat. De aceea, ne amintim acum că, în formalismul celei de a doua cuantificări a câmpului scalar complex, amplitudinile $b^\dagger$, b care însoţeau partea frecvenţelor negative şi, respectiv, conjugatele hermitice ale acestora, deveneau operatori de creare,

respectiv de anihilare, a antiparticulei asociate particulei, descrisă de partea frecvenţelor pozitive a, $a^\dagger$ şi satisfăceau relaţia de comutatori

$$\left[b(\vec{p}'), b^\dagger(\vec{p})\right] = \delta(\vec{p}' - \vec{p}), \tag{4.8}$$

iar operatorul

$$N_-(\vec{p}) = b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p}) \tag{4.9}$$

reprezenta *operatorul număr de antiparticule* (dacă $N_+ = a^\dagger a$ reprezintă operatorul număr de particule). Cum hamiltonianul părţii de frecvenţă negativă, la scalarul complex, era diagonal în N_-, adică

$$H_-[\textit{scalar complex}] = \int d^3p\, E_p N_-(\vec{p}) = \int d^3p\, E_p b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p}) > 0, \tag{4.10}$$

iar sarcina Q_-, de asemenea,

$$Q_-[\textit{scalar complex}] = -e\int d^3p N_-(\vec{p}) = -e\int d^3p\, b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p}) < 0, \tag{4.11}$$

am dori ceva cu totul asemănător şi pentru expresiile (4.7), considerând $b_A^\dagger(\vec{p})$, $b_A(\vec{p})$ drept, respectiv, operatori de creare, anihilare, ai antiparticulei. Ne împiedică însă două aspecte. Primul, problema semnului exact opus, $H_- < 0$, $Q_- > 0$, al doilea, ordinea inversă a operatorilor, $\delta^{AB} b_A(\vec{p}) b_B^\dagger(\vec{p})$, şi nu $\delta^{AB} b_A^\dagger(\vec{p}) b_B(\vec{p})$. Cum le-am putea corecta "dintr-o singură trăsătură de condei"? Foarte simplu. Dacă lăsăm operatorii să cumute, după o relaţie de tipul (4.8), atunci am schimbat ordinea, dar nu am corectat semnul. Dacă îi lăsăm să anticomute, după o relaţie de forma

$$\left\{b_A, b_B^\dagger\right\} = \Lambda_{AB}, \text{ cu } \Lambda_{AB} = \delta_{ab} \cdot ceva, \tag{4.12}$$

unde *ceva* este, probabil, de tip δ-Dirac, atunci am rezolvat şi ordinea şi problema semnului. Într-adevăr, lăsând deoparte contribuţiile lui Λ_{AB},

BCU IAŞI CENTRU UNIVERSITAR LIBRARY

care oricum sunt independente de produsul $b^\dagger b$, obţinem direct

$$H_- = \int d^3p\, E_p\, \delta^{AB}\, b_A^\dagger(\vec{p}) b_B(\vec{p}) = \int d^3p\, E_p \sum_{A=1}^{2} N_A^{(-)}(\vec{p})$$
$$Q_- = -e \int d^3p\, \delta^{AB}\, b_A^\dagger(\vec{p}) b_B(\vec{p}) = -e \int d^3p \sum_{A=1}^{2} N_A^{(-)}(\vec{p}), \tag{4.13}$$

unde

$$N_A^{(-)}(\vec{p}) = b_A^\dagger(\vec{p}) b_A(\vec{p}) \tag{4.14}$$

este operatorul număr de antiparticule în starea de spin (A).

Desigur, "numai cu o floare nu se face primăvară". Avem de dezvoltat o metodă generală, riguroasă, de cuantificare canonică a câmpului Dirac, din care relaţia (4.12) să rezulte în mod clar, ca un caz particular şi cu toţi termenii explicitaţi. Altfel, cum spunea Dirac, "totul nu ar fi decât o găselniţă sau, cel mult, un adevăr probabil". Din *ansatz*-ul pe care l-am utilizat, am învăţat totuşi un lucru, şi anume că, în cazul câmpurilor fermionice, la nivelul celei de a doua cuantificări, trebuie utilizate relaţii de anticomutare. De ce oare? Este o poveste lungă, dar deloc plicticoasă, care începe cu principiul lui Pauli, se continuă în Mecanica Cuantică a sistemelor de fermioni, fundamentează şi străbate cu morala ei "legătura spin-statistică", toată Fizica Statistică Cuantică şi în fine, se dezvoltă în cadrul celor mai moderne teorii de câmp (unitare, sau generalizate). În acest sens, cititorului interesat îi recomandăm să consulte lucrările de bază din domeniile pe care le-am enumerat. Acolo va afla, în teoriile de câmp în (2+1)−dimensiuni şi de "existenţa" *anyonilor*, ca particule de spin fracţionar (ne-semiîntreg), care, deci, nu sunt nici bozoni, nici fermioni. De aceea, spuneam mai sus, "se dezvoltă" şi nu (cum ar fi părut firesc) "se încheie". În continuare, vom trece la subiect...

Când am cuantificat câmpul scalar complex, am considerat ϕ, $\phi^\dagger$ drept coordonate generalizate, le-am asociat impulsurile canonic conjugate

$$\pi^{\dagger 4} = \frac{\partial \mathcal{L}\left[\phi, \phi^\dagger\right]}{\partial \phi_{,4}} \; ; \; \pi^4 = \frac{\partial \mathcal{L}\left[\phi, \phi^\dagger\right]}{\partial \phi^\dagger_{,4}} \tag{4.15}$$

şi am impus relaţiile de comutare la timpi egali Bohr-Heisenberg

$$\begin{aligned}
\left[\pi^{\dagger 4}(\vec{x}', t), \phi(\vec{x}, t)\right] &= -i\delta(\vec{x}' - \vec{x}) \\
\left[\pi^4(\vec{x}', t), \phi^\dagger(\vec{x}, t)\right] &= -i\delta(\vec{x}' - \vec{x}) \\
\left[\phi(\vec{x}', t), \phi(\vec{x}, t)\right] &= \left[\phi^\dagger(\vec{x}', t), \phi^\dagger(\vec{x}, t)\right] = 0 \\
\left[\pi^{\dagger 4}(\vec{x}', t), \pi^{\dagger 4}(\vec{x}, t)\right] &= \left[\pi^4(\vec{x}', t), \pi^4(\vec{x}, t)\right] = 0
\end{aligned} \tag{4.16}$$

dintre care, evident, esenţiale sunt numai două

$$\left[\pi^{\dagger 4}(\vec{x}', t), \phi(\vec{x}, t)\right] = -i\delta(\vec{x}' - \vec{x}) \; , \; \left[\phi(\vec{x}', t), \phi(\vec{x}, t)\right] = 0 \, , \tag{4.16'}$$

celelalte rezultând prin aplicarea conjugării hermitice. Dacă nu am avea de cuantificat un câmp fermionic, ci "doar" unul bozonic de varianţă superioară, 1 pentru câmpul vectorial, 2, 3... pentru cel tensorial, atunci, desemnând grupul de indici prin notaţia (a) – adică pentru un obiect covariant, $\phi_{(a)}$ (de exemplu) – am păstra relaţiile de comutare, dar le-am generaliza sub forma

$$\begin{aligned}
\left[\pi^{\dagger (a)4}(\vec{x}', t), \phi_{(b)}(\vec{x}, t)\right] &= -i\delta^{(a)}_{(b)}\delta(\vec{x}' - \vec{x}) \\
\left[\phi_{(a)}(\vec{x}', t), \phi_{(b)}(\vec{x}, t)\right] &= 0 \, .
\end{aligned} \tag{4.17}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În cazul câmpului fermionic de spin 1/2, operatorul de câmp este un bispinor, ca natură a varianţei sale faţă de grupul Lorentz $SO(3,1)$, reprezentabil printr-o matrice (4×1), adică unicolonară cu patru linii, cu elemente definite pe $\mathbb{R}^4$, cu valori în C; deci putem scrie $\psi(x) = (\psi^a(x))$, cu $a = \overline{1,4}$ şi, din acest punct de vedere, dar numai din acesta (fiindcă altfel posedă o cu totul altă lege de transformare), el seamănă cu un cuadrivector contravariant.

Analog, $\psi^\dagger(x) = \left(\psi_a^\dagger(x)\right)_{a=\overline{1,4}}$ şi $\bar{\psi}(x) = \left(\bar{\psi}_a(x)\right)_{a=\overline{1,4}}$ pot fi asemănaţi (ca notaţie) cu cuadrivectorii covarianţi. Cum, în plus, ca diferenţă specifică faţă de câmpul bozonic, $\phi_{(a)}$, avem de-a face cu un câmp fermionic, relaţiile de cuantificare canonică pe care le impunem vor fi de tipul (4.17), dar de anticomutare. Adică, lucrând cu

$$\bar{\pi}^4 = \frac{\partial \mathcal{L}\left[\psi, \bar{\psi}\right]}{\partial \dot{\psi}_{,4}} \; ; \; \pi^4 = \frac{\partial \mathcal{L}\left[\psi, \bar{\psi}\right]}{\partial \dot{\bar{\psi}}_{,4}} , \tag{4.18}$$

drept impulsuri canonic conjugate variabilelor canonice generalizate ψ, $\bar{\psi}$, vom impune relaţiile de anticomutare la timpi egali Jordan-Pauli-Wigner

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \left\{\bar{\pi}_a^{\cdot 4}(\vec{x}', t), \psi^b(\vec{x}, t)\right\} = -i\,\delta_a^b\,\delta(\vec{x}' - \vec{x}) \\
&\text{b)} \quad \left\{\pi^{a4}(\vec{x}', t), \bar{\psi}_b(\vec{x}, t)\right\} = +i\,\delta_b^a\,\delta(\vec{x}' - \vec{x}) \\
&\text{c)} \quad \left\{\psi^a(\vec{x}', t), \psi^b(\vec{x}, t)\right\} = \left\{\bar{\psi}_a(\vec{x}', t), \bar{\psi}_b(\vec{x}, t)\right\} \equiv 0 \\
&\text{d)} \quad \left\{\bar{\pi}_a^{\cdot 4}(\vec{x}', t), \bar{\pi}_b^{\cdot 4}(\vec{x}, t)\right\} = \left\{\pi^{a4}(\vec{x}', t), \pi^{b4}(\vec{x}, t)\right\} \equiv 0 ,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

denumite astfel după numele descoperitorilor lor. Care dintre ele sunt algebric esenţiale şi, mai ales, cum se exprimă acestea, vom vedea după ce stabilim concret cine sunt impulsurile canonice $\bar{\pi}^4$, π^4. Bineînţeles, răspunsul trebuie căutat în relaţiile de definiţie (4.18), utilizând densi-

tatea de lagrangeian simetrică (pentru a evita ca vreunul dintre impulsuri să fie zero) dată de formula (2.8)

$$\mathcal{L}\left[\psi, \bar{\psi}\right] = \frac{1}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^i\psi_{,i} - \bar{\psi}_{,i}\gamma^i\psi\right] + m\bar{\psi}\psi\,.$$

Tehnic vorbind, problema cu care ne confruntăm aici este reprezentată de ne-biliniaritatea acestui lagrangeian în raport cu derivatele câmpurilor (avem numai un factor în $\psi_{,i}$). Astfel, o estimare aparent normală a celor două impulsuri canonice ar da rezultatul

$$\bar{\pi}^4 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,4}} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^4\ ,\quad \pi^4 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_{,4}} = -\frac{1}{2}\gamma^4\psi\,, \tag{4.20}$$

în care, pe lângă apariţia factorului 1/2, mai observăm că impulsurile nu sunt în relaţie cu derivata temporală a coordonatelor canonice generalizate, ci chiar cu coordonatele. O astfel de situaţie, extinsă la întregul termen cinetic al lagrangeianului (cum se întâmplă aici), este fără analog în Mecanica Analitică, fie ea clasică sau relativistă. Tehnic, ea provine din caracterul degenerat al lagrangeianului, ecuaţiile de mişcare fiind conţinute explicit în forma acestuia). Principial, ea exprimă faptul că sistemele fermionice, fiind fundamentate pe principiul lui Pauli, care este eminamente de natură cuantică, nu au analog clasic direct, nici chiar prin aplicarea principiului de corespondenţă. Tot din această cauză, derivata temporală a impulsurilor, (4.20), apare şi în "termenii de forţă"

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} &= -\frac{1}{2}\bar{\psi}_{,\mu}\gamma^\mu - \bar{\pi}^4{}_{,4} + m\bar{\psi}\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} &= +\frac{1}{2}\psi_{,\mu}\gamma^\mu - \pi^4{}_{,4} + m\psi\,,\end{aligned} \tag{4.21}$$

în loc să fie conţinută integral în membrul stâng, de tip cuadridivergenţă, al ecuaţiilor Euler-Lagrange. Prin urmare, trebuie să fim atenţi cu ce formă concretă a impulsurilor de tip (4.18) lucrăm. Dacă stabilim, între

relaţiile de cuantificare (4.16) şi (4.19), o analogie bazată pe trecerea comutatorilor în anticomutatori şi pe corespondenţa $\phi \to \psi$, $\phi^\dagger \to \bar{\psi}$, atunci trebuie să avem în vedere că impulsurile canonice de tipul (4.15) depindeau stringent de $\phi^\dagger{}_{,4}$, $\phi_{,4}$ (şi nu numai de ele) şi, în plus, nu mai interveneau din nou şi în termenul de forţă al lagrangeianului câmpului scalar complex. Aşadar, vom profita de caracterul degenerat al lagrangeianului (2.8) al câmpului Dirac şi vom substitui în termenul cinetic al acestuia câmpurile nederivate $\bar{\psi}, \psi$, cu expresiile lor din ecuaţiile Dirac reciproc adjuncte

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \bar{\psi}_{,i}\gamma^i - m\bar{\psi} = 0 \ \Rightarrow\ \bar{\psi} = \frac{1}{m}\bar{\psi}_{,i}\gamma^i \\ &\text{b)}\ \gamma^i\psi_{,i} + m\psi = 0 \ \Rightarrow\ \psi = -\frac{1}{m}\gamma^i\psi_{,i}\ . \end{aligned} \tag{4.22}$$

Nu facem această substituţie şi în termenul masic, deoarece, pe de o parte, acesta are forma potenţială $\bar{\psi}\psi$, complet analogă formei $\phi^\dagger\phi$, iar pe de altă parte fiindcă, dacă am face-o, lagrangeianul fiind degenerat, am obţine explicit, peste tot, zero. Cu $\bar{\psi}$, ψ daţi de (4.20), obţinem densitatea de lagrangeian

$$\mathcal{L}\left[\bar{\psi}, \psi\right] = \frac{1}{m}\bar{\psi}_{,i}\gamma^i\gamma^k\psi_{,k} + m\bar{\psi}\psi\ , \tag{4.23}$$

a cărei formă seamănă deosebit de mult cu cea a scalarului complex şi, astfel, termenii cinetici şi potenţiali sunt complet separaţi şi au un aspect biliniar în variabilele de câmp. Acum, impulsurile generalizate $(\bar{\pi}^i, \pi^i)$ vor fi normal definite, în sensul ambelor relaţii (4.15), (4.18), în raport cu variabilele canonice conjugate lor, adică

$$\bar{\pi}^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,i}} = \frac{1}{m}\bar{\psi}_{,k}\gamma^k\gamma^i\ ;\ \pi^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_{,i}} = \frac{1}{m}\gamma^i\gamma^k\psi_{,k}\ . \tag{4.23'}$$

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITARĂ

Luând numai componenta temporală ($i = 4$) şi aplicând încă o dată ecuaţiile Dirac (4.22), obţinem, în sfârşit, forma corectă a impulsurilor canonic conjugate coordonatelor generalizate ψ, $\bar{\psi}$, anume

$$\bar{\pi}^4 = \bar{\psi}\gamma^4 \; ; \; \pi^4 = -\gamma^4\psi \, , \tag{4.24}$$

care trebuie utilizate în relaţiile Jordan-Pauli-Wigner de cuantificare canonică a câmpului Dirac, pentru a păstra analogia cu relaţiile de cuantificare Bohr-Heisenberg de la câmpul scalar complex, bineînţeles, modulo trecerea $[\cdot,\cdot] \to \{\cdot,\cdot\}$. După cum se observă, impulsurile (4.20) sunt exact jumătate din cele normale. Cealaltă jumătate este inclusă în termenii de forţă (4.21). Dacă, în mod naiv, sau pripit, am fi lucrat cu ele în membrul stâng al relaţiilor (4.19.a,b), am fi obţinut relaţii calitativ corecte, la un factor de normare $\mathcal{N} = [E_p + m]^{1/2}$, dar cantitativ eronate cu 50% !

Referitor la densitatea de lagrangeian (4.23), trebuie să subliniem că ea are un caracter formal, fiind doar un artificiu de calcul pentru obţinerea corectă a impulsurilor generalizate (4.24) care, în sensul definiţiilor (4.18), trebuie utilizate în relaţiile de cuantificare (4.19). ecuaţiile Euler-Lagrange corespunzătoare acestei densităţi de lagrangeian sunt, după cum se poate observa imediat, ecuaţiile Gordon

$$\Box\psi - m^2\psi = 0 \; ; \; \Box\bar{\psi} - m^2\bar{\psi} = 0 \, .$$

Or, clasele de soluţii exacte ale acestora sunt de două ori mai largi decât cele ale ecuaţiilor Dirac reciproc adjuncte, în sensul că orice soluţie exactă a ecuaţiei Dirac este o soluţie a ecuaţiei Gordon corespunzătoare, dar nu şi invers. Acest aspect l-am discutat deja chiar la paragraful anterior. Deci studiul dinamicii câmpului Dirac nu poate fi bazat pe lagrangeianul (4.23). Chiar trecerea de la impulsurile (4.23′) la cele date de (4.24) nu ar mai fi fost posibilă fără "angajarea", încă o dată, a ecuaţiilor Dirac (4.22).

Revenind la relaţiile de anticomutare (4.19), să formulăm acum setul algebric esenţial al relaţiilor de cuantificare canonică a câmpului spino-

rial liber. Din dualitatea Dirac ce există între (4.19.b) şi (4.19.a), precum şi între (4.19.d) şi (4.19.c), dacă avem în vedere definiţiile (4.24), bănuim deja că primele (adică (4.19.b), (4.19.d)) nu sunt algebric independente, ci vor rezulta imediat din (4.19.a) şi (4.19.c), dacă acestea sunt satisfăcute. Astfel, înlocuind $\bar{\pi}_a^{\ 4}$ din (4.24) în relaţia de anticomutatori la timpi egali (4.19.a), obţinem

$$\left\{\bar{\pi}_a^{\ 4}(\vec{x}',t)\,,\,\psi^b(\vec{x},t)\right\} = \left\{\bar{\psi}_c(\vec{x}',t)\,(-i\beta^c_{\cdot a})\,,\,\psi^b(\vec{x},t)\right\} = \\ = -i\,\beta^c_{\cdot a}\beta^d_{\cdot c}\left\{\psi_d^\dagger(\vec{x}',t)\,,\,\psi^b(\vec{x},t)\right\},$$

adică

$$\left\{\bar{\pi}_a^{\ 4}(\vec{x}',t)\,,\,\psi^b(\vec{x},t)\right\} = -i\left\{\psi_a^\dagger(\vec{x}',t)\,,\,\psi^b(\vec{x},t)\right\} = -i\,\delta^b_{\cdot a}\,\delta(\vec{x}'-\vec{x})\,,$$

deci

$$\left\{\psi_a^\dagger(\vec{x}',t)\,,\,\psi^b(\vec{x},t)\right\} = \delta^b_a\,\delta(\vec{x}'-\vec{x})\,. \tag{4.25}$$

Explicitând membrul stâng al relaţiei (4.19.b), avem

$$\left\{\pi^{a\,4}(\vec{x}',t)\,,\,\bar{\psi}_b(\vec{x},t)\right\} = \left\{-\,(-i\beta^a_{\cdot c})\,\psi^c(\vec{x}',t)\,,\,\beta^d_{\cdot b}\,\psi_d^\dagger(\vec{x},t)\right\} = \\ = i\,\beta^a_{\cdot c}\beta^d_{\cdot b}\left\{\psi^c(\vec{x}',t)\,\psi_d^\dagger(\vec{x},t)\right\},$$

din care, utilizând (4.25), rezultă într-adevăr

$$\left\{\pi^{a\,4}(\vec{x}',t)\,,\,\bar{\psi}_b(\vec{x},t)\right\} = i\,\beta^a_{\cdot c}\beta^d_{\cdot b}\,\delta^c_d\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}) = i\,\delta^a_b\,\delta(\vec{x}'-\vec{x})\,, \tag{4.26}$$

adică, după cum ne aşteptam, relaţia de anticomutare la timpi egali (4.19.b). Dependenţa algebrică a relaţiilor (4.19.d) de relaţiile (4.19.c) este practic evidentă, folosind din nou (4.24) şi nu are sens să o explicităm. De asemenea, observăm că al doilea comutator din (4.19.c) se scrie

$$\left\{\bar{\psi}_a(\vec{x}',t)\,,\,\bar{\psi}_b(\vec{x},t)\right\} = i\,\beta^c_{\cdot a}\beta^d_{\cdot b}\left\{\psi_c^\dagger(\vec{x}',t)\,,\,\psi_d^\dagger(\vec{x},t)\right\}$$

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

şi se anulează, evident, de îndată ce

$$\left\{\psi_c^\dagger(\vec{x}',t)\,,\,\psi_d^\dagger(\vec{x},t)\right\} = 0\,. \tag{4.27}$$

Prin urmare, setul algebric esenţial al relaţiilor de anticomutare la timpi egali Jordan-Pauli-Wigner are forma concretă

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \left\{\psi_a^\dagger(\vec{x}',t)\,,\,\psi^b(\vec{x},t)\right\} = \delta_a^b\,\delta(\vec{x}'-\vec{x})\\
&\text{b)}\quad \left\{\psi^a(\vec{x}',t)\,,\,\psi^b(\vec{x},t)\right\} = 0\\
&\text{c)}\quad \left\{\psi_a^\dagger(\vec{x}',t)\,,\,\psi_b^\dagger(\vec{x},t)\right\} = 0\,.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

B. Algebra operatorilor Dirac de anihilare-creare

Înlocuind în relaţiile de anticomutare (4.28) expresia (3.38) a operatorului de câmp $\psi(x)$, soluţie generală a ecuaţiei Dirac, precum şi a conjugatului hermitic al acestuia, adică

$$\psi^\dagger(x) = \int d^3p\,\left[b_A(\vec{p})v^{\dagger A}(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) + a_A^\dagger(\vec{p})u^{\dagger A}(\vec{p})\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]\,, \tag{4.29}$$

să deducem, algebra operatorilor Dirac $\left\{a_A(\vec{p}),\, b_A(\vec{p}),\, a_A^\dagger(\vec{p}),\, b_A^\dagger(\vec{p})\right\}_{A=1,2}$.

Vom începe cu relaţia (4.28.a) deoarece, cel puţin la prima vedere, este singura cu un aspect mai puţin trivial. Cu

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \psi_a^\dagger(x) = \int d^3p'\,\left[b_A(\vec{p}')v_a^{\dagger A}(\vec{p}')f_{\vec{p}'}(x') + a_A^\dagger(\vec{p}')u_a^{\dagger A}(\vec{p}')\bar{f}_{\vec{p}'}(x')\right]\\
&\text{b)}\quad \psi^b(x) = \int d^3p\,\left[a_B(\vec{p})u^{Bb}(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) + b_B^\dagger(\vec{p})v^{Bb}(\vec{p})\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right],
\end{aligned} \tag{4.30}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

obţinem (pentru (4.28.a)) expresia

$$\left\{\psi_a^\dagger(x'),\,\psi^b(x)\right\}_{t'=t} =$$
$$= \int d^3p'\,d^3p\,\{b_A(\vec{p}'),\,a_B(\vec{p})\}\,v_a^{\dagger A}(\vec{p}')u^{Bb}(\vec{p})\,[f_{\vec{p}'}(x')f_{\vec{p}}(x)]_{t'=t} +$$
$$+ \int d^3p'\,d^3p\left\{a_A^\dagger(\vec{p}'),\,b_B^\dagger(\vec{p})\right\}u_a^{\dagger A}(\vec{p}')v^{Bb}(\vec{p})\left[\bar{f}_{\vec{p}'}(x')\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]_{t'=t} +$$
$$+ \int d^3p'\,d^3p\left\{a_A^\dagger(\vec{p}'),\,a_B(\vec{p})\right\}u_a^{\dagger A}(\vec{p}')u^{Bb}(\vec{p})\left[\bar{f}_{\vec{p}'}(x')f_{\vec{p}}(x)\right]_{t'=t} +$$
$$+ \int d^3p'\,d^3p\left\{b_A(\vec{p}'),\,b_B^\dagger(\vec{p})\right\}v_a^{\dagger A}(\vec{p}')v^{Bb}(\vec{p})\left[f_{\vec{p}'}(x')\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]_{t'=t}. \tag{4.31}$$

Dacă inspectăm forma concretă a produsului modurilor de frecvenţă, la $t' = t$, din primii doi termeni ai sumei din membrul drept,

$$[f_{\vec{p}'}(x')\,f_{\vec{p}}(x)]_{t'=t} = \frac{(2\pi)^{-3}}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\,e^{i(\vec{p}'\cdot\vec{x}'+\vec{p}\cdot\vec{x})}\,e^{-i(E_{p'}+E_p)t}$$
$$\left[\bar{f}_{\vec{p}'}(x')\,\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]_{t'=t} = \frac{(2\pi)^{-3}}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\,e^{-i(\vec{p}'\cdot\vec{x}'+\vec{p}\cdot\vec{x})}\,e^{i(E_{p'}+E_p)t},$$

observăm că dependenţa temporală a acestora nu poate fi nicidecum eliminată, precum cere (4.19), datorită faptului că $E_{p'}$, E_p sunt întotdeauna pozitive. Ca urmare, cum rezultatul întregului anticomutator trebuie să fie independent de timp, iar matricele (4×4) $u^B(\vec{p})v^{\dagger A}(\vec{p}')$, $v^B(\vec{p})u^{\dagger A}(\vec{p}')$ sunt, în general, în mod evident, diferite de zero, rezultă că singura posibilitate este

$$\left\{a_A^\dagger(\vec{p}'),\,b_B^\dagger(\vec{p})\right\} = 0$$
$$\{b_A(\vec{p}'),\,a_B(\vec{p})\} = 0$$

ca prim set al relaţiilor de anticomutare ce trebuiesc satisfăcute de operatorii $\left\{a_A(\vec{p}),\,b_A(\vec{p}),\,a_A^\dagger(\vec{p}),\,b_A^\dagger(\vec{p})\right\}_{A=1,2}$. Desigur, prin luarea în

considerare a operaţiilor de conjugare hermitică, cele două relaţii nu sunt independente, ci au ca "reprezentant algebric esenţial" relaţia

$$\{a_A(\vec{p}\,'),\, b_B(\vec{p})\} \;=\; 0\,. \tag{4.32}$$

Revenind la ultimii doi termeni ai sumei din dreapta expresiei (4.31), produsele modurilor de frecvenţă implicate se scriu

$$\begin{aligned}\left[\bar{f}_{\vec{p}\,'}(x')\, f_{\vec{p}}(x)\right]_{t'=t} &= \frac{(2\pi)^{-3}}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\, e^{-i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'-\vec{p}\cdot\vec{x})}\, e^{i(E_{p'}-E_p)t}\\ \left[f_{\vec{p}\,'}(x')\, \bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]_{t'=t} &= \frac{(2\pi)^{-3}}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\, e^{i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'-\vec{p}\cdot\vec{x})}\, e^{-i(E_{p'}-E_p)t}\,,\end{aligned} \tag{4.33}$$

astfel încât, în baza cerinţei de independenţă temporală a anticomutatorului (4.28.a), trebuie să avem $E_{p'} = E_p \Rightarrow |\vec{p}\,'| = |\vec{p}|$. Cum, însă, această condiţie este prea largă pentru a obţine (sub fiecare din ultimele două integrale) termenul specific $e^{i\vec{p}\,(\vec{x}\,'-\vec{x})}$ al reprezentării Fourier a distribuţiei $\delta\,(\vec{x}\,' - \vec{x})$, tragem concluzia că avem nevoie de $\vec{p}\,' = \vec{p}$, adică fiecare dintre cei doi anticomutatori trebuie să fie de forma

$$\begin{aligned}\left\{a_A^{\dagger}(\vec{p}\,'),\, a_B(\vec{p})\right\} &= \kappa_+\, \delta_{AB}\, \delta\,(\vec{p}\,' - \vec{p})\,,\\ \left\{b_A(\vec{p}\,'),\, b_B^{\dagger}(\vec{p})\right\} &= \kappa_-\, \delta_{AB}\, \delta\,(\vec{p}\,' - \vec{p})\,,\end{aligned} \tag{4.34}$$

unde, "factorul metric" δ_{AB} a fost inclus pe baza discuţiilor noastre referitoare la "*ansatz*-ul de anticomutare" care a condus la ipoteza (4.12) şi la formulele (4.13), (4.14). Având în vedere toate aceste as-

pecte, relaţia de anticomutare (4.31) devine

$$\left\{\psi_a^\dagger(x'),\,\psi^b(x)\right\}_{t'=t} = \int d^3p'\,d^3p\,\kappa_+\,\delta_{AB}\,u_a^{\dagger A}(\vec{p}\,')u^{Bb}(\vec{p})\,\delta(\vec{p}\,'-\vec{p})\,\frac{(2\pi)^{-3}}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\,e^{-i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'-\vec{p}\cdot\vec{x})}\,e^{i(E_{p'}-E_p)t} + \\ + \int d^3p'\,d^3p\,\kappa_-\,\delta_{AB}\,v_a^{\dagger A}(\vec{p}\,')v^{Bb}(\vec{p})\,\delta(\vec{p}\,'-\vec{p})\,\frac{(2\pi)^{-3}}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\,e^{i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'-\vec{p}\cdot\vec{x})}\,e^{-i(E_{p'}-E_p)t},$$

adică

$$\left\{\psi_a^\dagger(x'),\,\psi^b(x)\right\}_{t'=t} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}\,'-\vec{x})}\,\frac{\kappa_+}{2E_p}\,\delta_{AB}\,u_a^{\dagger A}(\vec{p})u^{Bb}(\vec{p}) + \\ + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}\,'-\vec{x})}\,\frac{\kappa_-}{2E_p}\,\delta_{AB}\,v_a^{\dagger A}(\vec{p})v^{Bb}(\vec{p})$$

şi, trecând pe $\vec{p}$ în $-\vec{p}$ în prima integrală, obţinem expresia

$$\left\{\psi_a^\dagger(x'),\,\psi^b(x)\right\}_{t'=t} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\kappa_+\,\delta_{AB}\,u_a^{\dagger A}(-\vec{p})u^{Bb}(-\vec{p}) + \right. \\ \left. + \kappa_-\,\delta_{AB}\,v_a^{\dagger A}(\vec{p})v^{Bb}(\vec{p})\right]\frac{e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}\,'-\vec{x})}}{2E_p}. \quad (4.35)$$

Dar, $\delta_{AB}\,u_a^{\dagger A}(-\vec{p})u^{Bb}(-\vec{p})$ şi $\delta_{AB}\,v_a^{\dagger A}(\vec{p})v^{Bb}(\vec{p})$ reprezintă elementul de pe linia b şi coloana a a matricelor (4×4) $\delta_{AB}\,u^B(-\vec{p})\;u^{\dagger A}(-\vec{p})$ şi, respectiv, $\delta_{AB}\,v^B(\vec{p})v^{\dagger A}(\vec{p})$. Trecând la reprezentarea matriceală prin blocuri (2×2), utilizând expresiile (3.33) şi (3.53), precum şi relaţia de completitudine $\mathcal{S}_2\otimes\mathcal{S}_2^*$

$$\delta_{AB}\,\xi^A\,\xi^{\dagger B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (4.36)$$

BCU IAŞI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

(evident, ca notaţie), rezultă

$$\delta_{AB}\, u^B(-\vec{p})\, u^{\dagger A}(-\vec{p}) = \delta_{AB} \begin{pmatrix} \xi^B \\ -\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E}\,\xi^B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{\dagger A} & -\xi^{\dagger A}\,\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \end{pmatrix} \mathcal{N}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \\ -\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} & \frac{|\vec{p}|^2}{E^2} \end{pmatrix} \mathcal{N}^2$$

$$\delta_{AB}\, v^B(\vec{p})\, v^{\dagger A}(\vec{p}) = \delta_{AB} \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E}\,\xi^B \\ \xi^B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{\dagger A}\,\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} & \xi^{\dagger A} \end{pmatrix} \mathcal{N}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|^2}{E^2} & \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} & 1 \end{pmatrix} \mathcal{N}^2, \tag{4.37}$$

deci

$$\kappa_+\, \delta_{AB}\, u^B(-\vec{p}) u^{\dagger A}(-\vec{p}) + \kappa_-\, \delta_{AB}\, v^B(\vec{p}) v^{\dagger A}(\vec{p}) =$$

$$= |\mathcal{N}|^2 \begin{pmatrix} \kappa_+ + \frac{|\vec{p}|^2}{E^2}\,\kappa_- & -(\kappa_+ - \kappa_-)\,\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} \\ -(\kappa_+ - \kappa_-)\,\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E} & \kappa_- + \frac{|\vec{p}|^2}{E^2}\,\kappa_+ \end{pmatrix}. \tag{4.38}$$

Cum δ_a^b în (4.28.a) reprezintă matricea unitate (4×4), rezultă că în reprezentarea bloc-matriceală (2×2), dată de (4.38), nu putem avea "elemente" extradiagonale, de tipul $(\kappa_+ - \kappa_-)\,\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E}$, ceea ce conduce la constrângerea

$$\kappa_+ = \kappa_- = \kappa\,, \tag{4.39}$$

astfel încât (4.38) ia forma diagonală explicită

$$\kappa\, \delta_{AB} \left[u^B(-\vec{p}) u^{\dagger A}(-\vec{p}) + v^B(\vec{p}) v^{\dagger A}(\vec{p}) \right] = \kappa\, (2E_p)\, \frac{|\mathcal{N}|^2}{E_p + m} \cdot 1\,, \tag{4.40}$$

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

unde 1 este matricea unitate (4×4). Înlocuind (4.40) în (4.35), obţinem

$$\left\{\psi_a^\dagger(x'),\,\psi^b(x)\right\}_{t'=t} = \kappa\,\delta_a^b \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{|\mathcal{N}|^2}{E_p+m}\,e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} \tag{4.41}$$

şi cum κ este o constantă pură, iar integrala trebuie să fie egală cu $\delta(\vec{x}'-\vec{x})$, rezultă pentru factorul de normare $\mathcal{N}$ aşa-numita *valoare de normare covariantă*,

$$\mathcal{N} = (E_p + m)^{1/2}\,, \tag{4.42}$$

pe care am tot utilizat-o până acum, anunţând că o vom justifica la cuantificarea câmpului Dirac. De asemenea, din (4.41) cu (4.42) şi (4.28.a), adică

$$\left\{\psi_a^\dagger(\vec{x}',t),\,\psi^b(\vec{x},t)\right\} = \kappa\,\delta_a^b\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}) \equiv \delta_a^b\,\delta(\vec{x}'-\vec{x})\,,$$

rezultă

$$\kappa = 1\,, \tag{4.43}$$

deci relaţiile de anticomutatori (4.34) iau forma explicită

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \left\{a_A(\vec{p}'),\,a_B^\dagger(\vec{p})\right\} = \delta_{AB}\,\delta(\vec{p}'-\vec{p}) \\ &\text{b)}\quad \left\{b_A(\vec{p}'),\,b_B^\dagger(\vec{p})\right\} = \delta_{AB}\,\delta(\vec{p}'-\vec{p})\,. \end{aligned} \tag{4.44}$$

După cum se observă, relaţia (4.44.b) exprimă clar trucul de anticomutare (4.12) pe care l-am folosit în subparagraful A., ca pe o soluţie tehnică de moment, la problema energiei şi sarcinii antiparticulei, fără a-i da însă, atunci, vreo altă justificare.

Pentru a doua relaţie de anticomutare la timpi egali, din setul alge-

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

bric esenţial (4.28), deducem pe larg expresia

$$\begin{aligned}
&\left\{\psi^a(x'),\psi^b(x)\right\}_{t'=t} = \\
&= \int d^3p'd^3p\ \{a_A(\vec{p}'),a_B(\vec{p})\}\ u^{Aa}(\vec{p}')u^{Bb}(\vec{p})\ [f_{\vec{p}'}(x')f_{\vec{p}}(x)]_{t'=t} + \\
&+ \int d^3p'd^3p\ \left\{b_A^\dagger(\vec{p}'),b_B^\dagger(\vec{p})\right\}\ v^{Aa}(\vec{p}')v^{Bb}(\vec{p})\ \left[\bar{f}_{\vec{p}'}(x')\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]_{t'=t} + \\
&+ \int d^3p'd^3p\ \left\{a_A(\vec{p}'),b_B^\dagger(\vec{p})\right\}\ u^{Aa}(\vec{p}')v^{Bb}(\vec{p})\ \left[f_{\vec{p}'}(x')\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]_{t'=t} + \\
&+ \int d^3p'd^3p\ \left\{b_A^\dagger(\vec{p}'),a_B(\vec{p})\right\}\ v^{Aa}(\vec{p}')u^{Bb}(\vec{p})\ \left[\bar{f}_{\vec{p}'}(x')f_{\vec{p}}(x)\right]_{t'=t}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

care trebuie să fie identic nulă. În cazul primilor doi termeni (integrali) din dreapta, raţionamentul este acelaşi ca la "omologii" lor din (4.31), bazat pe imposibilitatea eliminării dependenţei temporale a produsului de moduri $[f_{\vec{p}'}(x')f_{\vec{p}}(x)]_{t'=t}$, $\left[\bar{f}_{\vec{p}'}(x')\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]_{t'=t}$. Deci, pentru anulare, rămâne ca singură soluţie satisfacerea relaţiilor de anticomutare

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \{a_A(\vec{p}'),a_B(\vec{p})\} = 0 \\
&\text{b)}\quad \left\{b_A^\dagger(\vec{p}'),b_B^\dagger(\vec{p})\right\} = 0\,.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

În ceea ce priveşte anularea ultimilor doi termeni din (4.45), îndeplinirea relaţiei de anticomutare

$$\left\{a_A(\vec{p}'),b_B^\dagger(\vec{p})\right\} = 0 \tag{4.47}$$

este, desigur, suficientă. Necesitatea decurge din faptul că toţi operatorii $\left\{a_A(\vec{p}),a_A^\dagger(\vec{p}),b_A(\vec{p}),b_A^\dagger(\vec{p})\right\}_{A=1,2}$ sunt (algebric) esenţiali. Cu alte cuvinte, nici unul dintre ei nu poate fi exprimat funcţie de ceilalţi, fără a viola cel puţin una din relaţiile de anticomutare pe care le satisfac.

Aşa, de exemplu, dacă ne fixăm asupra lui $b_B^\dagger(\vec{p})$ şi presupunem că ar fi identic cu $a_B(\vec{p})$, atunci (4.47) ar avea loc fiindcă ar fi chiar (4.46.a), dar (4.46.b) ar da anticomutatorul din (4.32) cu $\delta_{AB}\,\delta(\vec{p}' - \vec{p})$, în loc de 0, ceea ce este, evident, fals. Dacă $b_B^\dagger(\vec{p})$ ar fi hermitic, adică identic cu $b_B(\vec{p})$, atunci (4.47) ar fi adevărată fiindcă (4.32) este adevărată, dar (4.44.b) ar da anticomutatorul din (4.46.b), conjugat hermitic, din nou cu $\delta_{AB}\,\delta(\vec{p}' - \vec{p})$ în loc de 0. În fine, dacă $b_B^\dagger(\vec{p})$ ar fi identic cu $a_B^\dagger(\vec{p})$, atunci (4.47) nu ar mai avea loc, fiindcă anticomutatorul ar fi cel din (4.44.a), dar nici ultimii doi termeni din (4.45) nu s-ar mai anula, după cum se poate constata calculând explicit matricea $\delta_{AB}\left[u^A(\vec{p})\left(v^B(\vec{p})\right)^T + v^B(-\vec{p})\left(u^A(-\vec{p})\right)^T\right]$. Prin urmare, o dată ce restul relaţiilor de anticomutare sunt satisfăcute, anularea anticomutatorului din (4.47) devine şi necesară (nu numai suficientă) pentru îndeplinirea relaţiei Jordan-Pauli-Wigner (4.28.b).

Referitor la (4.28.c), ea decurge imediat din (4.28.b), dat fiind că este conjugata hermitică a acesteia. Aşadar, din (4.46) rezultă, imediat, relaţiile de anticomutare

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \left\{a_A^\dagger(\vec{p}'),\, a_B^\dagger(\vec{p})\right\} = 0 \\ &\text{b)}\quad \left\{b_A(\vec{p}'),\, b_B(\vec{p})\right\} = 0, \end{aligned} \tag{4.48}$$

iar din (4.47), relaţia hermitic conjugată

$$\left\{b_A(\vec{p}'),\, a_B^\dagger(\vec{p})\right\} = 0\,. \tag{4.49}$$

În încheierea acestui paragraf, pentru concizie şi claritate, să "tabelăm" toate relaţiile de anticomutare obţinute şi să spunem câteva cuvinte despre semnificaţia fizică a celor mai importante dintre ele.

RELAŢII "INTERNE"

$$
\begin{array}{ll}
a) \left\{a_A(\vec{p}'), a_B^\dagger(\vec{p})\right\} = \delta_{AB}\,\delta(\vec{p}'-\vec{p}) & a') \left\{b_A(\vec{p}'), b_B^\dagger(\vec{p})\right\} = \delta_{AB}\,\delta(\vec{p}'-\vec{p}) \\
b) \left\{a_A^\dagger(\vec{p}'), a_B^\dagger(\vec{p})\right\} = 0 & b') \left\{b_A^\dagger(\vec{p}'), b_B^\dagger(\vec{p})\right\} = 0 \\
c) \left\{a_A(\vec{p}'), a_B(\vec{p})\right\} = 0 & c') \left\{b_A(\vec{p}'), b_B(\vec{p})\right\} = 0
\end{array}
\tag{4.50}
$$

RELAŢII "MIXTE"

$$
\begin{array}{ll}
d) \left\{a_A^\dagger(\vec{p}'), b_B^\dagger(\vec{p})\right\} = 0 & d') \left\{a_A(\vec{p}'), b_B^\dagger(\vec{p})\right\} = 0 \\
e) \left\{a_A(\vec{p}'), b_B(\vec{p})\right\} = 0 & e') \left\{a_A^\dagger(\vec{p}'), b_B(\vec{p})\right\} = 0
\end{array}
$$

În acord cu teoria dezvoltată în Capitolul II privind semnificaţia operatorilor $\left(c, c^\dagger\right)$, care satisfac relaţiile de anticomutatori

$$
\begin{array}{rcl}
\{c, c^\dagger\} = 1 & & \\
\{c, c\} = 0 & \Leftrightarrow & c^2 = 0 \\
\{c^\dagger, c^\dagger\} = 0 & & (c^\dagger)^2 = 0\,,
\end{array}
$$

de a fi operatori fermionici de anihilare, respectiv creare, operând asupra spaţiului liniar abstract bidimensional cu baza ortonormală $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ (pentru starea de vid, $|0\rangle$, şi de o particulă, $|1\rangle$) după cum urmează

- "sector de anihilare"

$$
\begin{array}{ll}
c|0\rangle = 0 & \langle 0|c^\dagger = 0 \\
c|1\rangle = |0\rangle & \langle 1|c^\dagger = \langle 0|
\end{array}
$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- "sector de creare"

$$c^\dagger|0\rangle = |1\rangle \qquad \langle 0|c = \langle 1|$$
$$c^\dagger|1\rangle = 0 \qquad \langle 1|c = 0$$

rezultă imediat – prin generalizare la grupul relaţiilor "interne" (4.50) şi luarea în considerare a discuţiilor noastre asupra teoriei golurilor şi a introducerii noţiunii de antiparticulă fermionică (de spin 1/2) – următoarea semnificaţie a celor patru operatori Dirac:

$a_A(\vec{p})$: operator de anihilare a particulei de impuls $\vec{p}$ şi stare de spin A

$a_A^\dagger(\vec{p})$ operator de creare a particulei de impuls $\vec{p}$ şi stare de spin A

$b_A(\vec{p})$: operator de anihilare a antiparticulei de impuls $\vec{p}$ şi stare de spin A

$b_A^\dagger(\vec{p})$: operator de creare a antiparticulei de impuls $\vec{p}$ şi stare de spin A

Deşi, la prima vedere, relaţiile "interne" (4.50.b, c, b', c') ar putea părea mai puţin importante decât (4.50.a, a'), în realitate, ele sunt fundamentale, exprimând matematic, în teoria cuantică a câmpului spinorial, principiul lui Pauli.

Într-adevăr, considerând relaţiile (4.50.b, b') cu $A = B$ şi $\vec{p}' = \vec{p}$, deci pentru aceeaşi stare cuantică, avem formulele

$$a_A^\dagger(\vec{p})a_A^\dagger(\vec{p}) \equiv 0$$
$$b_A^\dagger(\vec{p})b_A^\dagger(\vec{p}) \equiv 0 \qquad (4.51)$$

care exprimă, în mod clar, imposibilitatea creării (deci şi a existenţei) a doi fermioni în aceeaşi stare cuantică.

Evident, conjugatele lor hermitice

$$a_A(\vec{p})a_A(\vec{p}) \equiv 0 \; ; \; b_A(\vec{p})b_A(\vec{p}) \equiv 0 \qquad (4.51')$$

exprimă practic acelaşi lucru, dar într-o ordine logică puţin schimbată, şi anume, cu excepţia stării de vid şi a stării de un singur fermion de impuls şi spin dat, toate stările de mai mulţi fermioni cu acelaşi impuls şi spin (evident, e vorba de aceeaşi proiecţie a spinului) sunt complet imposibile, deoarece acţiunea repetată numai de două ori a operatorilor de anihilare respectivi (adică pentru particulă sau antiparticulă) le suprimă total, în loc să reducă cu doi, numărul de fermioni din starea respectivă.

În sfârşit, relaţiile "mixte" (4.50.*d*, *e*, *d'*,*e'*) exprimă matematic "independenţa" actelor fizice de

creare a unei perechi particulă-antiparticulă, (4.50.*d*)
anihilare a unei perechi particulă-antiparticulă, (4.50.*e*)
anihilare a particulei şi creare a antiparticulei, (4.50.*d'*)
creare a particulei şi anihilare a antiparticulei, (4.50.*e'*)

Semnificaţia fizică de operatori *număr de particule*, respectiv *număr de antiparticule*, a operatorilor

$$N_A^{(+)}(\vec{p}) = a_A^\dagger(\vec{p})a_A(\vec{p})$$
$$N_A^{(-)}(\vec{p}) = b_A^\dagger(\vec{p})b_A(\vec{p}) \qquad (4.52)$$

pentru fiecare stare A de spin, va rezulta clar din cele ce urmează.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

C. Spinul, impulsul, hamiltonianul şi sarcina câmpului Dirac cuantificat

Bazându-ne pe expresiile observabilelor câmpului spinorial liber, deduse în cadrul formalismului lagrangeian de primă cuantificare, prezentat în paragraful 2, să explicităm, în acest subparagraf, formele concrete ale operatorilor asociaţi acestora, în formalismul celei de a doua cuantificări.

C1. Spinul

Vom începe cu vector-operatorul de spin (2.61) deoarece, în comparaţie cu câmpul scalar care este lipsit de acest tip de observabilă, fiind invariant la rotaţii, credem că merită să accentuăm, cel puţin sub aspect formativ, orice element nou, orice diferenţă specifică întâlnită până acum. Aşadar, înlocuind operatorii de câmp

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int d^3p \left[a_B(\vec{p})u^B(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) + b_B^\dagger(\vec{p})v^B(\vec{p})\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]\\ \psi^\dagger(x) &= \int d^3p' \left[b_A(\vec{p}')v^{\dagger A}(\vec{p}')f_{\vec{p}'}(x) + a_A^\dagger(\vec{p}')u^{\dagger B}(\vec{p}')\bar{f}_{\vec{p}'}(x)\right]\end{aligned} \tag{4.29'}$$

în expresia (2.61)

$$S_\mu = \frac{1}{2}\int \psi^\dagger(x)\begin{pmatrix}\sigma_\mu & 0\\ 0 & \sigma_\mu\end{pmatrix}\psi(x)\,d^3x$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a operatorului vectorial de spin (total) al câmpului Dirac, obţinem

$$
\begin{aligned}
S_\mu &= \frac{1}{2}\int d^3p'\,d^3p\,d^3x \\
&\quad \left\{\left[b_A(\vec{p}')v^{\dagger A}(\vec{p}')f_{\vec{p}'}(x) + a_A^\dagger(\vec{p}')u^{\dagger B}(\vec{p}')\bar{f}_{\vec{p}'}(x)\right]\right. \\
&\quad \left.\cdot\begin{pmatrix}\sigma_\mu & 0\\ 0 & \sigma_\mu\end{pmatrix}\left[a_B(\vec{p})u^B(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) + b_B^\dagger(\vec{p})v^B(\vec{p})\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\int d^3p'\,d^3p\,d^3x \\
&\quad \left\{b_A(\vec{p}')a_B(\vec{p})v^{\dagger A}(\vec{p}')\begin{pmatrix}\sigma_\mu & 0\\ 0 & \sigma_\mu\end{pmatrix}u^B(\vec{p})\,\frac{(2\pi)^{-3}}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\,e^{i(p'+p)x}\right\} + \\
&+ \frac{1}{2}\int d^3p'\,d^3p\,d^3x \\
&\quad \left\{a_A^\dagger(\vec{p}')b_B^\dagger(\vec{p})u^{\dagger A}(\vec{p}')\begin{pmatrix}\sigma_\mu & 0\\ 0 & \sigma_\mu\end{pmatrix}v^B(\vec{p})\,\frac{(2\pi)^{-3}}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\,e^{-i(p'+p)x}\right\} + \\
&+ \frac{1}{2}\int d^3p'd^3pd^3x \\
&\quad \left\{a_A^\dagger(\vec{p}')a_B(\vec{p})u^{\dagger A}(\vec{p}')\begin{pmatrix}\sigma_\mu & 0\\ 0 & \sigma_\mu\end{pmatrix}u^B(\vec{p})\,\frac{(2\pi)^{-3}}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\,e^{-i(p'-p)x}\right\} + \\
&+ \frac{1}{2}\int d^3p'd^3pd^3x \\
&\quad \left\{b_A(\vec{p}')b_B^\dagger(\vec{p})v^{\dagger A}(\vec{p}')\begin{pmatrix}\sigma_\mu & 0\\ 0 & \sigma_\mu\end{pmatrix}v^B(\vec{p})\,\frac{(2\pi)^{-3}}{2\sqrt{E_{p'}E_p}}\,e^{i(p'-p)x}\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

Utilizând reprezentarea Fourier a distribuţiei δ, în fiecare din cei patru

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

termeni din dreapta, formula devine

$$\begin{aligned}
\vec{S} \;=\; & \int d^3p'd^3p\, b_A(\vec{p}')\, a_B(\vec{p})\, v^{\dagger A}(\vec{p}') \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} u^B(\vec{p}) \\
& \frac{\delta(\vec{p}'+\vec{p})}{4\sqrt{E_{p'}E_p}}\, e^{-i(E_{p'}+E_p)t} + \\
+ & \int d^3p'd^3p\, a^\dagger_A(\vec{p}')\, b^\dagger_B(\vec{p})\, u^{\dagger A}(\vec{p}') \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} v^B(\vec{p}) \\
& \frac{\delta(\vec{p}'+\vec{p})}{4\sqrt{E_{p'}E_p}}\, e^{i(E_{p'}+E_p)t} + \\
+ & \int d^3p'd^3p\, a^\dagger_A(\vec{p}')\, a_B(\vec{p})\, u^{\dagger A}(\vec{p}') \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} u^B(\vec{p}) \\
& \frac{\delta(\vec{p}'-\vec{p})}{4\sqrt{E_{p'}E_p}}\, e^{i(E_{p'}-E_p)t} + \\
+ & \int d^3p'd^3p\, b_A(\vec{p}')\, b^\dagger_B(\vec{p})\, v^{\dagger A}(\vec{p}') \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} v^B(\vec{p}) \\
& \frac{\delta(\vec{p}'-\vec{p})}{4\sqrt{E_{p'}E_p}}\, e^{-i(E_{p'}-E_p)t}\,. \qquad (4.54)
\end{aligned}$$

Datorită proprietăţii de filtraj şi, totodată, grupând convenabil termenii, rezultă

$$\begin{aligned}
S_\mu \;=\; & \int \frac{d^3p}{4E_p} \Big\{ \mathcal{A}_{AB}(-\vec{p},\vec{p})\, \Sigma^{AB}_\mu[v^\dagger, u; -\vec{p},\vec{p}]\, e^{-2iE_pt} + \\
& + C_{AB}(-\vec{p},\vec{p})\, \Sigma^{AB}_\mu[u^\dagger, v; -\vec{p},\vec{p}]\, e^{2iE_pt} \Big\} + \\
+ & \int \frac{d^3p}{4E_p} \Big\{ N^{(+)}_{AB}\, \Sigma^{AB}_\mu[u^\dagger, u; \vec{p},\vec{p}] - \\
& - \left(N^{(-)}_{BA}(\vec{p}) - \delta_{AB}\,\delta(0) \right) \Sigma^{AB}_\mu[v^\dagger, v; \vec{p},\vec{p}] \Big\}\,, \qquad (4.55)
\end{aligned}$$

BCU IASI / CONTRA UNIVERSITY LIBRARY

unde, pentru prescurtarea scrierii, am introdus următoarele notaţii:

$$\text{a)}\quad \mathcal{A}_{AB}(-\vec{p},\vec{p}) = b_A(-\vec{p})a_B(\vec{p})\ ,\ C_{AB}(-\vec{p},\vec{p}) = a_A^{\dagger}(-\vec{p})b_B^{\dagger}(\vec{p})$$

$$\text{b)}\quad N_{AB}^{(+)}(\vec{p}) = a_A^{\dagger}(\vec{p})a_B(\vec{p})\ ,\ N_{BA}^{(-)}(\vec{p}) = b_B^{\dagger}(\vec{p})b_A(\vec{p})$$

$$\text{c)}\quad \Sigma_{\mu}^{AB}[v^{\dagger},u;-\vec{p},\vec{p}] = v^{\dagger A}(-\vec{p})\begin{pmatrix}\sigma_\mu & 0\\ 0 & \sigma_\mu\end{pmatrix}u^B(\vec{p})$$

$$\text{d)}\quad \Sigma_{\mu}^{AB}[u^{\dagger},v;-\vec{p},\vec{p}] = u^{\dagger A}(-\vec{p})\begin{pmatrix}\sigma_\mu & 0\\ 0 & \sigma_\mu\end{pmatrix}v^B(\vec{p})$$

$$\text{e)}\quad \Sigma_{\mu}^{AB}[u^{\dagger},u;\vec{p},\vec{p}] = u^{\dagger A}(\vec{p})\begin{pmatrix}\sigma_\mu & 0\\ 0 & \sigma_\mu\end{pmatrix}u^B(\vec{p})$$

$$\text{f)}\quad \Sigma_{\mu}^{AB}[v^{\dagger},v;\vec{p},\vec{p}] = v^{\dagger A}(\vec{p})\begin{pmatrix}\sigma_\mu & 0\\ 0 & \sigma_\mu\end{pmatrix}v^B(\vec{p}) \qquad (4.56)$$

şi am utilizat, în ultimul termen din (4.54), relaţia de anticomutare (4.50.a').

Ajunşi aici, trebuie să simplificăm puţin lucrurile fiindcă altfel relaţia (4.55) este foarte complicată din punct de vedere algebric şi foarte puţin transparentă din punct de vedere fizic. Cauza complexităţii rezidă în faptul că orice vector 3-dimensional, deci şi cel al spinului, este intim legat de grupul rotaţiilor $SO(3)$ care, însă, este un subgrup neinvariant al grupului Lorentz $SO(3,1)$. Astfel, acţiunea generatorilor de rotaţie "amestecându-se" cu cea a generatorilor de *boost*, vectorul 3-dimensional al spinului se va transforma după o lege destul de complicată sub acţiunea unei transformări generale din $SO(3,1)$. În plus, sub aspect cuantic, spinorii $\{\xi^A\}_{A=1,2}$ ce intervin în bispinorii $\{u^A\ ,\ v^A\}_{A=1,2}$ sunt vectorii proprii ortonormali ai operatorilor $S_3 = \frac{\sigma_3}{2}$, $S^2 = \frac{1}{4}\vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma} = \frac{3}{4}\cdot 1$ şi, de aceea, ei nu vor rămâne invarianţi sub acţiunea operatorilor $\{\frac{1}{2}\sigma_A\}_{A=1,2}$. Acest al doilea aspect face, practic, ca estimarea componentelor $\{S_c\}_{c=1,2}$ ale vector-operatorului de spin, detaliat în (4.55), să fie foarte laborioasă. Prin urmare, pentru a uşura efectuarea calculelor în vederea obţinerii unei formule simple,

direct interpretabilă fizic, vom roti referenţialul (laboratorului) cu axa $0x^3 \equiv 0z$, în direcţia impulsului, adică $\vec{p} = (0, 0, p^3 = p)$, — unde p nu trebuie confundat, de această dată, cu cuadrivectorul impuls p — şi vom estima componenta S_3 a operatorului de spin. În aceste condiţii, utilizând reprezentarea prin blocuri matriceale (2×2), avem succesiv:

$$\text{a)}\quad \Sigma_3^{AB}[v^\dagger, u; -p, p] = \begin{pmatrix} -\xi^{\dagger A}\frac{p\sigma_3}{E} & \xi^{\dagger A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^B \\ \frac{p\sigma_3}{E}\xi^B \end{pmatrix} E$$

$$\text{b)}\quad \Sigma_3^{AB}[u^\dagger, v; -p, p] = \begin{pmatrix} \xi^{\dagger A} & -\xi^{\dagger A}\frac{p\sigma_3}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p\sigma_3}{E}\xi^B \\ \xi^B \end{pmatrix} E$$

$$\text{c)}\quad \Sigma_3^{AB}[u^\dagger, u; p, p] = \begin{pmatrix} \xi^{\dagger A} & \xi^{\dagger A}\frac{p\sigma_3}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^B \\ \frac{p\sigma_3}{E}\xi^B \end{pmatrix} E$$

$$\text{d)}\quad \Sigma_3^{AB}[v^\dagger, v; p, p] = \begin{pmatrix} \xi^{\dagger A}\frac{p\sigma_3}{E} & \xi^{\dagger A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p\sigma_3}{E}\xi^B \\ \xi^B \end{pmatrix} E \qquad (4.57)$$

unde am ţinut seama, de asemenea, de valoarea

$$|\mathcal{N}|^2 = E_p + m = E$$

corespunzătoare "normării covariante". Rezultatul primelor două relaţii (4.57) este deosebit de simplu

$$\text{a)}\quad \Sigma_3^{AB}[v^\dagger, u; -p, p] = -p\left(\xi^{\dagger A}\xi^B - \xi^{\dagger A}\xi^B\right) \equiv 0$$

$$\text{b)}\quad \Sigma_3^{AB}[u^\dagger, v; -p, p] = +p\left(\xi^{\dagger A}\xi^B - \xi^{\dagger A}\xi^B\right) \equiv 0 \qquad (4.58)$$

ceea ce face ca întregul prim termen din dreapta relaţiei (4.55) să se anuleze identic, pentru $\mu = 3$ şi $\vec{p} = (0, 0, p^3 = p)$, obţinând astfel expresia

$$S_3 = \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{2E_p}\left\{N_{AB}^{(+)}(\vec{p})\Sigma_3^{AB}[u^\dagger, u; p, p] - N_{BA}^{(-)}(\vec{p})\Sigma_3^{AB}[v^\dagger, v; p, p]\right\} + S_3[0], \qquad (4.59)$$

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITARĂ

unde prin ultimul termen înţelegem partea "ultra"-singulară

$$S_3[0] = \frac{1}{2}\left\{\int \frac{d^3p}{2E_p}\,\delta_{AB}\,\Sigma_3^{AB}[v^\dagger, v; p, p]\right\}\cdot\,\delta(\vec{0}) \qquad (4.60)$$

a proiecţiei vectorului de spin, denumită adesea şi *spinul de zero al câmpului.* Fiind o mărime matematic extrem de dubioasă, o lăsăm deocamdată deoparte, promiţând că vom reveni asupra ei şi a mărimilor de acelaşi tip (matematic), întâlnite în calculul impulsului, hamiltonianului şi a sarcinii, la sfârşitul acestui subparagraf, într-o discuţie de principiu referitoare la tehnicile standard şi motivaţiile lor, pe care le aplică şi, respectiv, le invocă fizicienii (şi în special teoreticienii), pentru a "curăţa" teoria de astfel de infiniţi. Întorcându-ne la expresiile (4.57.c, d), obţinem imediat

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \Sigma_3^{AB}[u^\dagger, u; p, p] = 2\,E_p\,\xi^{\dagger A}\,\sigma_3\,\xi^B \\ &\text{b)}\quad \Sigma_3^{AB}[v^\dagger, v; p, p] = 2\,E_p\,\xi^{\dagger A}\,\sigma_3\,\xi^B \end{aligned} \qquad (4.61)$$

şi cum

$$\xi^{\dagger A}\,\sigma_3\,\xi^B = \begin{pmatrix} \delta_1^A & \delta_2^A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_1^B \\ \delta_2^B \end{pmatrix} = \delta_1^A\delta_1^B - \delta_2^A\delta_2^B = \eta^{AB}\,, \qquad (4.62)$$

unde $\left(\eta^{AB}\right) = \mathrm{diag}\,[1, -1]$, elementele (4.61.a, b) devin

$$\Sigma_3^{AB}[u^\dagger, u; p, p] = \Sigma_3^{AB}[v^\dagger, v; p, p] = 2\,E_p\,\eta^{AB}\,. \qquad (4.63)$$

Cu acestea, partea regulată a componentei (4.59) a vector-operatorului de spin al câmpului Dirac ia forma "compactă"

$$S_3 = \frac{1}{2}\int \eta^{AB}\left[N_{AB}^{(+)}(\vec{p}) - N_{AB}^{(-)}(\vec{p})\right] d^3p\,, \qquad (4.64)$$

unde, referitor la indicii B, A ai lui $N^{(-)}(\vec{p})$ din (4.59), aceştia au putut fi interschimbaţi, dat fiind că η^{AB} este trivial simetric. Prin efectuarea

sumărilor după A şi B, în (4.64), rezultă expresia deosebit de sugestivă fizic

$$S_3 = \frac{1}{2}\int d^3p \left[N_1^{(+)}(\vec{p}) - N_2^{(+)}(\vec{p}) - N_1^{(-)}(\vec{p}) + N_2^{(-)}(\vec{p})\right], \quad (4.65)$$

din care se vede că particula şi antiparticula au fiecare, în valoare absolută, proiecţia spinului egală cu 1/2 şi, în plus, următoarea interpretare fizică la nivelul celei de a doua cuantificări :

(4.66)

$N_1^{(+)}(\vec{p}) = a_1^\dagger(\vec{p})a_1(\vec{p})$ este operatorul număr de particule în starea de spin *up*

$N_2^{(+)}(\vec{p}) = a_2^\dagger(\vec{p})a_2(\vec{p})$ este operatorul număr de particule în starea de spin *down*

$N_1^{(-)}(\vec{p}) = b_1^\dagger(\vec{p})b_1(\vec{p})$ este operatorul număr de antiparticule în starea de spin *down*

$N_2^{(-)}(\vec{p}) = b_2^\dagger(\vec{p})b_2(\vec{p})$ este operatorul număr de antiparticule în starea de spin *up*.

Atenţie, deci, că pentru aceeaşi valoare a indicelui "A", de caracterizare a stării de spin, particula şi antiparticula au spini opuşi.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

C2. Operatorul impuls

Pentru a determina 3-vector-operatorul impuls total al câmpului spinorial liber, vom înlocui operatorii de câmp (4.29′) în expresia "de primă cuantificare" (2.36) a componentelor observabilei impuls. Avem, astfel,

$$\begin{aligned} P_\mu &= -i\int \psi^\dagger(x)\psi_{,\mu}(x)\,d^3x = \\ &= -i\int d^3p'd^3p d^3x\Big\{[b_A(\vec{p}')v^{\dagger A}(\vec{p}')f_{\vec{p}'}(x) + a_A^\dagger(\vec{p}')u^{\dagger A}(\vec{p}')\bar{f}_{\vec{p}'}(x)] \\ &\qquad [a_B(\vec{p})u^B(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) + b_B^\dagger(\vec{p})v^B(\vec{p})\bar{f}_{\vec{p}}(x)]_{,\mu}\Big\}\,. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Utilizând proprietatea (3.10), pentru $i=\mu$, a modurilor $f_{\vec{p}}(x)$ şi $\bar{f}_{\vec{p}}(x)$, expresia (4.67) devine

$$\begin{aligned} P_\mu &= \int d^3p'd^3p\Big\{p_\mu b_A(\vec{p}')a_B(\vec{p})v^{\dagger A}(\vec{p}')u^B(\vec{p})\Big[\int d^3x\, f_{\vec{p}'}(x)f_{\vec{p}}(x)\Big]\Big\} - \\ &- \int d^3p'd^3p\Big\{p_\mu a_A^\dagger(\vec{p}')b_B^\dagger(\vec{p})u^{\dagger A}(\vec{p}')v^B(\vec{p})\Big[\int d^3x\,\bar{f}_{\vec{p}'}(x)\bar{f}_{\vec{p}}(x)\Big]\Big\} + \\ &+ \int d^3p'd^3p\Big\{p_\mu a_A^\dagger(\vec{p}')a_B(\vec{p})u^{\dagger A}(\vec{p}')u^B(\vec{p})\Big[\int d^3x\,\bar{f}_{\vec{p}'}(x)f_{\vec{p}}(x)\Big]\Big\} - \\ &- \int d^3p'd^3p\Big\{p_\mu b_A(\vec{p}')b_B^\dagger(\vec{p})v^{\dagger A}(\vec{p}')v^B(\vec{p})\Big[\int d^3x\, f_{\vec{p}'}(x)\bar{f}_{\vec{p}}(x)\Big]\Big\}\,. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Integralele după x ale produsului modurilor de frecvenţă se calculează

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

imediat, dacă avem în vedere expresiile concrete (3.7). Rezultă

$$\begin{aligned}
\int d^3x f_{\vec{p}'}(x) f_{\vec{p}}(x) &= \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{p}'+\vec{p})\cdot\vec{x}} \frac{e^{-i(E_{p'}+E_p)t}}{2\sqrt{E_{p'}E_p}} = \\
&= \frac{\delta(\vec{p}'+\vec{p})}{2\sqrt{E_{p'}E_p}} e^{-i(E_{p'}+E_p)t} \\
\int d^3x \bar{f}_{\vec{p}'}(x) \bar{f}_{\vec{p}}(x) &= \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{p}'+\vec{p})\cdot\vec{x}} \frac{e^{i(E_{p'}+E_p)t}}{2\sqrt{E_{p'}E_p}} = \\
&= \frac{\delta(\vec{p}'+\vec{p})}{2\sqrt{E_{p'}E_p}} e^{i(E_{p'}+E_p)t} \\
\int d^3x \bar{f}_{\vec{p}'}(x) f_{\vec{p}}(x) &= \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{p}'-\vec{p})\cdot\vec{x}} \frac{e^{i(E_{p'}-E_p)t}}{2\sqrt{E_{p'}E_p}} = \\
&= \frac{\delta(\vec{p}'-\vec{p})}{2\sqrt{E_{p'}E_p}} e^{i(E_{p'}-E_p)t} \\
\int d^3x f_{\vec{p}'}(x) \bar{f}_{\vec{p}}(x) &= \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{p}'-\vec{p})\cdot\vec{x}} \frac{e^{-i(E_{p'}-E_p)t}}{2\sqrt{E_{p'}E_p}} = \\
&= \frac{\delta(\vec{p}'-\vec{p})}{2\sqrt{E_{p'}E_p}} e^{-i(E_{p'}-E_p)t}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

adică, pe scurt,

$$\text{a)} \quad \int d^3x f_{\vec{p}'}(x) f_{\vec{p}}(x) = \left[\int d^3x \bar{f}_{\vec{p}'}(x) \bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]^* = \frac{\delta(\vec{p}'+\vec{p})}{2E_p} e^{-2iE_pt}$$

$$\text{b)} \quad \int d^3x \bar{f}_{\vec{p}'}(x) f_{\vec{p}}(x) = \left[\int d^3x f_{\vec{p}'}(x) \bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]^* = \frac{\delta(\vec{p}'-\vec{p})}{2E_p}. \tag{4.70}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cu acestea, introducând şi notaţiile (4.56.a, b), expresia (4.68) ia forma

$$P_\mu = \int \frac{d^3p}{2E_p}\, p_\mu \Big\{ \mathcal{A}_{AB}(-\vec{p},\vec{p})\, v^{\dagger A}(-\vec{p})\, u^B(\vec{p})\, e^{-2iE_p t} - \\ - C_{AB}(-\vec{p},\vec{p})\, u^{\dagger A}(-\vec{p})\, v^B(\vec{p})\, e^{2iE_p t} \Big\} + \\ + \int \frac{d^3p}{2E_p}\, p_\mu \Big\{ N^{(+)}_{AB}(\vec{p})\, u^{\dagger A}(\vec{p})\, u^B(\vec{p}) + \\ + \left[N^{(-)}_{BA}(\vec{p}) - \delta_{AB}\,\delta(0) \right] v^{\dagger A}(\vec{p})\, v^B(\vec{p}) \Big\} \qquad (4.71)$$

în care, după utilizarea proprietăţii de filtraj a distribuţiilor după impulsuri, am aplicat din nou relaţia (4.50.a'). Apelând la proprietăţile de ortogonalitate (3.37) ale bispinorilor $u^A(\pm\vec{p})$, $v^A(\mp\vec{p})$, cu $A = 1,2$, prima integrală din (4.71) se anulează în virtutea relaţiilor (3.37.c), iar sub cea de a doua integrală, aplicând (3.37.a, b), vom avea termenii

$$\begin{aligned} N^{(+)}_{AB}(\vec{p})\, u^{\dagger A}(\vec{p})\, u^B(\vec{p}) &= 2E_p\, \delta^{AB} N^{(+)}_{AB}(\vec{p}) \\ N^{(-)}_{BA}(\vec{p})\, v^{\dagger A}(\vec{p})\, v^B(\vec{p}) &= 2E_p\, \delta^{AB} N^{(-)}_{AB}(\vec{p}) \\ \delta_{AB}\, v^{\dagger A}(\vec{p})\, v^B(\vec{p}) &= 4E_p \end{aligned} \qquad (4.71')$$

care aduc expresia (4.71) a vector-operatorului impuls la forma "compactă"

$$P_\mu = \int d^3p \left\{ p_\mu \left[\delta^{AB} N^{(+)}_{AB}(\vec{p}) + \delta^{AB} N^{(-)}_{AB}(\vec{p}) \right] \right\} + P_\mu[0], \qquad (4.72)$$

unde partea "ultra"-singulară

$$P_\mu[0] = -2\,\delta(\vec{0}) \int p_\mu\, d^3p \qquad (4.73)$$

reprezintă *impulsul de zero* al câmpului spinorial liber. Luând numai "partea regulată" şi explicitând sumările implicate, obţinem expresia operatorului impuls total al câmpului Dirac,

$$P_\mu = \int p_\mu \left[N^{(+)}_1(\vec{p}) + N^{(+)}_2(\vec{p}) + N^{(-)}_1(\vec{p}) + N^{(-)}_2(\vec{p}) \right] d^3p, \qquad (4.74)$$

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

din care se vede că particulele şi antiparticulele, descrise respectiv prin *operatorii de număr* $\left\{N_A^{(\pm)}(\vec{p})\right\}_{A=1,2}$, contribuie la fel la operatorul vectorial al impulsului total, indiferent de starea de spin *up* sau *down* în care se află.

C3. Hamiltonianul

Să trecem acum la stabilirea expresiei hamiltonianului total al câmpului Dirac în formalismul celei de a doua cuantificări. Din (4.29′) şi expresia de primă cuantificare (2.38), avem

$$\begin{aligned} H &= \frac{i}{2}\int d^3p'\,d^3p\,d^3x \\ &\left\{\left[b_A(\vec{p}')v^{\dagger A}(\vec{p}')f_{\vec{p}'}(x)+a_A^{\dagger}(\vec{p}')u^{\dagger A}(\vec{p}')\bar{f}_{\vec{p}'}(x)\right]\right. \\ &\left[a_B(\vec{p})u^B(\vec{p})f_{\vec{p},4}(x)+b_B^{\dagger}(\vec{p})v^B(\vec{p})\bar{f}_{\vec{p},4}(x)\right]- \\ &-\left[b_A(\vec{p}')v^{\dagger A}(\vec{p}')f_{\vec{p}',4}(x)+a_A^{\dagger}(\vec{p}')u^{\dagger A}(\vec{p}')\bar{f}_{\vec{p}',4}(x)\right] \\ &\left.\left[a_B(\vec{p})u^B(\vec{p})f_{\vec{p}}(x)+b_B^{\dagger}(\vec{p})v^B(\vec{p})\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.75}$$

adică, utilizând (3.10) cu $i=4$,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\int d^3p'\,d^3p\,d^3x \\ &\left\{E_p\left[b_A(\vec{p}')v^{\dagger A}(\vec{p}')f_{\vec{p}'}(x)+a_A^{\dagger}(\vec{p}')u^{\dagger A}(\vec{p}')\bar{f}_{\vec{p}'}(x)\right]\right. \\ &\left[a_B(\vec{p})u^B(\vec{p})f_{\vec{p}}(x)-b_B^{\dagger}(\vec{p})v^B(\vec{p})\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]- \\ &-E_{p'}\left[b_A(\vec{p}')v^{\dagger A}(\vec{p}')f_{\vec{p}'}(x)-a_A^{\dagger}(\vec{p}')u^{\dagger A}(\vec{p}')\bar{f}_{\vec{p}'}(x)\right] \\ &\left.\left[a_B(\vec{p})u^B(\vec{p})f_{\vec{p}}(x)+b_B^{\dagger}(\vec{p})v^B(\vec{p})\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]\right\} \end{aligned}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi grupând după produsele de operatori ba, $a^\dagger b^\dagger$ şi $a^\dagger a$, $bb^\dagger$, obţinem formula mai clară

$$
\begin{aligned}
H \;=\; & \frac{1}{2}\int d^3p'\, d^3p \\
& \Big\{(E_p - E_{p'})\, b_A(\vec{p}')a_B(\vec{p})v^{\dagger A}(\vec{p}')u^B(\vec{p}) \int d^3x\, [f_{\vec{p}'}(x) f_{\vec{p}}(x)] - \\
& - (E_p - E_{p'})\, a_B^\dagger(\vec{p}')b_B^\dagger(\vec{p})u^{\dagger A}(\vec{p}')v^B(\vec{p}) \int d^3x \left[\bar{f}_{\vec{p}'}(x)\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]\Big\} + \\
+ \; & \frac{1}{2}\int d^3p'\, d^3p \\
& \Big\{(E_p + E_{p'})\, a_A^\dagger(\vec{p}')a_B(\vec{p})u^{\dagger A}(\vec{p}')u^B(\vec{p}) \int d^3x \left[\bar{f}_{\vec{p}'}(x) f_{\vec{p}}(x)\right] - \\
& - (E_p + E_{p'})\, b_A(\vec{p}')b_B^\dagger(\vec{p})v^{\dagger A}(\vec{p}')v^B(\vec{p}) \int d^3x \left[f_{\vec{p}'}(x)\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]\Big\}\,.
\end{aligned}
\tag{4.76}
$$

Pentru estimarea contribuţiei primei integrale, nu este nevoie să mai facem nici un fel de calcule detaliate deoarece, din (4.70.a), integralele volumice (după $\vec{x}$) dau un $\delta(\vec{p}' + \vec{p})$ care, prin proprietatea de filtraj la integrarea după $\vec{p}'$, conduce la $E_{p'} = E_p$, astfel încât întreaga primă integrală din (4.76) este zero. Aplicând şi (4.70.b), rămânem cu expresia

$$
\begin{aligned}
H \;=\; & \frac{1}{2}\int d^3p' d^3p \\
& \frac{E_{p'} + E_p}{2E_p}\,\delta(\vec{p}' - \vec{p}) \Big[N_{AB}^{(+)}(\vec{p}', \vec{p})u^{\dagger A}(\vec{p}')u^B(\vec{p}) + \\
& + \left(N_{BA}^{(-)}(\vec{p}', \vec{p}) - \delta_{AB}\,\delta(\vec{p}' - \vec{p})\right) v^{\dagger A}(\vec{p}')v^B(\vec{p})\Big]
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

adică, după filtrarea lui $\vec{p}'$ şi utilizarea rezultatelor (4.71′), găsim forma finală

$$
H = \int d^3p \left\{E_p \left[\delta^{AB} N_{AB}^{(+)}(\vec{p}) + \delta^{AB} N_{AB}^{(-)}(\vec{p})\right]\right\} + H[0]\,, \tag{4.78}
$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cu

$$H[0] = -2\delta(\vec{0}) \int E_p d^3p \tag{4.79}$$

drept *energie de zero* a câmpului spinorial liber. Extrăgând din nou doar "partea regulată" din (4.78) şi efectuând sumările de rigoare, obţinem expresia detaliată a operatorului hamiltonian al câmpului Dirac în formalismul celei de a doua cuantificări

$$H = \int E_p \left[N_1^{(+)}(\vec{p}) + N_2^{(+)}(\vec{p}) + N_1^{(-)}(\vec{p}) + N_2^{(-)}(\vec{p}) \right] d^3p \,. \tag{4.80}$$

După cum se observă, valorile proprii ale energiei sunt totdeauna pozitiv definite, adică, prin cuantificarea câmpului, are loc eliminarea completă a "particulelor-măgar" şi, la fel ca în cazul impulsului, contribuţia particulelor şi a antiparticulelor la energia totală a câmpului cuantificat este independentă de starea de spin (*up-down*) a acestora.

C4. Sarcina

În fine, am ajuns şi la a patra observabilă fundamentală a câmpului Dirac cuantificat, şi anume, operatorul de sarcină (electrică) totală a acestuia. Aici, calculele vor merge foarte repede, deoarece avem absolut toate elementele necesare şi, în plus, forma (2.66) de definire a acestei observabile la nivelul primei cuantificări este, din punct de vedere tehnic, deosebit de simplă. Utilizând (4.29′), obţinem de la bun început

$$Q = e \int d^3p' d^3p d^3x \left[b_A(\vec{p}') v^{\dagger A}(\vec{p}') f_{\vec{p}'}(x) + a_A^{\dagger}(\vec{p}') u^{\dagger A}(\vec{p}') \bar{f}_{\vec{p}'}(x) \right] \left[a_B(\vec{p}) u^B(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x) + b_B^{\dagger}(\vec{p}) v^B(\vec{p}) \bar{f}_{\vec{p}}(x) \right], \tag{4.81}$$

adică, efectuând produsele, apelând la (4.70) şi filtrând impulsurile $\vec{p}'$,

rezultă

$$Q = e\int \frac{d^3p}{2E_p}\left\{\mathcal{A}_{AB}(-\vec{p},\vec{p})\,v^{\dagger A}(-\vec{p})\,u^B(\vec{p})\,e^{-2iE_pt} + \right.$$
$$\left. + \mathcal{C}_{AB}(-\vec{p},\vec{p})\,u^{\dagger A}(-\vec{p})\,v^B(\vec{p})\,e^{2iE_pt}\right\} +$$
$$+ e\int \frac{d^3p}{2E_p}\left\{N^{(+)}_{AB}(\vec{p})\,u^{\dagger A}(\vec{p})\,u^B(\vec{p}) - \right.$$
$$\left. - \left[N^{(-)}_{BA}(\vec{p}) - \delta_{AB}\,\delta(0)\right]v^{\dagger A}(\vec{p})\,v^B(\vec{p})\right\} \tag{4.81'}$$

care, după aplicarea proprietăţilor de ortogonalitate (3.37), ia forma specifică

$$Q = e\int d^3p\left[\delta^{AB}N^{(+)}_{AB}(\vec{p}) - \delta^{AB}N^{(-)}_{AB}(\vec{p})\right] + Q[0]\,, \tag{4.82}$$

în care partea "ultra"-singulară

$$Q[0] = 2e\,\delta(\vec{0})\int d^3p \tag{4.83}$$

reprezintă, după cum ne-am obişnuit de-acum, *sarcina de zero* a câmpului Dirac. Explicitând sumările din "partea regulată" a expresiei (4.82), obţinem forma concretă, direct interpretabilă fizic, a operatorului de sarcină a câmpului spinorial

$$Q = \int e\left[N^{(+)}_1(\vec{p}) + N^{(+)}_2(\vec{p}) - N^{(-)}_1(\vec{p}) - N^{(-)}_2(\vec{p})\right]d^3p\,. \tag{4.84}$$

Este clar că "particulele-măgar", care aveau aceeaşi sarcină cu cea a particulelor reale, au fost complet eliminate de a doua cuantificare, iar antiparticulele, reprezentate de operatorii de număr $\{N^{(-)}_A(\vec{p})\}_{A=1,2}$, au (fiecare) sarcina elementară $-e$, algebric conjugată sarcinii $+e$ a particulelor descrise prin operatorii număr $\{N^{(+)}_A(\vec{p})\}_{A=1,2}$. Evident, sarcina electrică a fiecărei particule sau antiparticule este independentă de starea de spin a acesteia.

C5. Mărimile "de zero"

A sosit momentul să ne respectăm promisiunea referitoare la discutarea şi soluţionarea problemelor ridicate de caracterul "ultra"-singular al mărimilor "de zero". Înainte de a ataca obiectivul informaţional al subiectului, dorim să subliniem, de la bun început, două aspecte. Primul, privind strategia de îndeplinire a obiectivului formaţional, este acela că, având în vedere gradul de accesibilitate pe care ne-am propus să-l atingem în prezentul tratat, vom menţine expunerea la nivel elementar. Al doilea, cu caracter informativ şi privind mai ales rigurozitatea operării cu mărimi infinite într-un formalism ce trebuie să ofere rezultate finite, este acela că, din cel mai strict punct de vedere matematic, întreaga Teorie Cuantică a Câmpului este afectată (iremediabil, ar spune matematicienii) de clase întregi de mărimi puternic divergente (mărimi "de zero", divergenţe "infraroşii", divergenţe "ultraviolete" etc.). Deci, sub aspect matematic, în mod cu totul principial, teoria nu este absolut riguroasă. Însuşi Dirac, primul teoretician care a cuantificat un câmp fizic (cel electromagnetic, în 1928), obişnuia să susţină deschis, în mod oficial, necesitatea elaborării unei noi teorii a câmpurilor care nu numai să beneficieze de cuceririle şi succesele actualei teorii de cuantificare canonică, dar să şi posede, la cea mai înaltă cotă a exigenţei matematice, o deplină rigurozitate în bazele, principiile şi, mai ales, formalismul ei. Din punct de vedere tehnic, este clar că noua teorie ar trebui să fie, chiar din primele ei faze, complet liberă de divergenţe. Din păcate, nici la ora actuală şi nici într-un viitor apropiat, după câte se pare, nu vom avea o astfel de teorie. Motivele, sau cauzele, sunt multiple şi uneori chiar prea complicate pentru a fi prezentate în numai câteva rânduri. Ca stare de lucruri, vom aminti totuşi următoarele :

- Chiar Teoria Relativităţii Generale, care este o teorie clasică a câmpului gravitaţional cuplat la sursele sale materiale, se confruntă cu puncte singulare şi singularităţi spaţio-temporale. Cum

încă nu există nici măcar o teorie de cuantificare canonică a câmpului gravitaţional intens (deci nu în aproximaţie liniară), nimeni nu ştie ce şi cum să înţeleagă cu adevărat aceste anomalii deosebit de grave ale structurii fundamentale a lumii în care trăim, anume cea spaţio-temporală. Ce să mai spunem atunci de o teorie de cuantificare absolut riguroasă principial, din punct de vedere matematic, a câmpului gravitaţional.

- Relativ recent, adică pe la jumătatea deceniului trecut şi chiar foarte recent, acum câţiva ani, Ashtekar şi Smolin au dezvoltat [2] o teorie de cuantificare neperturbativă a câmpului gravitaţional, care pare să se apropie cel mai mult de teoria-deziderat menţionată de Dirac. Problema este că, din punct de vedere tehnic, teoria conţine un sistem complicat de ecuaţii "suplimentare", numite *constrângeri de integro-cuantificare*, ale căror soluţii, în formă explicită, sunt complet necunoscute la ora actuală. Cu ingeniozitatea şi genialitatea sa, Smolin a reuşit să găsească o soluţie generală formală, bazată pe aşa-numita *reprezentare integrală de buclă*, dar calculul concret al unei astfel de integrale, pentru câmpuri gravitaţionale generale (adică, simplist vorbind, de simetrie şi intensitate arbitrare), rămâne încă un mister. Cu alte cuvinte, teoria "visată" de Dirac este posibil a fi elaborată, dar cu siguranţă va poseda un formalism care transcede nu numai realitatea, dar şi "închipuirile" matematicienilor de azi.

- Nici una din teoriile actuale de cuantificare a câmpurilor fizice, fie ele supersimetrice sau chiar de tip superstring (cea mai bună teorie contemporană), nu poate fi utilizată fără aplicarea aşa-numitelor *tehnici de renormare*. După cum le este şi numele, acestea sunt metode eminamente tehnice, deocamdată insuficient justificate din cel mai strict punct de vedere matematic, de identificare a divergenţelor teoriei, de stabilire a tipului lor şi de extragere, în consecinţă, a părţilor finite ale acestora, care trebuie

să fie direct interpretate fizic, deci să coincidă cu datele experimentale şi observaţionale cunoscute în domeniul de aplicabilitate a teoriei.

După aceste note aparent pesimiste, legate de imposibilitatea eliminării *ab initio* a mărimilor divergente din cadrul actualei formulări a teoriei celei de a doua cuantificări, trebuie subliniată şi o notă optimistă, de fapt cea mai importantă pentru un fizician, şi anume că tehnicile de renormare, în sine, sunt corect şi riguros fundamentate fizico-matematic. Justificarea acestei afirmaţii depăşeşte cu mult nivelul şi cadrul prezentei discuţii. Cititorul nerăbdător, cu adevărat interesat de aceste probleme chiar în momentul de faţă, poate consulta o serie întreagă de lucrări de înaltă specialitate, am putea spune "consacrate", dedicate integral, sau aproape în totalitate, teoriei renormării câmpurilor fizice cuantificate [5, 27]. Ceea ce trebuie să reţinem deocamdată este faptul că extragerea unei părţi finite dintr-un rezultat teoretic infinit nu se face oricum, adică arbitrar sau "după preferinţe", ci trebuie îndeplinite criterii severe de conservare a covarianţei în raport cu produsul semidirect al grupului Lorentz cu grupul *gauge* al simetriilor interne ale teoriei, de conservare a unitarităţii operatorului de evoluţie construit cu hamiltonianul total al modelului studiat, de respectare a micro-, sau cel puţin a macrocauzalităţii evenimentelor şi, bineînţeles, cel mai important criteriu, atât sub aspect principial, cât şi practic, acela de stabilitate (independenţă) a valorii părţii finite faţă de schimbarea tehnicilor de renormare, presupunând că fiecare dintre acestea satisface celelalte criterii mai sus menţionate. Pe scurt, acest ultim criteriu este cunoscut în literatura de specialitate sub numele de invarianţă la acţiunea grupului de renormare şi reprezintă, cu adevărat, centrul motor al metodei generale de renormalizare.

Desigur, pentru tratarea *mărimilor de zero* ale câmpului spinorial liber şi eliminarea părţilor esenţial divergente ale acestora, nu avem nevoie de întreaga teorie a renormării. Aceasta este cu mult prea puternică şi rafinată tehnic pentru a fi angajată doar în acest scop. Două

procedee (tehnice) ale ei sunt cu totul suficiente pentru soluţionarea problemei divergenţelor asociate mărimilor de zero. Acestea sunt *regularizarea* şi *substragerea*. În loc să le definim abstract, în toată generalitatea lor şi să ajungem în situaţia de a nu mai vedea copacii din cauza pădurii, preferăm să le exemplificăm concret, "să le vedem la lucru" cum s-ar spune, în cazul fiecăreia din cele patru mărimi "ultra"-singulare pe care le-am obţinut.

Astfel, înlocuind rezultatul (4.63) în expresia (4.60) a *spinului de zero*, obţinem

$$S_3[0] = \frac{1}{2}\left(\delta_{AB}\eta^{AB}\right)\delta(\vec{0})\int d^3p\,. \tag{4.85}$$

Pentru moment, făcând abstracţie de faptul că

$$\delta_{AB}\eta^{AB} = 1 - 1 \equiv 0\,, \tag{4.86}$$

să lămurim, mai întâi, de ce se spune despre mărimea (4.85) că este "ultra"-singulară. Răspunsul este simplu: deoarece nu numai că $\delta(\vec{0})$ este "deja" infinită, dar se mai află şi în produs cu o altă divergenţă (de tip polinomial). Prin urmare, revenind acuma la (4.86), este clar că, luată *ad litteram*, expresia (4.85) este de tipul "$0\cdot\infty$", dar, ce este mai rău, ca să spunem aşa, este un "$0\cdot\infty$"−special, dat fiind caracterul ultradivergent al produsului $\delta(\vec{0})\cdot\int d^3p$. Cu un asemenea limbaj, aici, am supărat cu siguranţă cel puţin câţiva matematicieni, dar ce dorim este să justificăm, la un nivel cât mai intuitiv, necesitatea regularizării pentru a putea interpreta şi manipula rezultate atât de "dubioase". În acest sens, să reprezentăm $\delta(\vec{0})$ sub forma[2]

$$\delta(\vec{0}) = \int\frac{d^3x}{(2\pi)^3} = \int_0^\infty \frac{4\pi r^2}{8\pi^3}\,dr = \int_0^\infty d\frac{r^3}{6\pi^2}\,,$$

adică

$$\delta(\vec{0}) = \int_0^\infty dX\,,\ \text{cu}\ X = \frac{r^3}{6\pi^2} \tag{4.87}$$

[2]Rezulă din $\delta(k) = \int\frac{d^3x}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$, pentru $\vec{k}=0$.

şi analog, pentru integrala în spaţiul impulsurilor,

$$\int d^3p = \int_0^\infty dY \ , \ \text{cu} \ Y = \frac{4\pi p^3}{3} \ . \tag{4.88}$$

Obţinem astfel formula

$$\delta(\vec{0}) \int d^3p = \int_0^\infty \int_0^\infty dX dY \ , \tag{4.89}$$

care reprezintă o integrală de suprafaţă pe cadranul I al planului (abstract) $\mathbf{R}^2$ generat de 2-forma $dX \wedge dY$. Trecând la coordonate cilindrice, (R, ϕ), cu

$$X = R\cos\phi \ , \ Y = R\sin\phi \ , \ dX\,dY = R dR d\phi \, , \tag{4.90}$$

este clar că domeniul de integrare va fi $\mathbf{R}_+ \times \left(\frac{1}{4}S^1\right)$, adică $(0\,,\,\infty) \times$ $\times\,[0\,,\,\frac{\pi}{2}]$, deci (4.89) devine

$$\delta(\vec{0}) \int d^3p = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty R dR \, , \tag{4.91}$$

iar spinul de zero (4.85) se va putea exprima sub forma

$$S_3[0] = \frac{\pi}{4} \left(\delta_{AB}\,\eta^{AB}\right) \int_0^\infty R dR \, . \tag{4.92}$$

A regulariza integrala divergentă din (4.92) înseamnă a introduce un parametru, să spunem Λ, care pentru orice valori ale sale diferite de o valoare "critică", să spunem Λ_c, transformă integrala într-una finită. Valoarea divergentă a integralei va fi "reobţinută" prin calcularea limitei pentru $\Lambda \to \Lambda_c$.

Desigur, după cum se poate observa din această definiţie, procedeul concret de regularizare nu este unic. Putem, de exemplu, să utilizăm o aşa numită "regularizare prin *cut-off* ultraviolet" (pentru acest caz), adică să scriem expresia regularizată a lui $S_3[0]$ sub forma

$$S_3[0;\Lambda] = \frac{\pi}{4} \left(\delta_{AB}\,\eta^{AB}\right) \int_0^\Lambda R dR \, , \tag{4.93}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

astfel încât vom avea $\Lambda_c = \infty$ şi

$$S_3[0] = \lim_{\Lambda\to\infty} S_3[0;\Lambda]\,. \tag{4.94}$$

Sau, la fel de bine, putem efectua o aşa-numită "regularizare de amortizare exponenţială" (*exponential damping regularization*) prin introducerea unui factor $e^{-\lambda R}$, cu $\lambda > 0$, când obţinem

$$S_3[0;\Lambda] = \tfrac{\pi}{4}\left(\delta_{AB}\,\eta^{AB}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda R}\,R\,dR \tag{4.93'}$$

şi evident, $\lambda_c = 0$, adică

$$S_3[0] = \lim_{\lambda\to 0} S_3[0;\lambda]\,. \tag{4.94'}$$

Ceea ce este însă important, în cazul valorii regularizate a spinului de zero este faptul că, de îndată ce integrala din (4.92) a fost regularizată, deci a devenit finită, indeterminarea "$0\cdot\infty$" este "complet ridicată" (datorită identităţii (4.86)) şi astfel

$$S_3[0;\Lambda] = S_3[0;\lambda] \equiv 0\,,\ (\forall)\,\Lambda,\lambda \in \mathbf{R}_+\,, \tag{4.95}$$

ceea ce determină ea însăşi

$$S_3[0] \equiv 0\,. \tag{4.96}$$

În concluzie, spinul de zero al câmpului Dirac (cuantificat) este efectiv ZERO şi este suficientă doar metoda de regularizare, nu şi cea de substragere, pentru a demonstra aceasta. Cum renormarea, în general, reclamă utilizarea ambelor metode (regularizare şi substracţie), rezultă că, de fapt, în cazul operatorului de spin, nu avem nevoie de nici un fel de renormare.

Cu impulsul de zero suntem, practic, în aceeaşi situaţie. Avem, la prima vedere, "ultra"-singularitatea (din (4.73))

$$\delta(\vec{0})\int p_\mu\,d^3p = \delta(\vec{0})\int_0^\infty p^3\,dp\left\{\int_{0\le\Omega\le 4\pi} n_\mu\,d\Omega\right\} \tag{4.97}$$

BCU "ASTRAL" UNIVERSITY LIBRARY

cu $(n_\mu)_{\mu=\overline{1,3}} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ şi $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, care, având în vedere

$$\int_{0\leq\Omega\leq 4\pi} n_\mu\, d\Omega \equiv 0\,, \tag{4.98}$$

reprezintă o indeterminare "$\infty \cdot 0$". Partea ultradivergentă se poate scrie ca

$$\delta(\vec{0}) \int_0^\infty p^3\, dp = \int_0^\infty \int_0^\infty dX\, dZ\,, \text{ cu } X = \frac{r^3}{6\pi^2}\,,\ Z = \frac{p^4}{4} \tag{4.99}$$

şi devine, prin utilizarea coordonatelor polare (4.90) (cu Z în loc de Y), exact de forma (4.91),

$$\delta(\vec{0}) \int_0^\infty p^3\, dp = \tfrac{\pi}{2} \int_0^\infty R\, dR\,. \tag{4.99'}$$

Deci obţinem pentru componenta μ a impulsului de zero expresia

$$P_\mu[0] = -\pi \int_{0\leq\Omega\leq 4\pi} n_\mu d\Omega \int_0^\infty R\, dR\,. \tag{4.100}$$

Prin regularizarea integralei după R pe R_+, aceasta devine finită şi vom avea, datorită identităţii (4.98),

$$P_\mu[0;\Lambda] = 0\,, \tag{4.101}$$

pentru orice Λ, inclusiv Λ_c. Astfel, exact ca în cazul spinului de zero, valoarea impulsului de zero al câmpului Dirac este, în mod efectiv, zero,

$$P_\mu[0] \equiv 0\,, \tag{4.102}$$

aplicarea metodei de substracţie nemaifiind necesară.

Cu următoarele două mărimi de zero, (4.79) şi (4.83), situaţia este puţin mai complicată : regularizarea singură nu mai este suficientă pentru ca limita în $\Lambda \to \Lambda_c$ să conducă la rezultate finite, ci avem nevoie şi de substracţie. În esenţă, aceasta este un procedeu formal de identificare "în sânul" unei mărimi divergente $\mathcal{D}$ a părţii efectiv infinite

$\mathcal{I}$ a acesteia şi de extragere a părţii finite F, prin efectuarea diferenţei celor două mărimi $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{I}$. Deci, formal, $F = \mathcal{D} - \mathcal{I}$. Acest mod de definire a substracţiei este intuitiv destul de clar, dar, din punct de vedere matematic, este complet ambiguu, dat fiind că nu există o "tablă de scădere" a infiniţilor. De aceea, este necesară mai întâi regularizarea divergenţelor $\mathcal{D}$ şi a părţii efectiv infinite a acesteia, $\mathcal{I}$, adică definirea "cantităţilor" finite $\mathcal{D}[\Lambda]$ şi $\mathcal{I}[\Lambda]$ şi apoi efectuarea diferenţei $\mathcal{D}[\Lambda]-\mathcal{I}[\Lambda]$ (care acum este bine definită) şi considerarea limitei acesteia, pentru $\Lambda \to \Lambda_c$ adică

$$F = \lim_{\Lambda \to \Lambda_c} [\mathcal{D}[\Lambda] - \mathcal{I}[\Lambda]] \,. \tag{4.103}$$

Să dăm un exemplu scurt, dar elocvent nu numai din punctul de vedere al aplicării "substracţiei standard" (4.103), ci şi din acela al existenţei şi a altor tehnici de substracţie, cum ar fi cea de extragere a părţii finite a divergenţelor prin integro-diferenţierea parametrică a acesteia (*parametric integro-differential substraction*). Fie aşadar, integrala divergentă

$$\mathcal{D}[a] = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+a}} \,, \text{ cu } a \in \mathrm{R}_+ \,. \tag{4.104}$$

În metoda "substracţiei standard", regularizăm mai întâi integrala utilizând, de exemplu, un "*cut-off* ultraviolet" după $\Lambda < \infty$, adică

$$\mathcal{D}[a;\Lambda] = \int_0^\Lambda \frac{dx}{\sqrt{x+a}} \,. \tag{4.105}$$

Evident, avem

$$\mathcal{D}[a;\Lambda] = 2\left[\sqrt{\Lambda+a} - \sqrt{a}\right] = 2\sqrt{\Lambda}\left[1+\frac{a}{\Lambda}\right]^{1/2} - 2\sqrt{a} \tag{4.106}$$

şi dezvoltând radicalul în serie Taylor după $\frac{a}{\Lambda}$, în jurul valorii de zero, obţinem în dreapta trei grupe de termeni

$$\mathcal{D}[a;\Lambda] = 2\sqrt{\Lambda} + 2\sqrt{\Lambda}\,\mathrm{Taylor}\left\{\left[1+\frac{a}{\Lambda}\right]^{1/2} - 1\,;\,\frac{a}{\Lambda}\,,\,0\right\} - 2\sqrt{a} \,. \tag{4.107}$$

BCU IAŞI CENTRUL DE INFORMARE ŞI DOCUMENTARE

Pentru $\Lambda \to \infty$, al doilea "termen" converge la zero, deoarece

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\left\{2\sqrt{\Lambda}\,\text{Taylor}\left[\left(1+\frac{a}{\Lambda}\right)^{1/2}-1;\frac{a}{\Lambda},0\right]\right\} =$$

$$= \lim_{\Lambda\to\infty}\left\{2\sqrt{\Lambda}\left[\sqrt{1+\frac{a}{\Lambda}}-1\right]\right\} = \lim_{\Lambda\to\infty}\frac{2a/\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{1+\frac{a}{\Lambda}}+1} = 0\,, \quad (4.108)$$

iar singurul termen divergent, din dreapta lui (4.107), este chiar primul, adică

$$\mathcal{I}[\Lambda] = 2\sqrt{\Lambda}\,. \quad (4.109)$$

Pentru $\Lambda < \infty$, această expresie reprezintă chiar regularizarea părţii (integrale) efectiv infinite

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad (4.110)$$

a "mărimii" divergente $\mathcal{D}$, definită prin (4.104). Astfel, din (4.107) cu convergenţa (4.108) şi "identificarea" (4.109), obţinem, aplicând formula (4.103) a "substracţiei standard",

$$F(a) = \lim_{\Lambda\to\infty}\left[\mathcal{D}[a;\Lambda] - \mathcal{I}[\Lambda]\right] = -2\sqrt{a} \quad (4.111)$$

drept valoare a părţii finite a integralei divergente (4.104). Desigur, formal, utilizând (4.110), am fi putut scrie direct

$$F(a) = \textstyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+a}} - \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = -2\sqrt{a}\,. \quad (4.111')$$

În cazul celei de a doua metode de extragere a părţii finite $F(a)$ a divergenţei $\mathcal{D}[a]$, se pleacă de la observaţia că, deşi integrala (4.104) nu este convergentă, derivata ei formală după parametrul a este convergentă. Într-adevăr,

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\mathcal{D}[a;\Lambda] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\mathcal{D}[a] = -\frac{1}{2}\int_0^\infty (x+a)^{-\frac{3}{2}}\,dx \quad (4.112)$$

BCUIAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\mathcal{D}[a] = -\frac{1}{\sqrt{a}}\,. \tag{4.113}$$

Cum partea efectiv infinită $\mathcal{I}$ a divergenţei $\mathcal{D}$ este independentă de a, rezultă, din (4.103) şi (4.113), ecuaţia diferenţială foarte simplă

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \tag{4.114}$$

ce are drept soluţie chiar partea finită a integralei divergente (4.103), anume

$$F(a) = -2\sqrt{a}\,. \tag{4.115}$$

Constanta de integrare ce apare în soluţia generală a ecuaţiei (4.114) nu alterează rezultatul (4.115) deoarece, fiind independentă de a, este absorbită de partea efectiv infinită $\mathcal{I}$. După cum se observă, la fel ca diversele metode concrete de regularizare, diferitele tipuri de substracţii, dacă sunt corect aplicate aceleiaşi expresii divergente, trebuie să conducă la aceeaşi valoare a părţii finite a acesteia.

Să revenim la expresiile (4.79), (4.83) şi să ne ocupăm, mai întâi, de sarcina de zero, fiindcă este mai simplă, practic trivială din punct de vedere tehnic. Cum ultradivergenţa ce apare, pe lângă factorul constant $2e$, este chiar cea din (4.89), ajungem direct la formula (4.91) şi obţinem astfel

$$Q[0] = \pi e \int_0^\infty R\,dR\,. \tag{4.116}$$

Regularizând-o prin amortizare exponenţială,

$$Q[0;\lambda] = \pi e \int_0^\infty e^{-\lambda R} R\,dR\,,\ \lambda \in \mathrm{R}_+ \tag{4.117}$$

rezultă direct

$$Q[0;\lambda] = \frac{\pi e}{\lambda^2}\,, \tag{4.118}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde expresia din membrul drept reprezintă, desigur, partea efectiv infinită, pentru $\lambda \to 0$, a sarcinii de zero. Ca urmare,

$$Q[0;\lambda] - \frac{\pi e}{\lambda^2} = 0\,,\ (\forall)\ \lambda \in \mathrm{R}_+\,, \tag{4.119}$$

deci partea finită $\underline{Q}[0]$, definită în sensul "substracţiei standard" (4.103), adică

$$\underline{Q}[0] = \lim_{\lambda \to 0} \left\{ Q[0;\lambda] - \tfrac{\pi e}{\lambda^2} \right\} \tag{4.119'}$$

este, în mod clar, zero,

$$\underline{Q}[0] \equiv 0\,. \tag{4.120}$$

În ceea ce priveşte extragerea părţii finite a energiei de zero, aspectele tehnice implicate sunt puţin mai complicate din cauza factorului masic m prezent, prin E_p, în formula (4.79), adică

$$H[0] = -2 \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[p^2 + m^2\right]^{1/2}\,. \tag{4.121}$$

Dacă m ar fi fost zero, atunci, trecând la coordonate sferice pe ambele subspaţii (de configuraţie şi de impuls), ale spaţiului fazic uniparticulă $\{x^\mu\,,\ p_\mu\}_{\mu=\overline{1,3}}$, am fi avut direct expresia simplă

$$H[0] = -\frac{4}{\pi} \int_{\mathrm{R}_+^2} r^2 p^3\, dr\, dp \tag{4.122}$$

care, prin regularizare de amortizare exponenţială, devine

$$H[0;\lambda] = -\frac{4}{\pi} \int_{\mathrm{R}_+^2} r^2 p^3\, e^{-\lambda\left(\mu_0 r + \frac{1}{\mu_0} p\right)}\, dr\, dp\,,\ \lambda \in \mathrm{R}_+ \tag{4.123}$$

unde μ_0 este o constantă arbitrară, "fixând" scara de energie. Aceasta ar fi luat forma

$$H[0;\lambda] = -\frac{48\,\mu_0}{\pi \lambda^7} \tag{4.124}$$

BCU IAŞI - COLECŢIA UNIVERSITY LIBRARY

şi am fi obţinut în mod evident, ca în cazul sarcinii de zero, că energia de zero nu are decât parte efectiv infinită, adică

$$H[0;\lambda] = -\frac{48\mu_0}{\pi\lambda^7} = \mathcal{I}[\lambda], \tag{4.125}$$

deci prin "substracţia standard" (4.103), ar rezulta

$$\underline{H}[0] = \lim_{\lambda\to 0}\{H[0;\lambda] - \mathcal{I}[\lambda]\} = 0 \tag{4.126}$$

pentru valoarea părţii finite a energiei de zero a câmpului nemasiv (*massless*).

În cazul masiv, tentativa de a aplica exact aceeaşi metodă, deşi principial posibilă, este mult îngreunată de prezenţa radicalului (din (4.121)). Desigur, pe partea spaţială, de configuraţie, calculele pot rămâne neschimbate, dat fiind că radicalul afectează numai partea de calcul pe subspaţiul impulsurilor. Aici, însă, contribuţiile sale sunt esenţiale. Pe de o parte, în ce priveşte regularizarea, se va ajunge la reprezentări integrale de funcţii speciale, în mod concret funcţia Hankel de argument imaginar $K_0(\lambda)$ şi primele derivate ale sale, iar pe de altă parte, în ce priveşte substracţia, va fi necesară efectuarea unei analize amănunţite a comportării asimptotice de argument mic ($\lambda \to 0$) a tuturor funcţiilor speciale, din expresia regularizată pe "partea de impuls" a energiei de zero, în vederea identificării părţii efectiv infinite. În cele ce urmează, atât pentru a păstra caracterul elementar al expunerii, cât şi pentru a urmări mai bine ce se întâmplă, vom utiliza metoda *cut-off* de regularizare şi vom efectua pas cu pas substracţiile, în sensul descreşterii ordinului de divergenţă a integralelor. Astfel, pornind de la (4.121), să aplicăm mai întâi un "*cut-off*" pe spaţiul de configuraţie, în sensul considerării unui domeniu de volum arbitrar $V < \infty$. Avem

$$H[0;V] = \left[-\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty p^2\sqrt{p^2+m^2}\,dp\right]V, \tag{4.127}$$

din care rezultă expresia densităţii volumice a energiei de zero

$$\mathcal{H}[0] = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty p^2\sqrt{p^2+m^2}\,dp, \tag{4.128}$$

care, bineînţeles, este de asemenea o mărime divergentă. Ideea ar fi de a arăta că partea finită a acesteia este tot zero. Aici trebuie să clarificăm o problemă de interpretare, fiindcă, altfel, pot apărea neînţelegeri. Să presupunem că am arătat că valoarea părţii finite a densităţii energiei de zero este zero. Asta înseamnă că integrala din (4.128) şi, respectiv, membrul drept al relaţiei (4.127) (în limita $V \to \infty$) nu mai sunt divergente? Desigur, nu. Vor fi divergente, dar numai datorită părţilor efectiv infinite şi atunci, în baza regulii de substracţie, vor putea fi eliminate, "lăsând" pentru partea finită a energiei de zero valoarea zero. Dar dacă partea finită a densităţii energiei de zero ar fi diferită de zero, atunci, pentru V tinzând la infinit, energia de zero este tot infinită. Nu am putea oare aplica şi acum "reţeta de substracţie" pentru a obţine tot valoarea zero a părţii finite a energiei de zero? Răspunsul este nu, deoarece "regula de substracţie" permite numai eliminarea infinităţilor efectivi, adică numai a acelora care conţin în mod esenţial toţi parametrii de regularizare. Or, o expresie de tipul "ceva finit independent de parametrii de regularizare" × "câţiva dintre parametrii de regularizare" nu mai este efectiv infinită, când se face trecerea la limită, ci este în mod real infinită, adică fizic (observabil), mărimea asociată expresiei respective prezintă o singularitate, o divergenţă a ceea ce ar fi trebuit să fie partea ei finită. De exemplu, pentru sarcina de zero (4.83) avem, după regularizarea divergenţei volumice, expresia

$$Q[0;V] = \left[\frac{e}{\pi^2}\int_0^\infty p^2\,dp\right] V\,, \tag{4.129}$$

care ne oferă densitatea volumică a sarcinii de zero, sub forma

$$\rho[0] = \frac{e}{\pi^2}\int_0^\infty p^2\,dp \tag{4.130}$$

şi care, regularizată cu un *cut-off* pe impulsul radial p, devine

$$\rho[0;\Lambda] = \frac{e\Lambda^3}{3\pi^2}\,. \tag{4.131}$$

După cum se observă, partea finită a densităţii sarcinii de zero este zero fiindcă

$$\rho[0;\Lambda] = \frac{e\Lambda^3}{3\pi^2} = \mathcal{I}[\Lambda]\,, \tag{4.132}$$

deci

$$\underline{\rho}[0] = \lim_{\Lambda\to\infty}\{\rho[0;\Lambda] - \mathcal{I}[\Lambda]\} = 0\,. \tag{4.133}$$

În aceste condiţii, expresia complet regularizată a sarcinii de zero (4.129) se scrie

$$Q[0;V,\Lambda] = V\rho[0;\Lambda] = \frac{e}{3\pi^2}V\Lambda^3 \tag{4.134}$$

şi este, evident, efectiv infinită (pentru $V, \Lambda \to \infty$), deoarece, în baza celor tocmai menţionate, ea depinde esenţial de ambii parametri de regularizare utilizaţi. Neavând nici o altă grupare de termeni conţinând doar unul sau nici unul dintre parametrii regularizatori, partea ei finită, $\underline{Q}[0]$, este (după cum ştiam deja) zero. Dacă densitatea regularizată (4.132) ar fi conţinut un extratermen ρ_0, atunci, înlocuind în (4.134), am fi obţinut, pe lângă partea efectiv infinită, termenul $\rho_0 V$ care, nedepinzând şi de Λ, nu ar mai fi putut fi substras, deci, în limita $V \to \infty$, am fi avut $\underline{Q}[0] \to \infty$. Analog, pentru $m = 0$, în (4.128), avem

$$\mathcal{H}[0;\Lambda] = -\frac{\Lambda^4}{4\pi^2}\,, \tag{4.135}$$

în consecinţă, partea finită a densităţii energiei de zero, pentru câmpul nemasiv, este

$$\underline{\mathcal{H}}[0] \equiv 0\,. \tag{4.136}$$

Energia de zero complet regularizată va avea expresia

$$H[0;V,\Lambda] = V\mathcal{H}[0;\Lambda] = -\frac{1}{4\pi^2}V\Lambda^3 \tag{4.137}$$

fiind, deci, în limita $V, \Lambda \to \infty$, numai efectiv infinită. Această parte poate fi eliminată (substrasă) şi obţinem rezultatul (4.126).

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru cazul general $m > 0$ în (4.128), observăm că, la valori mari ale impulsului, integrala se comportă ca $p^4/4$, adică este de forma (4.135) şi, din acest motiv, se spune că este cuartic divergentă. Ca urmare, în cadrul aceleiaşi regularizări de *cut-off* Λ, să substragem această divergenţă efectivă. Avem

$$\mathcal{H}_{(1)}[0;\Lambda] = \mathcal{H}[0;\Lambda] + \frac{\Lambda^4}{4\pi^2} = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^\Lambda p^2\left[\sqrt{p^2+m^2}-p\right]dp \tag{4.138}$$

şi pentru a determina forma integrandului în limita impulsurilor mari, îl scriem ca

$$p^2\left[\sqrt{p^2+m^2}-p\right] = \frac{m^2p^2}{\sqrt{p^2+m^2}+p}, \tag{4.139}$$

adică obţinem, pentru densitatea regularizată, după substragerea termenului cuartic, expresia

$$\mathcal{H}_{(1)}[0;\Lambda] = -\frac{m^2}{\pi^2}\int_0^\Lambda \frac{p^2\,dp}{\sqrt{p^2+m^2}+p}, \tag{4.140}$$

care, la rândul ei, este cuadratic divergentă,

$$\mathcal{I}_{(1)}[\Lambda] = -\frac{m^2\Lambda^2}{4\pi^2}. \tag{4.141}$$

Substrăgând şi această divergenţă, avem

$$\mathcal{H}_{(2)}[0;\Lambda] = \mathcal{H}_{(1)}[0;\Lambda] + \frac{m^2\Lambda^2}{4\pi^2} = \\ = -\frac{m^2}{\pi^2}\int_0^\Lambda p^2\left[\frac{1}{\sqrt{p^2+m^2}+p}-\frac{1}{2p}\right]dp, \tag{4.142}$$

ceea ce înseamnă, concret,

$$\mathcal{H}_{(2)}[0;\Lambda] = \frac{m^2}{\pi^2}\int_0^\Lambda p\,\frac{\sqrt{p^2+m^2}-p}{\sqrt{p^2+m^2}+p}\,dp, \tag{4.143}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

deci, utilizând din nou (4.139), obţinem partea liberă de divergenţe polinomiale cuartice şi cuadratice a densităţii energiei de zero regularizate

$$\mathcal{H}_{(2)}[0;\Lambda] = \frac{m^4}{2\pi^2}\int_0^\Lambda \frac{p\,dp}{\left[\sqrt{p^2+m^2}+p\right]^2}\,. \tag{4.144}$$

În ultravioletul îndepărtat, $p >> m$, integrandul din (4.144) este de tipul

$$p\,[\sqrt{p^2+m^2}+p]^{-2}\Big|_{p>>m} \approx \frac{1}{4p} \tag{4.145}$$

ceea ce înseamnă că integrala şi, totodată, densitatea de zero $\mathcal{H}_{(2)}[0;\Lambda]$ sunt logaritmic divergente. Problema cu substragerea acestui termen singular este aceea că, evaluat prin integrala

$$\mathcal{I}_{(2)}[\Lambda] = \frac{m^4}{8\pi^2}\int_0^\Lambda \frac{dp}{p}\,, \tag{4.146}$$

el are nu numai o divergenţă ultravioletă (când $\Lambda \to \infty$), ci conţine, prin însăşi definirea sa, o divergenţă infraroşie datorată singularităţii logaritmului în zero. Or aceasta nici măcar nu a fost regularizată. Ca urmare, nu mai putem aplica substracţia acestui termen într-o manieră atât de directă cum a fost cea pentru $-\frac{\Lambda^4}{4\pi^2}$ şi $-\frac{m^2\Lambda^2}{4\pi^2}$. De aceea, vom centraliza rezultatele obţinute până acum şi vom trece la calcularea explicită a integralei din (4.144) care nu este divergentă în infraroşu (*infrared divergent*). Din (4.142) avem, mai întâi,

$$\mathcal{H}_{(1)}[0;\Lambda] = -\frac{m^2\Lambda^2}{4\pi^2} + \mathcal{H}_{(2)}[0;\Lambda]\,,$$

iar apoi, din (4.138),

$$\mathcal{H}[0;\Lambda] = -\frac{\Lambda^4}{4\pi^2} + \mathcal{H}_{(1)}[0;\Lambda]\,,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

astfel încât, din cele două relaţii, rezultă expresia

$$\mathcal{H}[0;\Lambda] = -\frac{\Lambda^4}{4\pi^2} - \frac{m^2\Lambda^2}{4\pi^2} + \mathcal{H}_{(2)}[0;\Lambda]\,. \tag{4.147}$$

Calcularea integralei din (4.144) nu ridică nici un fel de probleme, fiind practic imediată, dacă utilizăm, de exemplu, schimbarea de variabilă

$$u = \sqrt{p^2+m^2} + p \;,\; p = \frac{u^2-m^2}{2u} \;,\; dp = \frac{u^2+m^2}{2u^2}\,du\,.$$

Obţinem

$$\mathcal{H}_{(2)}[0;\Lambda] = \frac{m^4}{2\pi^2}\int_0^{\Lambda} \frac{p\,dp}{\left[\sqrt{p^2+m^2}+p\right]^2} = \frac{m^4}{8\pi^2}\int_m^{u(\Lambda)} \frac{du}{u^5}\,(u^4-m^4)\,,$$

$$u(\Lambda) = \sqrt{\Lambda^2+m^2}+\Lambda\,,$$

adică, în mod concret,

$$\mathcal{H}_{(2)}[0;\Lambda] = \frac{m^4}{8\pi^2}\ln\left[\frac{\sqrt{\Lambda^2+m^2}+\Lambda}{m}\right] - \\ - \frac{m^4}{32\pi^2} + \frac{m^4}{32\pi^2}\,\frac{m^4}{\left[\sqrt{\Lambda^2+m^2}+\Lambda\right]^4}\,, \tag{4.148}$$

ceea ce aduce expresia densităţii volumice a energiei de zero, regularizate, dar "nesubstracţionate" (4.147), la forma desfăşurată, după scăderea divergenţelor,

$$\mathcal{H}[0;\Lambda] = -\frac{\Lambda^4}{4\pi^2} - \frac{m^2\Lambda^2}{4\pi^2} + \frac{m^4}{8\pi^2}\ln\left(\frac{\sqrt{\Lambda^2+m^2}+\Lambda}{m}\right) - \\ - \frac{m^4}{32\pi^2} + \frac{m^4}{32\pi^2}\left[\frac{m}{\sqrt{\Lambda^2+m^2}+\Lambda}\right]^4\,. \tag{4.149}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru extragerea părţii finite $\underline{\mathcal{H}}[0]$ a lui (4.149) mai avem de făcut un singur pas, acela de identificare corectă a părţii efectiv infinite. La prima vedere, pe lângă faptul că orice identificare este precisă (din punct de vedere logic), deci şi formularea noastră poate apărea cel puţin un pleonasm, s-ar părea, inspectând (4.149) şi "lăsând" Λ să tindă la infinit, că primii trei termeni reprezintă partea efectiv infinită şi cum ultimul, în Λ^{-4}, tinde la zero, partea finită este $-\frac{m^4}{32\pi^2}$. La o privire mai atentă, însă, observăm că în al treilea termen, cel corespunzător divergenţei logaritmice, parametrul de regularizare este "amestecat" cu cel masic, deci, principial, în acord cu cele discutate despre cerinţele ce trebuie îndeplinite de o parte divergentă pentru a putea fi considerată efectiv infinită, acest termen, interpretat în Λ şi m, nu are încă această proprietate (de efectivitate a divergenţei sale). Ce avem de făcut este foarte simplu, dar va afecta spectaculos efectivitatea aparent certă a primilor doi termeni şi caracterul de parte finită a celui de al patrulea. Nu trebuie decât să redefinim parametrul de regularizare în întreaga expresie a densităţii de zero nesubstracţionate, astfel încât divergenţa logaritmică să devină o parte efectiv infinită, adică, tehnic, să operăm transformarea

$$m^{-1}\left[\sqrt{\Lambda^2+m^2}+\Lambda\right]=\Gamma \;\Leftrightarrow\; \Lambda=\frac{m}{2}\left(\Gamma-\Gamma^{-1}\right). \tag{4.150}$$

Obţinem atunci,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[0;\Gamma] \;=\; & -\frac{m^4}{64\pi^2}\left[\Gamma^2-2+\Gamma^{-2}\right]^2-\frac{m^4}{16\pi^2}\left[\Gamma^2-2+\Gamma^{-2}\right]+\\ & +\frac{m^4}{8\pi^2}\ln\Gamma-\frac{m^4}{32\pi^2}+\frac{m^4}{32\pi^2}\Gamma^{-4}\end{aligned} \tag{4.151}$$

şi, ordonând descrescător după puterile lui Γ, rezultă expresia

$$\mathcal{H}[0;\Gamma]=-\frac{m^4}{64\pi^2}\Gamma^4+\frac{m^4}{8\pi^2}\ln\Gamma-\frac{m^4}{32\pi^2}\left[(2+1-4)+1\right]-\frac{3m^4}{64\pi^2}\Gamma^{-4}. \tag{4.152}$$

După cum se observă, singurele divergenţe efective sunt cea cuartică şi cea logaritmică. Divergenţa cuadratică nu era, practic, deloc. Substracţia standard este acum clară

$$\underline{\mathcal{H}}[0] = \lim_{\Gamma\to\infty}\left\{\mathcal{H}[0;\Gamma] + \frac{m^4}{64\pi^2}\Gamma^4 - \frac{m^4}{8\pi^2}\ln\Gamma\right\} =$$

$$= -\frac{m^4}{32\pi^2}[(2+1-4)+1] - \frac{3m^4}{64\pi^2}\lim_{\Gamma\to\infty}\Gamma^{-4} \quad (4.153)$$

şi conduce tranşant la mult aşteptata valoare

$$\underline{\mathcal{H}}[0] \equiv 0 \quad (4.154)$$

a părţii finite a densităţii energiei de zero a câmpului Dirac. Evident, din aceasta rezultă imediat, ca pentru toate celelalte mărimi de zero analizate,

$$\underline{H}[0] \equiv 0\,. \quad (4.155)$$

D. Anticomutatorul Jordan-Wigner. Funcţiile Green. Contracţia Cronologică. Propagatorul Feynman-Dirac

În decursul celei de a doua cuantificări a câmpului spinorial am întâlnit, până acum, numai relaţii de anticomutare la timpi egali, adică pe aceeaşi hipersuprafaţă (3-dimensională) de gen spaţial $\{t = const.\}$. În aplicaţii, însă, deosebit de importante sunt relaţiile de anticomutare ale operatorilor de câmp, "evaluaţi" în două evenimente (spaţio-temporale) cronologic diferite. Ele sunt denumite, în literatura de specialitate, *relaţii de anticomutare covariantă* ; au fost introduse de Jordan şi Wigner şi dau informaţii esenţiale, atât cu privire la statutul cauzalităţii în microcosmos, cât şi, mai ales, cu privire la propagarea câmpului Dirac între cele două evenimente. Astfel, dacă ne referim, pe rând, numai la operatorul de câmp $\psi(x)$ şi, respectiv $\bar{\psi}(x)$, obţinem, în mod trivial, din algebra de anticomutare a operatorilor de anihilare şi creare:

$$\{\psi(x), \psi(x')\} \equiv 0 \equiv \left\{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x')\right\}, \quad (\forall)\, x, x' \in M_4\,, \quad (4.156)$$

M_4 fiind spaţiul Minkowski. Dacă, în schimb, ne referim la anticomutarea covariantă a celor doi operatori (între ei),

$$W(x,x') = \left\{\psi(x)\,,\,\bar{\psi}(x')\right\}\,, \tag{4.157}$$

atunci trivialitatea este complet spulberată şi descoperim o nouă lume de relaţii cu profunde interpretări fizico-matematice, în sânul formalismului celei de a doua cuantificări. Să înlocuim, deci, în relaţia Jordan-Wigner (4.157), expresiile (3.38), (3.50) ale operatorilor de câmp spinorial, reciproc adjuncţi în sens Dirac. Avem

$$\begin{aligned}
& W(x,x') = \left\{\psi(x)\,,\,\bar{\psi}(x')\right\} = \\
= & \int d^3p d^3p' \left\{a_A(\vec{p})u^A(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) + b_A^\dagger(\vec{p})v^A(\vec{p})\bar{f}_{\vec{p}}(x)\,,\right. \\
& \left. b_B(\vec{p}')\bar{v}^B(\vec{p}')f_{\vec{p}'}(x') + a_B^\dagger(\vec{p}')\bar{u}^B(\vec{p}')\bar{f}_{\vec{p}'}(x')\right\} = \\
= & \int d^3p d^3p' \left[\{a_A(\vec{p}), b_B(\vec{p})\}\, u^A(\vec{p})\bar{v}^B(\vec{p}')f_{\vec{p}}(x)f_{\vec{p}'}(x) + \right. \\
& \left. + \{b_A^\dagger(\vec{p}), a_B^\dagger(\vec{p}')\}\, v^A(\vec{p})\bar{u}^B(\vec{p}')\bar{f}_{\vec{p}}(x)\bar{f}_{\vec{p}'}(x')\right] + \\
+ & \int d^3p d^3p' \left[\{a_A(\vec{p}), a_B^\dagger(\vec{p}')\}\, u^A(\vec{p})\bar{u}^B(\vec{p}')f_{\vec{p}}(x)\bar{f}_{\vec{p}'}(x') + \right. \\
& \left. + \{b_B^\dagger(\vec{p}'), b_A^\dagger(\vec{p})\}\, v^A(\vec{p})\bar{v}^B(\vec{p}')\bar{f}_{\vec{p}}(x)f_{\vec{p}'}(x')\right]
\end{aligned} \tag{4.158}$$

şi, utilizând algebra (4.50), rămânem cu

$$\begin{aligned}
& \left\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\right\} = \left\{\psi_+(x), \bar{\psi}_-(x')\right\} + \left\{\psi_-(x), \bar{\psi}_+(x')\right\} \\
& \Leftrightarrow\; W(x,x') = W^{(+)}(x,x') + W^{(-)}(x,x')
\end{aligned} \tag{4.159}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde

$$\begin{aligned}
\text{a)}\ W^{(+)}(x,x') &= \left\{\psi_+(x), \bar{\psi}_-(x')\right\} = \\
&= \int d^3p\, \delta_{AB}\, u^A(\vec{p})\bar{u}^B(\vec{p}) f_{\vec{p}}(x)\bar{f}_{\vec{p}}(x') \\
\text{b)}\ W^{(-)}(x,x') &= \left\{\psi_-(x), \bar{\psi}_+(x')\right\} = \\
&= \int d^3p\, \delta_{AB}\, v^A(\vec{p})\bar{v}^B(\vec{p}) \bar{f}_{\vec{p}}(x) f_{\vec{p}}(x')
\end{aligned} \tag{4.160}$$

sunt anticomutatorii covarianţi de descompunere după frecvenţele pozitive şi, respectiv, negative. Explicitarea acestora se face imediat, dacă ne amintim definiţiile (3.69), (3.80.a) şi (3.70), (3.80.b) ale proiectorilor Dirac de energie şi formele concrete (3.7) ale celor două moduri de frecvenţe. Obţinem

$$\begin{aligned}
W^{(+)}(x,x') &= \int d^3p\, 2m\Lambda_+ \frac{(2\pi)^{-3}}{2E_p} e^{ip(x-x')} = \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2m(\hat{p}+im)}{2im} \frac{e^{ip(x-x')}}{2E_p} \\
W^{(-)}(x,x') &= -\int d^3p\, 2m\Lambda_- \frac{(2\pi)^{-3}}{2E_p} e^{-ip(x-x')} = \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2m(\hat{p}-im)}{2im} \frac{e^{-ip(x-x')}}{2E_p}
\end{aligned} \tag{4.161}$$

adică, în mod concret,

$$\begin{aligned}
\text{a)}\ W^{(+)}(x,x') &= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\hat{p}+im}{E_p} e^{ip(x-x')} \\
\text{b)}\ W^{(-)}(x,x') &= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\hat{p}-im}{E_p} e^{-ip(x-x')}.
\end{aligned} \tag{4.162}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

După cum se observă, în raport cu operatorul Dirac, $\hat{\partial} - m$, şi funcţiile Green omogene

$$\Delta^{(+)}(x,x') = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{ip(x-x')}}{2E_p}$$

$$\Delta^{(-)}(x,x') = +i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{-ip(x-x')}}{2E_p}$$

ale câmpului scalar complex, anticomutatorii covarianţi (4.162) se pot scrie "compact" sub forma

$$W^{(\pm)}(x,x') = -i\left[\hat{\partial} - m\right]\Delta^{(\pm)}(x,x')\,, \tag{4.163}$$

derivările implicate fiind efectuate după coordonatele evenimentului x.

Odată ajunşi aici, am putea utiliza această relaţie pentru tratarea matematică a tot restului paragrafului, prin analogie cu rezultatele obţinute la "scalarul complex", în capitolul anterior. Aceasta ar micşora volumul de lucru, dar, în acelaşi timp, ar reduce destul de mult transparenţa fizică a diferenţelor specifice ce există între cele două câmpuri, la nivelul analizei funcţiilor Green, contracţiilor cronologice şi propagatorilor respectivi. De aceea, preferăm să continuăm de la funcţiile de anticomutare covariantă (4.162) ca şi cum nu am şti nimic despre existenţa şi cuantificarea câmpului scalar complex. În aceste condiţii, primul lucru de care avem nevoie este o reprezentare integrală Lorentz-covariantă, deci pe spaţiul 4-impulsurilor, a funcţiilor de anticomutare $W^{(\pm)}(x,x')$. Pentru aceasta, să vedem mai întâi cum arată funcţia Green generală, $G(x,x')$, soluţie a ecuaţiei Dirac neomogene

$$\left(\hat{\partial} + m\right) G(x,x') = -\delta(x-x')\,. \tag{4.164}$$

Utilizând reprezentarea Fourier

$$\text{a)}\quad \delta(x-x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{ik(x-x')}$$

$$\text{b)}\quad G(x,x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, G(k)\, e^{ik(x-x')}\,, \tag{4.165}$$

BCU IAŞI ... UNIVERSITY LIBRARY

ecuaţia diferenţială (4.164) devine

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^2}\left[i(\hat{k}-im)G(k)+\frac{1}{(2\pi)^2}\right]e^{ik(x-x')}=0\,,$$

adică se transformă în ecuaţia algebrică matriceală a imaginii Fourier $G(k)$,

$$(\hat{k}-im)\,G(k)=i\,(2\pi)^{-2}\,, \tag{4.166}$$

de unde rezultă imediat, prin înmulţire la stânga cu matricea $\hat{k}+im$, soluţia (algebrică)

$$G(k)=\frac{i}{(2\pi)^2}\,\frac{\hat{k}+im}{k^2+m^2}\,. \tag{4.167}$$

Prin înlocuire în reprezentarea (4.165.b), obţinem expresia formală a funcţiei Green generale,

$$G(x,x')=i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{\hat{k}+im}{k^2+m^2}\,e^{ik(x-x')}\,. \tag{4.168}$$

De ce expresia este "formală", iar funcţia Green "generală", sunt două chestiuni corelate, care admit un răspuns comun: deoarece reprezentarea integrală, Lorentz-covariantă (4.168), nu are deocamdată nici o "reţetă" concretă de calcul, adică nici o specificare de evaluare a integralei sale pe spaţiul (liniar) abstract al cuadrivectorilor k. Prin urmare, considerând $k=(\vec{p},E)$, unde (atenţie!) E este o a patra componentă oarecare a lui k şi nu neapărat $\pm E_p$, datorită singularităţii de tip polar de ordinul I a numitorului

$$k^2+m^2=|\vec{p}|^2+m^2-E^2=E_p^2-E^2 \tag{4.169}$$

în punctele de pe axa reală (a energiei) $E=\mp E_p$, integrala după E nu poate fi evaluată direct "mergând întins" de la $-\infty$ la $+\infty$ pe această axă. Este necesară complexificarea variabilei E şi atunci, diversele contururi de integrare (în planul complex) vor da rezultate diferite,

BCU CLUJ UNIVERSITY LIBRARY

după cum conţin ambii, unul sau nici unul din cei doi poli. Vom obţine aşadar, din funcţia Green "generală", diverse tipuri concrete de funcţii Green ale câmpului spinorial, dintre care remarcabile vor fi $W^{(\pm)}(x,x')$, $W(x,x')$ şi propagatorul Feynman-Dirac $S(x,x')$. Focalizându-ne atenţia pe partea temporală

$$\exp[-iE(t-t')] = \exp[-i\,Re(E)(t-t')]\,\exp[Im(E)(t-t')] \quad (4.170)$$

aceasta devine puternic (exponenţial) divergentă pe ramuri de tipul $Im(E) \to \infty$, când $t-t' > 0$ şi, respectiv, $Im(E) \to -\infty$, când $t-t' < 0$. Ca urmare, în absenţa ordonării cronologice, nu putem utiliza ramuri de la "infinitul imaginar" al planului complex pentru a închide conturul de integrare. Asta înseamnă că fiecare contur de integrare trebuie să înconjoare polul (polii) la o distanţă finită faţă de acesta (aceştia). Alegând, de exemplu, un cerc de rază finită, în jurul polului $E = E_p$, obţinem

$$G_{\Gamma(E_p)}(x,x') = i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\int_{\Gamma(E_p)} \frac{dE}{2\pi}\,\frac{\hat{k}+im}{E_p^2-E^2}\,e^{-iE(t-t')}\right) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \quad (4.171)$$

cu $k = (\vec{p},\, E)$, care devine, prin aplicarea teoremei reziduurilor,

$$G_{\Gamma(E_p)}(x,x') = i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left\{(-i)\frac{\gamma^\mu p_\mu - \gamma^4 E_p + im}{2E_p}\,e^{-iE_p(t-t')}\right\} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\,, \quad (4.172)$$

adică ajungem chiar la expresia (4.162.a) a anticomutatorului covariant de frecvenţă pozitivă

$$W^{(+)}(x,x') = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{\hat{p}+im}{2E_p}\,e^{ip(x-x')} = -i\,G_{\Gamma(E_p)}(x,x')\,. \quad (4.173)$$

Deci specificarea conturului de integrare $\Gamma(E_p)$ în funcţia Green generală (4.168) conduce la reprezentarea integrală Lorentz-covariantă a

funcţiei de anticomutare

$$W^{(+)}(x,x') = \int_{\Gamma(E_p)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\hat{p}+im}{p^2+m^2} e^{ip(x-x')}, \quad \text{cu } p=(\vec{p},E). \quad (4.174)$$

Aplicând termenilor din dubla egalitate (4.173) operatorul Dirac $\hat{\partial}+m$, obţinem

$$\begin{aligned}(\hat{\partial}+m)W^{(+)}(x,x') &= -i(\hat{\partial}+m)G_{\Gamma(E_p)}(x,x') = \\ &= -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\hat{\partial}+m)\, e^{ip(x-x')} \frac{\hat{p}+im}{E_p} = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \frac{p^2+m^2}{2E_p} e^{ip(x-x')} \end{aligned} \quad (4.175)$$

şi, cum 4-vectorul impuls $(\vec{p},E_p)$ este *on-shell*, rezultă imediat

$$(\hat{\partial}+m)W^{(+)}(x,x') = -i(\hat{\partial}+m)G_{\Gamma(E_p)}(x,x') \equiv 0, \quad (4.176)$$

adică $W^{(+)}(x,x')$ este proporţională cu funcţia Green omogenă de frecvenţă pozitivă, E_p. Prin analogie, alegând drept contur de integrare cercul $\Gamma(-E_p)$ de rază finită, centrat pe polul $-E_p$, avem

$$G_{\Gamma(-E_p)}(x,x') = i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\int_{\Gamma(-E_p)} \frac{dE}{2\pi} \frac{\hat{k}+im}{E_p^2-E^2} e^{-iE(t-t')}\right) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}, \quad (4.177)$$

cu $k=(\vec{p},E)$, care conduce, prin aplicarea teoremei reziduurilor, la relaţia

$$G_{\Gamma(-E_p)}(x,x') = i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} i\frac{\gamma^\mu k_\mu + \gamma^4 E_p + im}{2E_p} e^{+iE_p(t-t')} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}, \quad (4.178)$$

din care, trecându-l pe $\vec{k}$ în $-\vec{p}$, obţinem

$$G_{\Gamma(-E_p)}(x,x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\hat{p}-im}{2E_p} e^{-ip(x-x')}, \quad \text{cu } p=(\vec{p},E_p), \quad (4.179)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică ajungem la expresia (4.162.b) a anticomutatorului covariant de frecvenţă negativă

$$W^{(-)}(x,x') = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{\hat{p}-im}{2E_p}\,e^{-ip(x-x')} = -i\,G_{\Gamma(-E_p)}(x,x')\,. \tag{4.180}$$

Aşadar, evaluarea funcţiei Green generale pe conturul $\Gamma(-E_p)$ ne oferă reprezentarea integrală Lorentz-covariantă a funcţiei de anticomutare

$$W^{(-)}(x,x') = \int_{\Gamma(-E_p)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{\hat{p}+im}{p^2+m^2}\,e^{ip(x-x')}\,,\ \text{cu } p=(\vec{p},E)\,. \tag{4.181}$$

Aplicând, din nou, operatorul Dirac $\hat{\partial}+m$, de data aceasta relaţiei (4.180), avem

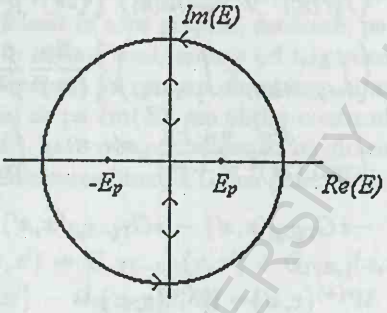
$$\begin{aligned}(\hat{\partial}+m)W^{(-)}(x,x') &= -i\,(\hat{\partial}+m)G_{\Gamma(-E_p)}(x,x') = \\ &= -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,(\hat{\partial}+m)e^{-ip(x-x')}\,\frac{\hat{p}-im}{2E_p} = \\ &= -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^2}\,\frac{p^2+m^2}{2E_p}\,e^{-ip(x-x')}\end{aligned}$$

şi, cum $p=(\vec{p},E_p)$ este *on-shell*, rezultă analogul formulei (4.176)

$$(\hat{\partial}+m)W^{(-)}(x,x') = -i\,(\hat{\partial}+m)G_{\Gamma(-E_p)}(x,x') \equiv 0\,, \tag{4.182}$$

adică $W^{(-)}(x,x')$ este proporţională cu funcţia Green omogenă de frecvenţă negativă, $-E_p$.

În fine, pentru funcţia Jordan-Wigner $W(x,x')$, reprezentarea integrală Lorentz-covariantă a acesteia este de acum clară, din însăşi relaţia de definiţie (4.159), fiindcă putem deforma continuu cercurile $\Gamma(-E_p)$, $\Gamma(E_p)$ până la conturul



în care, în mod evident, integrarea pe segmentul $Im(E)$ nu aduce nici o contribuţie, dat fiind că acesta este parcurs (de două ori) în sensuri opuse. Rămânem astfel cu conturul circular $\Gamma(-E_p, E_p)$ de rază finită, centrat în origine şi înconjurând (în acelaşi sens) polii $\mp E_p$, adică obţinem direct

$$W(x,x') = -iG_{\Gamma(-E_p,E_p)}(x,x')\,, \tag{4.183}$$

ceea ce înseamnă, concret,

$$W(x,x') = \int_{\Gamma(-E_p,E_p)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{\hat{p}+im}{p^2+m^2}\,e^{ip(x-x')}\,,\ \text{cu}\ p=(\vec{p},E)\,. \tag{4.184}$$

În reprezentare integrală pe spaţiul 3-vectorilor impuls $\vec{p}$, obţinem ex-

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

presia

$$W(x,x') = \left(\int_{\frac{1}{2}\Gamma(E_p)} + \int_{-segm\,Im(E)}\right)\left\{\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\hat{p}+im}{p^2+m^2}e^{ip(x-x')}\right\} +$$

$$+ \left(\int_{segm\,Im(E)} + \int_{\frac{1}{2}\Gamma(-E_p)}\right)\left\{\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\hat{p}+im}{p^2+m^2}e^{ip(x-x')}\right\} =$$

$$= \int_{\Gamma(E_p)}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\hat{p}+im}{p^2+m^2}e^{ip(x-x')} + \int_{\Gamma(-E_p)}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\hat{p}+im}{p^2+m^2} =$$

$$= -i\,G_{\Gamma(E_p)}(x,x') - i\,G_{\Gamma(-E_p)}(x,x') =$$

$$= W^{(+)}(x,x') + W^{(-)}(x,x') =$$

$$= -i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\frac{\hat{p}+im}{2E_p}e^{ip(x-x')} + \frac{\hat{p}-im}{2E_p}e^{-ip(x-x')}\right], \tag{4.185}$$

din care rezultă imediat, aplicând operatorul Dirac $\hat{\partial}+m$,

$$(\hat{\partial}+m)W(x,x') = -i\,(\hat{\partial}+m)G_{\Gamma(-E_p,E_p)}(x,x') =$$

$$= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p^2+m^2}{2E_p}\left(e^{ip(x-x')} - e^{-ip(x-x')}\right) \equiv 0, \tag{4.186}$$

deoarece $p = (\vec{p}, E_p)$ este *on-shell*. Deci $W(x,x')$ este (proporţională cu) funcţia Green omogenă şi staţionară, simetrică faţă de contribuţiile celor două frecvenţe (polare), $\pm E_p$. Termenul *staţionară* este utilizat prin abuz de limbaj, fiind justificat într-o oarecare măsură de faptul că, în ultimul rezultat din (4.185), dacă se fac sumările, grupând după $\hat{p}$ şi m, obţinem expresia

$$W(x,x') = -i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,E_p^{-1}\,[\hat{p}\cos(p(x-x')) - m\sin(p(x-x'))]\,, \tag{4.187}$$

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

care nu mai conţine (explicit) termenii "tradiţionali", în calculul în complex, de desemnare a "propagării libere" $e^{ip(x-x')}$ şi, respectiv, conjugatul său $e^{-ip(x-x')}$. În schimb, termenul *simetrică* faţă de contribuţiile frecvenţelor $\pm E_p$ este folosit în sens propriu, deoarece, pe $\Gamma(-E_p, E_p)$, polii sunt înconjuraţi în acelaşi sens, anume cel trigonometric. Dacă, din contra, am inversa sensul pe ramura din stânga şi am colapsa în origine segmentul iniţial de pe $Im(E)$, am obţine conturul în formă de 8 "culcat" pe axa $Re(E)$, care este echivalent topologic cu $-\Gamma(-E_p) \cup \Gamma(E_p) = \underline{\Gamma}(-E_p, E_p)$. Evaluarea funcţiei Green generale pe acest contur conduce la expresia

$$\begin{aligned} G_{\underline{\Gamma}(-E_p,E_p)}(x,x') &= G_{-\Gamma(-E_p)}(x,x') + G_{\Gamma(E_p)}(x,x') = \\ &= G_{\Gamma(E_p)}(x,x') - G_{\Gamma(-E_p)}(x,x') = \\ &= i\left[W^{(+)}(x,x') - W^{(-)}(x,x')\right], \end{aligned} \tag{4.188}$$

care defineşte "partenera" antisimetrică

$$\underline{W}(x,x') = -iG_{\underline{\Gamma}(-E_p,E_p)}(x,x') = \int_{\underline{\Gamma}(-E_p,E_p)} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\hat{p}+im}{p^2+m^2} e^{ip(x-x')} \tag{4.189}$$

a funcţiei Wigner de anticomutare covariantă, $W(x,x')$. Bineînţeles, $\underline{W}(x,x')$ va fi (proporţională cu) o funcţie Green omogenă, staţionară şi antisimetrică faţă de contribuţia polilor $\pm E_p$. În reprezentarea integrală pe 3-spaţiul impulsurilor, vom avea

$$\underline{W}(x,x') = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\frac{\hat{p}+im}{2E_p} e^{ip(x-x')} - \frac{\hat{p}-im}{2E_p} e^{-ip(x-x')}\right], \tag{4.190}$$

adică, explicitând sumările în manieră analogă celei din (4.187), rezultă

$$\underline{W}(x,x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p^{-1}\left[\hat{p}\sin(p(x-x')) + m\cos(p(x-x'))\right], \tag{4.190'}$$

ceea ce justifică din nou (dar tot "într-o oarecare măsură") utilizarea termenului *staţionară.*

Înainte de a trece la analiza contracţiei cronologice şi a propagatorului Feynman-Dirac, să mai subliniem două aspecte. Primul, de ordin matematic şi aproape evident, este acela că toate funcţiile Green omogene ale ecuaţiei Dirac, definite până acum, sunt funcţii singulare, deci trebuie interpretate în sens generalizat, ca distribuţii. Ultrasingularitatea se manifestă la coincidenţa $x = x'$ a celor două evenimente, când avem, pe rând,

$$\text{a)}\quad \left[W^{(+)}(x,x')\right]_{x=x'} = \left[W^{(+)}(x-x')\right]_{x=x'} = W^{(+)}(0) =$$

$$= \underbrace{-i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\gamma^\mu p_\mu}{2E_p}}_{0} + i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\gamma^4 E_p - im}{2E_p},$$

$$\text{b)}\quad \left[W^{(-)}(x,x')\right]_{x=x'} = \left[W^{(-)}(x-x')\right]_{x=x'} = W^{(-)}(0) =$$

$$= \underbrace{-i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\gamma^\mu p_\mu}{2E_p}}_{0} + i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\gamma^4 E_p + im}{2E_p}, \qquad (4.191)$$

adică, utilizând şi formulele (4.187), (4.190′),

$$\text{a)}\quad W^{(+)}(0) = \frac{i}{2}\gamma^4\left(\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\right) + \frac{m}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_p^{-1}$$

$$\text{b)}\quad W^{(-)}(0) = \frac{i}{2}\gamma^4\left(\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\right) - \frac{m}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_p^{-1}$$

$$\text{c)}\quad W(0) = i\gamma^4\left(\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\right)$$

$$\text{d)}\quad \underline{W}(0) = m\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_p^{-1}. \qquad (4.192)$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În ceea ce priveşte termenii *leader*, mărimile $W^{(\pm)}(0)$ şi $W(0)$ sunt ultraviolet-divergente de tip ternar,

$$W^{(\pm)}(0;\Lambda >> m) \approx \frac{\Lambda^3}{12\pi^2}\beta$$
$$W(0;\Lambda >> m) \approx \frac{\Lambda^3}{6\pi^2}\beta\,, \tag{4.193}$$

unde Λ este parametrul de regularizare *cut-off*, β este a patra matrice Dirac, iar $\underline{W}(0)$ este doar cuadratic ultraviolet-divergentă,

$$\underline{W}(0;\Lambda) \approx \frac{m\Lambda^2}{4\pi^2}\,. \tag{4.194}$$

Al doilea aspect pe care dorim să-l subliniem este de ordin fizic fundamental şi se referă la faptul că funcţia Jordan-Wigner de anticomutare covariantă $W(x,x')$, se anulează pe orice interval de gen spaţial

$$(x-x')^2 = \delta_{\mu\nu}(x^\mu - x'^\mu)(x^\nu - x'^\nu) - (t-t')^2 > 0\,. \tag{4.195}$$

Aceasta exprimă respectarea principiului de microcauzalitate în teoria cuantică a câmpului spinorial. În general, pentru câmpurile fermionice, din cauza principiului lui Pauli, cuantificarea trebuie făcută prin relaţii de anticomutare, altfel fiind violată microcauzalitatea. Numai observabilele fermionice, separate prin intervale de gen temporal, $(x-x')^2 < 0$ (adică "situate" în interiorul conului luminos al evenimentului x'), pot fi corelate cauzal, adică pot avea anticomutatorul nenul. Pentru demonstrarea acestei afirmaţii este suficient să alegem intervalul de gen spaţial $t = t'$, cu $\vec{x} \neq \vec{x}'$ (arbitrari). Avem atunci, din (4.187),

$$[W(x,x')]_{t=t'} = W(\vec{x}-\vec{x}') = i\left(\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\cos[\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')]\right)\gamma^4\,, \tag{4.196}$$

BCU "ALEXANDRU IOAN CUZA" UNIVERSITY LIBRARY

dat fiind că restul integralelor se anulează, conţinând funcţii impare. Din (4.196), rezultă imediat

$$W(\vec{x}-\vec{x}') = \left(\frac{i}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} + \frac{i}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\right)\gamma^4 , \tag{4.197}$$

de unde, trecând $\vec{p}$ în $-\vec{p}$ în a doua integrală, obţinem expresia

$$W(\vec{x}-\vec{x}') = i\gamma^4\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \equiv 0\,, \text{ pentru } \vec{x}\neq\vec{x}'\,. \tag{4.198}$$

Bineînţeles, la relaţia (4.198) puteam ajunge direct, utilizând definiţia (4.157) şi relaţia de anticomutare la timpi egali Jordan-Pauli-Wigner (4.28.a). Într-adevăr, avem

$$W^{a}_{\cdot b}(\vec{x}-\vec{x}') = \left\{\psi^{a}(\vec{x},t)\,,\, \psi^{\dagger}_{c}(\vec{x}',t)\,\beta^{c}_{\cdot b}\right\} = \beta^{c}_{\cdot b}\left\{\psi^{a}(\vec{x},t)\,,\, \psi^{\dagger}_{c}(\vec{x}',t)\right\}$$

adică

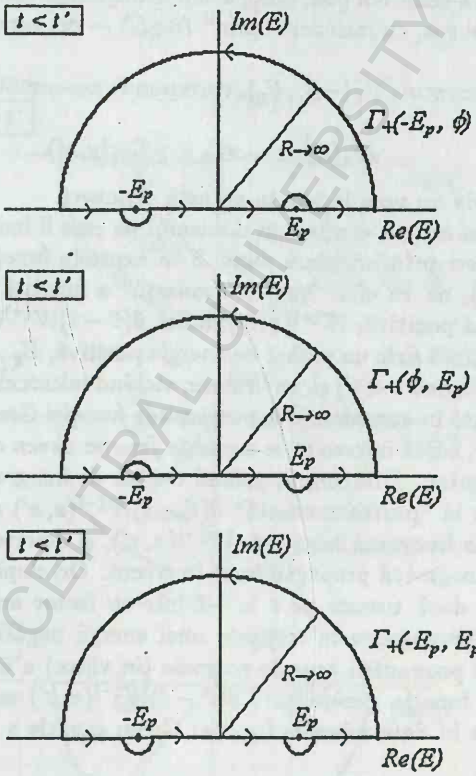
$$W^{a}_{\cdot b}(\vec{x}-\vec{x}') = \beta^{c}_{\cdot b}\,\delta^{a}_{\cdot c}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') = i\,(-i\beta^{a}_{\cdot b})\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') = i(\gamma^4)^{a}_{\cdot b}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\,,$$

ceea ce reprezintă expresia (4.198) scrisă pe fiecare componentă matriceală $(\cdot)^{a}_{\cdot b}$.

Felul în care tocmai am introdus noţiunea de microcauzalitate poate părea puţin cam neconvingător, deoarece, intuitiv vorbind, când ne referim la cauzalitate în general, ne-am aştepta să lucrăm explicit cu intervale de gen temporal, în care ordonarea se face după principiul "întâi cauza şi pe urmă efectul". Or, în scurta expunere de mai sus, am utilizat un interval de gen spaţial şi am arătat că o entitate deloc intuitivă, cum este anticomutatorul operatorilor de câmp Dirac, se anulează. Desigur, logica demonstraţiei este corectă în ceea ce priveşte imposibilitatea corelării cauzale a observabilelor "situate" în afara conului luminos al unui eveniment dat, dar justificarea microcauzalităţii este oarecum indirectă, bazată, ca să spunem aşa, pe un contraexemplu. De

BCU CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

aceea, în cele ce urmează, este necesară impunerea ordonării cronologice a celor două evenimente şi concretizarea semnificaţiei fizice a funcţiilor de anticomutare covariantă $W^{(+)}(x, x')$ şi a consecinţelor ce decurg din acestea, prin prisma unei astfel de ordonări.



BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Fie, deci, $t - t' < 0$. În acest caz, evenimentul x este în trecutul absolut al evenimentului x', adică îi este anterior. Din expresia (4.170) a părţii temporale a exponenţialei $e^{ip(x-x')}$, observăm că ramura $Im(E) \to \infty$ este "accesibilă" integrării în spaţiul complex al variabilei E, în timp ce ramura $Im(E) \to -\infty$ este complet interzisă, făcând ca integrala (după E în (4.168)) să fie divergentă. Cu luarea în considerare a celor doi poli, $\mp E_p$, avem la dispoziţie contururile de integrare de mai sus, cu închidere "prin" $Im(E) \to \infty$, care dau contribuţii netriviale.

Ultimul contur, $\Gamma_+(-E_p, E_p)$, corespunde aşa-numitei *funcţii Green avansate*,

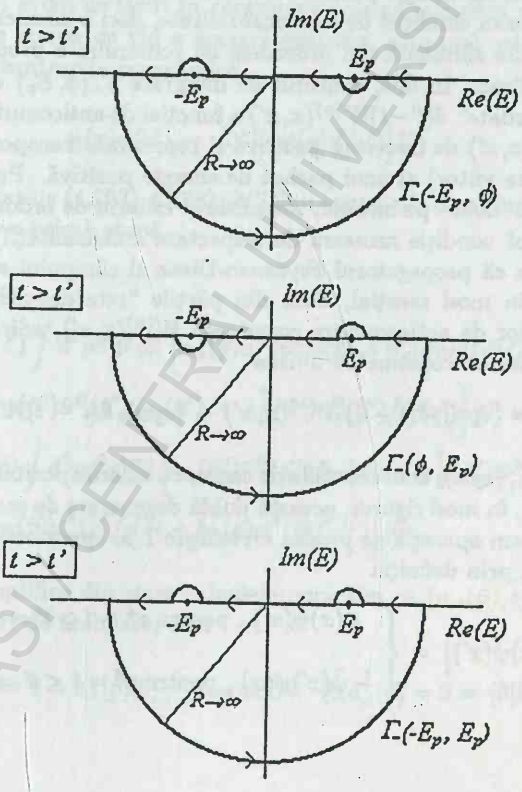
$$G_A(x,x') = G_{\Gamma_+(-E_p,E_p)}(x,x') \tag{4.199}$$

asupra căreia nu vom insista în această expunere.

Al doilea contur conţine, în domeniul pe care îl închide, doar polul $E = E_p$, deci prin integrare după E în expresia funcţiei Green generale (4.168), ne va oferi "partea avansată" a funcţiei Green omogene de frecvenţă pozitivă, $W^{(+)}(x,x')$, adică $\theta(t'-t)W^{(+)}(x,x')$. Aceasta, însă, reprezintă fizic un pachet de energie pozitivă, E_p , care se propagă în trecut (fiindcă $t < t'$) şi, ca urmare, violând microcauzalitatea, ea nu poate fi luată în considerare în construirea funcţiei Green de propagare a câmpului, adică în ceea ce se numeşte *funcţia Green cauzală* sau, simplu, *propagator*. Din contra, primul contur de integrare, $\Gamma_+(-E_p, \phi)$, va conduce la "partea avansată" $\theta(t'-t)W^{(-)}(x,x')$ a funcţiei Green omogene de frecvenţă negativă, $W^{(-)}(x,x')$, şi descrie fizic un pachet de energie negativă propagându-se în trecut. Or, după cum este lesne de înţeles, dacă trecem pe t în $-t$ într-un factor armonic de forma $\exp[iE_pt]$, propagarea în trecut a unei energii negative este complet echivalentă propagării cauzale normale (în viitor) a unei energii pozitive. Deci funcţia generalizată $\theta(t'-t)W^{(-)}(x,x')$ va trebui luată în considerare în determinarea funcţiei Green cauzale a câmpului spinorial.

Fie acum al doilea caz (şi ultimul posibil), $t - t' > 0$. Evenimentul

x este în viitorul absolut al evenimentului x' şi, astfel, orice formă de energie pozitivă va trebui să se propage de la x' la x. De data aceasta, ramura $Im(E) \to -\infty$ este "accesibilă" (iar $Im(E) \to \infty$ interzisă) şi avem la dispoziţie următoarele contururi de integrare cu contribuţii netriviale.



BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Analog conturului $\Gamma_+(-E_p, E_p)$, conturul $\Gamma_-(-E_p, E_p)$ va conduce la *funcţia Green retardată*

$$G_R(x,x') = G_{\Gamma_-(-E_p,E_p)}(x,x') \,, \tag{4.200}$$

de care, însă, nu ne vom ocupa acum. Primul contur, $\Gamma_-(-E_p, \phi)$, ne oferă "partea retardată" a funcţiei Green omogene de frecvenţă negativă $W^{(-)}(x,x')$, adică $\theta(t'-t)W^{(-)}(x,x')$. Ea descrie un pachet de energie negativă propagându-se în viitor, ceea ce este echivalent transportului de energie pozitivă în trecut. Evident, aşa ceva este imposibil, în baza condiţiei de microcauzalitate, deci o asemenea funcţie Green trebuie eliminată din procedeul de construire a propagatorului Feynman-Dirac. În fine, conturul de integrare $\Gamma_-(\phi, E_p)$ corespunde "părţii retardate" $\theta(t'-t)W^{(+)}(x,x')$ a funcţiei de anticomutare covariantă $W^{(+)}(x,x')$ de frecvenţă pozitivă şi reprezintă transportul cauzal normal (spre viitor) al unui pachet de energie pozitivă. Prin urmare, bazându-ne "doar" pe intuiţie, simţ fizic şi criteriu de ordonare cronologică (drept condiţie necesară de respectare a cauzalităţii), ajungem la concluzia că propagatorul Feynman-Dirac al câmpului spinorial va fi format, în mod esenţial, doar din părţile "retardat-avansate" ale funcţionalelor de anticomutare covariantă $W^{(\pm)}(x,x')$, adică se va exprima sub forma combinaţiei liniare

$$S_F(x,x') = (sgn)_1\,\theta(t-t')W^{(+)}(x,x') + (sgn)_2\,\theta(t'-t)W^{(-)}(x,x') \,, \tag{4.201}$$

unde $(sgn)_1, (sgn)_2$ sunt funcţiile de semn, cu valorile posibile ± 1. Pentru a ridica, în mod riguros, această dublă degenerare de semn, trebuie să introducem operaţia de *produs cronologic* T al operatorilor de câmp $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, prin definiţia

$$\mathrm{T}\left[\psi(x)\bar{\psi}(x')\right] = \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(x') \,, \text{ pentru } x^4 = t > t' = x'^4 \\ -\bar{\psi}(x')\psi(x) \,, \text{ pentru } x^4 = t < t' = x'^4 \end{cases} . \tag{4.202}$$

Semnul "−" care apare la permutarea celor doi operatori de câmp este o diferenţă specifică fundamentală faţă de cazul aceleiaşi operaţii, aplicată câmpurilor bozonice (în speţă, "scalarul" din capitolul anterior) şi se datorează caracterului anticomutativ al operatorilor fermionici. Cu ajutorul funcţiei-treaptă (*Heaviside*) θ, produsul cronologic (4.202) se poate reprezenta complet sub forma

$$\mathrm{T}\left[\psi(x)\bar{\psi}(x')\right] = \theta(t-t')\psi(x)\bar{\psi}(x') - \theta(t'-t)\bar{\psi}(x')\psi(x) \qquad (4.203)$$

şi tot ce mai avem de făcut în continuare este să calculăm valoarea de aşteptare pe starea de vid a acestui operator, care mai este denumit, pe scurt, şi *contracţie cronologică*

$$\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(x') = \langle 0|\mathrm{T}\left[\psi(x)\bar{\psi}(x')\right]|0\rangle\,. \qquad (4.204)$$

Utilizând relaţiile (4.203), (3.38) şi (3.50), contracţia cronologică (4.204) se scrie, într-o primă etapă,

$$\begin{aligned}
&\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(x') = \\
&= \theta(t-t')\int d^3p d^3p' \langle 0|\left[a_A(\vec{p})u^A(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) + b_A^\dagger(\vec{p})v^A(\vec{p})\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right] \\
&\qquad \left[b_B(\vec{p}')\bar{v}^B(\vec{p}')f_{\vec{p}'}(x') + a_B^\dagger(\vec{p}')\bar{u}^B(\vec{p}')\bar{f}_{\vec{p}'}(x')\right]|0\rangle - \\
&- \theta(t'-t)\int d^3p d^3p' \langle 0|\left[b_B(\vec{p}')\bar{v}^B(\vec{p}')f_{\vec{p}'}(x') + a_B^\dagger(\vec{p}')\bar{u}^B(\vec{p}')\bar{f}_{\vec{p}'}(x')\right] \\
&\qquad \left[a_A(\vec{p})u^A(\vec{p})f_{\vec{p}}(x) + b_A^\dagger(\vec{p})v^A(\vec{p})\bar{f}_{\vec{p}}(x)\right]|0\rangle\,. \qquad (4.205)
\end{aligned}$$

Pentru a simplifica din start calculele, amintim că $\{a_A(\vec{p}), b_A(\vec{p})\}_{A=1,2}$ sunt operatori de anihilare, deci

$$a_A(\vec{p})|0\rangle = 0 = b_A(\vec{p})|0\rangle\,, \quad \text{respectiv} \quad \langle 0|a_A^\dagger(\vec{p}) = 0 = \langle 0|b_A^\dagger(\vec{p})\,. \qquad (4.206)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rămânem, astfel, sub prima integrală, numai cu un termen de forma $\langle 0|a_A(\vec{p})a_B^\dagger(\vec{p}'|0\rangle$, iar sub a doua integrală, cu un termen de tipul $\langle 0|b_B(\vec{p}')b_A^\dagger(\vec{p}|0\rangle$, adică (4.205) devine

$$\begin{aligned}\widehat{\psi(x)\bar{\psi}}(x') &= \\ &= \theta(t-t')\int d^3p d^3p' \langle 0|a_A(\vec{p})a_B^\dagger(\vec{p}')|0\rangle\, u^A(\vec{p})\bar{u}^B(\vec{p}')f_{\vec{p}}(x)\bar{f}_{\vec{p}'}(x') - \\ &- \theta(t'-t)\int d^3p d^3p' \langle 0|b_B(\vec{p}')b_A^\dagger(\vec{p})|0\rangle\, v^A(\vec{p})\bar{v}^B(\vec{p}')f_{\vec{p}'}(x')\bar{f}_{\vec{p}}(x)\,.\end{aligned} \tag{4.207}$$

Dar,

$$\langle 0|a_A(\vec{p})a_B^\dagger(\vec{p}')|0\rangle + \langle 0|a_B^\dagger(\vec{p}')a_A(\vec{p})|0\rangle = \delta_{AB}\,\delta(\vec{p}-\vec{p}')\langle 0|0\rangle$$

cu $\langle 0|0\rangle = 1$, adică

$$\langle 0|a_A(\vec{p})a_B^\dagger(\vec{p}')|0\rangle = \delta_{AB}\,\delta(\vec{p}-\vec{p}') \tag{4.208}$$

şi, respectiv,

$$\langle 0|b_B(\vec{p}')b_A^\dagger(\vec{p}')|0\rangle + \langle 0|b_A^\dagger(\vec{p})b_B(\vec{p}')|0\rangle = \delta_{BA}\,\delta(\vec{p}'-\vec{p})\langle 0|0\rangle$$

adică

$$\langle 0|b_B(\vec{p}')b_A^\dagger(\vec{p})|0\rangle = \delta_{BA}\,\delta(\vec{p}'-\vec{p})\,. \tag{4.209}$$

Înlocuind în (4.207) relaţiile (4.208, 209) şi filtrând impulsurile $\vec{p}'$, obţinem expresia

$$\begin{aligned}\widehat{\psi(x)\bar{\psi}}(x') &= \theta(t-t')\int d^3p\,\delta_{AB}\,u^A(\vec{p})\bar{u}^B(\vec{p})f_{\vec{p}}(x)\bar{f}_{\vec{p}}(x') - \\ &- \theta(t'-t)\int d^3p\,\delta_{AB}\,v^A(\vec{p})\bar{v}^B(\vec{p})\bar{f}_{\vec{p}}(x)f_{\vec{p}}(x')\,,\end{aligned} \tag{4.210}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

în care observăm că prima integrală este chiar funcţia de anticomutare $W^{(+)}(x,x')$ de frecvenţă pozitivă, definită în (4.160.a), iar a doua integrală reprezintă chiar funcţia $W^{(-)}(x,x')$ de anticomutare covariantă şi frecvenţă negativă, definită în (4.160.b). Astfel, ajungem la forma concretă de exprimare a contracţiei cronologice a operatorilor $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x')$

$$\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(x') = \theta(t-t')W^{(+)}(x,x') - \theta(t'-t)W^{(-)}(x,x') . \quad (4.211)$$

Dacă facem convenţia de a identifica propagatorul Feynman-Dirac cu contracţia cronologică, atunci, în mod evident, relaţia (4.211) ridică total degenerarea de semn din expresia (4.201), anume, $(sgn)_1 = -(sgn)_2 = 1$. Dar, în aceste condiţii de identificare, una dintre notaţiile "$\frown$" sau "S_F" ar deveni superfluă şi nu ar aduce nimic nou, decât confuzii. Se pune atunci întrebarea: care dintre ele trebuie păstrată şi ce este de făcut cu cealaltă? La prima parte a întrebării, răspunsul este clar: în timp ce notaţia "S_F" a fost introdusă prin (4.201), doar pe baza unui "raţionament de plauzibilitate" ce asigura fizic-intuitiv respectarea microcauzalităţii, prin imposibilitatea transportului de energie pozitivă în trecut, noţiunea (şi nu doar notaţia) de contracţie cronologică $\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(x')$ are o semnificaţie fizico-axiomatică mai profundă, de tranziţie vid-vid în sensul definiţiei (4.204), are încorporată riguros ordonarea cronologică, prin definirea într-o manieră elegantă, de la bun început, a operaţiei T de produs cronologic şi bineînţeles, regăseşte, în formă exactă (4.211), rezultatul semi-intuitiv (4.201). La a doua parte a întrebării, răspunsul are, preponderent, un caracter formal. Dacă hotărâm să nu mai facem nici o altă convenţie, atunci notaţia "S_F" poate fi sau eliminată, sau utilizată în mod strict pentru a desemna contracţia cronologică, fiindcă este evident mai comodă decât notaţia $\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(x')$. Există, însă, şi o altă soluţie, de fapt radicală şi bine justificată matematic, anume aceea de a defini propagatorul Feynman-Dirac prin relaţia generală

$$S_F(x,x') = i\langle 0|\mathrm{T}\left[\psi(x)\bar{\psi}(x')\right]|0\rangle . \quad (4.212)$$

Generalitatea definiţiei (4.212) provine din faptul că, în toată Teoria Cuantică a Câmpurilor, propagatorul Feynman se defineşte exact în acelaşi mod, independent de natura bozonică sau fermionică a câmpului,

$$Propagator_F(x,x') = i\,\langle 0|\mathrm{T}\,[C\hat{a}mp(x)\cdot Adjunct(C\hat{a}mp)(x')]\,|0\rangle\,,$$

aspect pe care l-am întâlnit deja la cuantificarea câmpului scalar. Desigur, din punct de vedere matematic, fiind vorba de o definiţie, ea nu ar avea nevoie de nici o justificare. Dar fizicianul este obişnuit cu o anumită interpretare a mărimilor şi a relaţiilor cu care lucrează, încât, aproape ca o regulă generală, nu este dispus să memoreze nimic din ceea ce nu decurge logic, din punct de vedere fizico-matematic, din sfera de noţiuni şi relaţii pe care deja le cunoaşte. Să vedem, aşadar, pornind de la contracţia cronologică (4.211), care este justificarea expresiei (4.212) a propagatorului Feynman-Dirac. Ca o răsplată, dacă putem spune aşa, vom obţine şi reprezentarea integrală Lorentz-covariantă a acestuia, însoţită de o prescripţie simplă de stabilire a conturului de integrare, anume, aşa-numita *reţetă Feynman de deplasare (shift) infinitezimală* $-i\varepsilon$.

Fie, deci, $\theta(t-t')W^{(+)}(x,x')$. Ea provine din integrarea pe conturul $\Gamma_-(\phi,\, E_p)$ a funcţiei Green neomogene în sensul operatorului Dirac $(\hat{\partial}+m)$, $G(x,x')$ dată de (4.168). În mod analog, $\theta(t'-t)W^{(-)}(x,x')$ provine din integrarea pe $\Gamma_+(-E_p,\phi)$ a aceleiaşi funcţii Green. Avem, aşadar,

$$\begin{aligned}
\text{a)}\quad +\theta(t-t')W^{(+)}(x,x') &= -i\,\theta(t-t')G_{\Gamma(E_p)}(x,x') = \\
&= -i\,G_{\Gamma_-(\phi,E_p)}(x,x') \\
\text{b)}\quad -\theta(t'-t)W^{(-)}(x,x') &= i\,\theta(t'-t)G_{\Gamma(-E_p)}(x,x') = \\
&= -i\,G_{-\Gamma_+(-E_p,\phi)}(x,x')\,, \qquad (4.213)
\end{aligned}$$

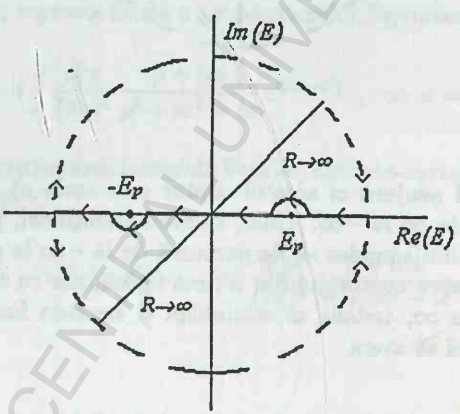
adică

$$\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(x') = -i\left[G_{\Gamma_-(\phi,E_p)}(x,x') + G_{-\Gamma_+(-E_p,\phi)}(x,x')\right], \quad (4.214)$$

deci

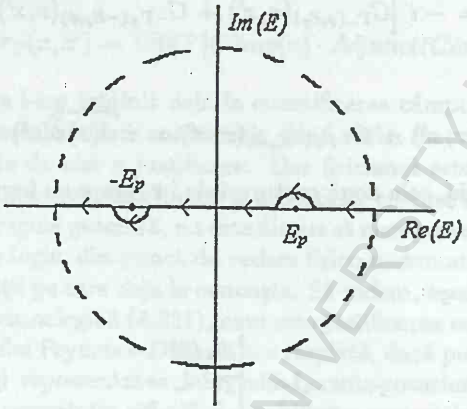
$$G_{\Gamma_-(\phi,E_p)}(x,x') + G_{-\Gamma_+(-E_p,\phi)}(x,x') = i\,\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(x'). \quad (4.215)$$

Prin superpoziţie, cele două contururi de integrare au forma din figura



şi cum integrarea pe semicercurile $R \to \infty$ nu aduce nici o contribuţie, fiindcă tinde la zero ca $e^{-\infty}$ (de aceea le-am şi reprezentat cu linie întreruptă), rămânem, de fapt, cu evaluarea funcţiei Green (4.168) pe conturul din figura

BCU Cluj / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

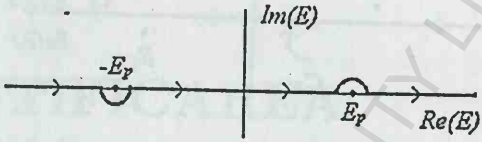


Dar singurul neajuns al acestui contur este acela că axa $Re(E)$ este parcursă de la ∞ la $-\infty$. Cum, în mod tradiţional, preferăm ca axa reală a planului complex să fie parcursă de la $-\infty$ la ∞, rezultă că, o dată cu alegerea conturului din ultima figură, dar cu sensul "ortodox" de la $-\infty$ la ∞, trebuie să schimbăm şi semnele funcţiei Green din (4.168), adică să avem

$$S_F(x,x') = -i\int_{C'_F} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{\hat{p}+im}{p^2+m^2}\,e^{ip(x-x')}, \qquad (4.216)$$

unde, pentru claritatea expunerii, C'_F este drumul din figura de mai jos:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



În fine, acum urmează "reţeta lui Feynman": să integrăm pe axa $Re(E)$ de la $-\infty$ la ∞, deplasând cu $-i\varepsilon$ numitorul p^2+m^2 din (4.216). Obţinem, astfel, expresia finală a propagatorului Feynman-Dirac

$$S_F(x,x') = -i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{\hat{p}+im}{p^2+m^2-i\varepsilon}\,e^{ip(x-x')}\ ,\ \text{cu}\ \varepsilon=0_+ \qquad (4.217)$$

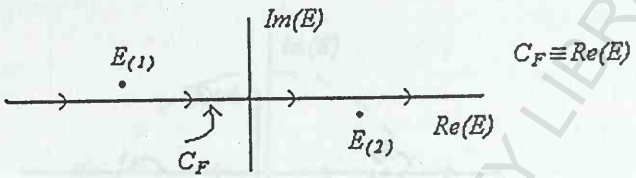
şi, respectiv, reprezentarea integrală Fourier, Lorentz-covariantă, a contracţiei cronologice

$$\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(x') = -i\,S_F(x,x') = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{\hat{p}+im}{p^2+m^2-i\varepsilon}\,e^{ip(x-x')}\,. \qquad (4.217')$$

Prin efectuarea deplasării infinitezimale $-i\varepsilon$, polii devin

$$E_{(1)} = -\left[E_p^2-i\varepsilon\right]^{1/2} \approx -E_p+i\eta\ ;\ E_{(2)} = \left[E_p^2-i\varepsilon\right]^{1/2} \approx E_p-i\eta\,,$$

cu $\eta=\varepsilon/(2E_p)$, adică în planul complex al variabilei E avem reprezentarea Feynman



iar imaginea Fourier a propagatorului Feynman-Dirac are expresia simplă,

$$S_F(p) = -\frac{i}{(2\pi)^2}\frac{\hat{p}+im}{p^2+m^2-i\varepsilon}. \qquad (4.218)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul 5

CUANTIFICAREA CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

5.1 Câmpul electromagnetic în etalonare radiativă

A. 4-potenţialul şi tensorul câmpului

După cum se cunoaşte, pentru obţinerea unică a 4-potenţialului $A(x^i)$ ca soluţie a ecuaţiilor Maxwell (pentru câmpul liber)

$$F^{ik}{}_{,k} = 0\,,\ F_{ik} = A_{k,i} - A_{i,k}\,,\ F^{ik} = \eta^{il}\eta^{km}F_{lm}\,, \qquad (1.1)$$

acestuia trebuie să i se impună o condiţie suplimentară,

$$A^i{}_{,i} = 0\,, \qquad (1.2)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

numită *condiţia Lorentz de etalonare* $U(1)$, care este justificată de invarianţa lagrangeianului câmpului electromagnetic liber

$$\mathcal{L}[A] = \frac{1}{4} F^{ik} F_{ik} , \tag{1.3}$$

la acţiunea transformărilor *gauge* $U(1)$ ale conexiunii $A : M_4 \to U(1)$ a acestui grup, şi anume,

$$A_i \to A_i + f_{,i} , \ (\forall) f : M_4 \to \mathbf{R} . \tag{1.4}$$

În studiul clasic al câmpului electromagnetic "real", adică al aceluia care se propagă în spaţiu sub formă de unde electromagnetice, este deosebit de convenabilă aşa-numita *etalonare de radiaţie*, în care potenţialul electric (al câmpului) este zero, adică

$$A^4(x^i) = - A_4(x^i) = 0 . \tag{1.5}$$

Evident, împreună cu condiţia Lorentz (1.2), etalonarea radiativă (1.5) conduce imediat la constrângerea

$$\nabla \cdot \vec{A} = A^{\mu}{}_{,\mu} = 0 , \tag{1.6}$$

cunoscută în literatura de specialitate sub numele de *etalonare Coulomb* sau *gauge transversal*, deoarece, pentru componente de forma

$$A^{\mu} = a^{\mu} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} , \tag{1.7}$$

rezultă

$$k_{\mu} a^{\mu} = \vec{k} \cdot \vec{a} = 0 , \tag{1.8}$$

adică potenţialul vector este permanent ortogonal la direcţia sa de propagare $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \frac{\vec{k}}{\omega}$.

Prin impunerea condiţiei (1.5), densitatea de lagrangeian (1.3) se "despică" în

$$\mathcal{L}[A] = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} A_{\mu,4} A_{\mu,4} , \tag{1.9}$$

dat fiind că

$$F_{\mu 4} = -A_{\mu,4} = -F^{\mu 4}\,. \tag{1.10}$$

De asemenea, în urma acestei descompuneri, componentele

$$T_{ik} = F_i^{\ l} F_{kl} - \frac{1}{4}\eta_{ik} F^{lm} F_{lm} \tag{1.11}$$

ale tensorului conservativ impuls-energie al câmpului Maxwell iau forma concretă

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad T_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda}F_{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} - \left[A_{\mu,4}A_{\nu,4} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}A_{\lambda,4}A_{\lambda,4}\right]\\
&\text{b)}\quad T_{\mu 4} = F_{\mu\lambda}A_{\lambda,4}\\
&\text{c)}\quad T_{44} = \frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}A_{\lambda,4}A_{\lambda,4}\,,
\end{aligned} \tag{1.12}$$

iar dintre componentele generale ale tensorului densităţii de spin a câmpului electromagnetic

$$\sigma^{ikl} = A^{[i}F^{k]l}\,, \tag{1.13}$$

rămân algebric esenţiale doar

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \sigma^{\mu\nu\lambda} = A^{[\mu}F^{\nu]\lambda}\\
&\text{b)}\quad \sigma^{\mu\nu 4} = A_{[\mu}A_{\nu],4}\\
&\text{c)}\quad \sigma^{4\mu\nu} = A_\mu A_{\nu,4}\,.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Avem acum toate elementele pentru a trece la studiul proprietăţilor de radiaţie ale câmpului electromagnetic, aşa cum reies ele din soluţiile $A_\mu(x^i)$ ale ecuaţiilor Euler pentru lagrangeianul (1.9) şi din integralele prime ale mişcării, obţinute prin intermediul densităţilor de impuls şi energie (1.12.b, c) şi, respectiv, de spin (1.14.c).

Să începem acum cu ecuaţiile Euler-Lagrange

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{i,k}}\right)_{,k} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_i} = 0\,. \tag{1.15}$$

BCU IAŞI - CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

Dat fiind că $A_4 = 0$, acestea se reduc la

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}}\right)_{,\nu} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,4}}\right)_{,4} = 0\,, \tag{1.16}$$

deoarece, în mod evident, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} \equiv 0$. Avem imediat, din (1.9),

$$\text{a)}\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = -F^{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$$
$$\text{b)}\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,4}} = -A_{\mu,4}\,, \tag{1.17}$$

deci, într-o primă etapă, obţinem pentru ecuaţiile (1.16) expresia

$$F_{\mu\nu,\nu} + A_{\mu,44} = 0\,. \tag{1.18}$$

Cum

$$F_{\mu\nu,\nu} = A_{\nu,\mu\nu} - A_{\mu,\nu\nu} = (A_{\nu,\nu})_{,\mu} - \Delta A_\mu\,, \tag{1.19}$$

rezultă, din (1.18) şi condiţia de *gauge* transversal (1.6), ecuaţia de propagare a 3-potenţialului

$$\Box A_\mu = 0\,,\ \text{cu}\ \Box = \Delta - \partial_t^2\,. \tag{1.20}$$

Căutând soluţia sub forma integralei Fourier

$$A_\mu(x^i) = \int d^3k\, d\omega\, A_\mu(\vec{k},\omega)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\,, \tag{1.21}$$

obţinem, din (1.20), ecuaţia

$$\int d^3k\, d\omega\, A_\mu(\vec{k},\omega)\, \left[\omega^2 - |\vec{k}|^2\right]\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = 0\,, \tag{1.22}$$

din care rezultă că amplitudinile spectrale $A_\mu(\vec{k},\omega)$ pot fi diferite de zero numai pe pătura rezolventă

$$\omega^2 - |\vec{k}|^2 = 0 \;\Rightarrow\; \omega = \pm|\vec{k}|\,, \tag{1.23}$$

BCU "I. C. BRĂTIANU" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

în rest, adică în afara ei, ele trebuind să fie obligatoriu nule. Deci vom avea

$$A_\mu(\vec{k},\omega) = A_\mu(\vec{k})\,\delta(\omega^2 - |\vec{k}|^2)\,, \tag{1.24}$$

pentru ca integrala din (1.21) să nu fie identic nulă. Înlocuind (1.24) în (1.21) şi integrând după ω, aplicând proprietatea

$$\delta(\omega^2 - |\vec{k}|^2) = \frac{\delta(\omega - |\vec{k}|)}{2|\vec{k}|} + \frac{\delta(\omega + |\vec{k}|)}{2|\vec{k}|} \tag{1.25}$$

a funcţionalei Dirac când argumentul acesteia este o funcţie, ajungem la următoarea reprezentare Fourier a componentelor potenţialului vector:

$$A_\mu(x^i) = \int \frac{d^3k}{2|\vec{k}|}\, A_\mu(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - |\vec{k}|t)} + \int \frac{d^3k}{2|\vec{k}|}\, A_\mu(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + |\vec{k}|t)}\,. \tag{1.26}$$

Trecând pe $\vec{k}$ în $-\vec{k}$ în a doua integrală şi considerând (în mod natural) $k_4 = -|\vec{k}|$, aducem soluţia (1.26) a ecuaţiei (1.20) la forma unei descompuneri ireductibile după modurile de frecvenţă pozitivă e^{ikx} şi, respectiv, negativă e^{-ikx}, adică

$$A_\mu(x^i) = \int \frac{d^3k}{2|\vec{k}|}\, \left[A_\mu(\vec{k})\, e^{ikx} + A^*_\mu(\vec{k})\, e^{-ikx}\right]\,, \tag{1.27}$$

unde $A^*_\mu(\vec{k}) = A_\mu(-\vec{k})$, pentru a asigura caracterul real al câmpului.

Pentru o mai bună interpretare fizică a rezultatelor pe care le vom obţine din estimarea integralelor prime ale mişcării câmpului considerat, este recomandabil să normăm corespunzător modurile de frecvenţă din (1.27). În acest sens, ne aducem aminte de la studiul câmpului scalar că, o dată cu introducerea produsului scalar relativist definit în Capitolul 3

$$(f\,,\,g) = i\int [f^*g_{,4} - f^*_{,4}\,g]\,d^3x\,, \tag{1.28}$$

pentru orice două funcţii $f, g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{C}$, modurile

$$u_{\vec{k}}(x^i) = \frac{(2\pi)^{-3/2}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} e^{ikx}$$

$$, \text{ cu } k_4 = -\omega_{\vec{k}}\,, \ \omega_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$$

$$u^*_{\vec{k}}(x^i) = \frac{(2\pi)^{-3/2}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} e^{-ikx} \tag{1.29}$$

formau un set ortonormal

$$\left(u_{\vec{k}'}(x^i)\,,\, u_{\vec{k}}(x^i)\right) = \delta(\vec{k}' - \vec{k})\,, \tag{1.30}$$

de soluţii fundamentale ale ecuaţiei

$$\Box u_{\vec{k}}(x) = 0\,. \tag{1.31}$$

Comparând pulsaţia din (1.23) cu cea din (1.29), rezultă $m = 0$ în cazul câmpului electromagnetic (aşa cum trebuie, deoarece fotonii au masa de repaus nulă) şi, în plus, introducând modurile ortonormale

$$f_{\vec{k}}(x^i) = \frac{(2\pi)^{-3/2}}{\sqrt{2|\vec{k}|}} e^{ikx}\,, \text{ cu } f^*_{\vec{k}}(x^i) = \frac{(2\pi)^{-3/2}}{\sqrt{2|\vec{k}|}} e^{-ikx}\,, \tag{1.32}$$

putem "rescala" amplitudinile spectrale $A_\mu(\vec{k})$ la

$$a_\mu(\vec{k}) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2|\vec{k}|}} A_\mu(\vec{k})\,, \text{ cu } a^*_\mu(\vec{k}) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2|\vec{k}|}} A^*_\mu(\vec{k})\,, \tag{1.33}$$

astfel încât cele trei componente ale potenţialului vector de radiaţie să se exprime simplu sub forma

$$A_\mu(x^i) = \int d^3k \left[a_\mu(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x^i) + a^*_\mu(\vec{k}) f^*_{\vec{k}}(x^i)\right]\,, \tag{1.34}$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

prin intermediul setului complet ortonormal al modurilor de frecvenţă $\left\{f_{\vec{k}}(x)\,,\, f^*_{\vec{k}}(x)\right\}_{\vec{k}\in\mathbb{R}^3}$. Evident, din cauza etalonului transversal (1.6), noile amplitudini $\{a_\mu(\vec{k})\,,\, a^*_\mu(\vec{k})\}_{\mu=\overline{1,3}}$ trebuie să fie ortogonale la direcţia de propagare $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$, adică să satisfacă

$$k_\mu a_\mu(\vec{k}) = 0 \;\Leftrightarrow\; k_\mu a^*_\mu(\vec{k}) = 0\,. \tag{1.35}$$

În fine, suntem într-o poziţie favorabilă estimării, la nivel clasic, a impulsului, energiei şi spinului câmpului electromagnetic. Din (1.32) avem relaţiile simple

$$\begin{aligned} f_{\vec{k},i}(x) &= i\,k_i\, f_{\vec{k}}(x) \\ f^*_{\vec{k},i}(x) &= -i\,k_i\, f^*_{\vec{k}}(x)\,, \end{aligned} \tag{1.36}$$

astfel încât

$$A_{\lambda,4}(x^i) = -i\int d^3k\,|\vec{k}|\,\left[a_\lambda(\vec{k})f_{\vec{k}}(x^i) - a^*_\lambda(\vec{k})f^*_{\vec{k}}(x^i)\right]\,, \tag{1.37}$$

iar

$$\begin{aligned} F_{\mu\lambda}(x^i) &= i\int d^3k\,k_\mu\,\left[a_\lambda(\vec{k})f_{\vec{k}}(x^i) - a^*_\lambda(\vec{k})f^*_{\vec{k}}(x^i)\right] - \\ &- i\int d^3k\,k_\lambda\,\left[a_\mu(\vec{k})f_{\vec{k}}(x^i) - a^*_\mu(\vec{k})f^*_{\vec{k}}(x^i)\right]\,, \end{aligned} \tag{1.38}$$

adică

$$\begin{aligned} F_{\mu\lambda}(x^i) = i\int d^3k\,\Big\{&\left[k_\mu a_\lambda(\vec{k}) - k_\lambda a_\mu(\vec{k})\right] f_{\vec{k}}(x^i) - \\ &- \left[k_\mu a^*_\lambda(\vec{k}) - k_\lambda a^*_\mu(\vec{k})\right] f^*_{\vec{k}}(x^i)\Big\}\,. \end{aligned} \tag{1.39}$$

B. Impulsul câmpului

Cu acestea, impulsul câmpului, definit cu ajutorul densităţii (1.12.b) prin relaţia

$$P_\mu = -\int T_{\mu 4}\,d^3x\,, \tag{1.40}$$

BCU "I. C. BRĂTIANU" / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ia forma concretă (pentru moment, complicată)

$$P_\mu = -\int d^3x\, d^3k\, d^3k' \left\{\left[k_\mu a_\lambda(\vec{k}) - k_\lambda a_\mu(\vec{k})\right] f_{\vec{k}}(x^i) - \left[k_\mu a^*_\lambda(\vec{k}) - k_\lambda a^*_\mu(\vec{k})\right] f^*_{\vec{k}}(x^i)\right\} |\vec{k}'| \left[a_\lambda(\vec{k}') f_{\vec{k}'}(x^i) - a^*_\lambda(\vec{k}') f^*_{\vec{k}'}(x^i)\right], \tag{1.41}$$

pe care o separăm într-o aşa-numită *parte diagonală*

$$P^{(D)}_\mu = \int d^3x\, d^3k\, d^3k' |\vec{k}'| \left[k_\mu a_\lambda(\vec{k}) - k_\lambda a_\mu(\vec{k})\right] a^*_\lambda(\vec{k}') f_{\vec{k}}(x^i) f^*_{\vec{k}'}(x^i) + + \int d^3x\, d^3k\, d^3k' |\vec{k}'| \left[k_\mu a^*_\lambda(\vec{k}) - k_\lambda a^*_\mu(\vec{k})\right] a_\lambda(\vec{k}') f^*_{\vec{k}}(x^i) f_{\vec{k}'}(x^i), \tag{1.42}$$

plus o a doua, *extradiagonală*,

$$P^{(E)}_\mu = -\int d^3x d^3k d^3k' |\vec{k}'| \left[k_\mu a_\lambda(\vec{k}) - k_\lambda a_\mu(\vec{k})\right] a_\lambda(\vec{k}') f_{\vec{k}}(x^i) f_{\vec{k}'}(x^i) - - \int d^3x d^3k d^3k' |\vec{k}'| \left[k_\mu a^*_\lambda(\vec{k}) - k_\lambda a^*_\mu(\vec{k})\right] a^*_\lambda(\vec{k}') f^*_{\vec{k}}(x^i) f^*_{\vec{k}'}(x^i). \tag{1.43}$$

Integralele spaţiale ale produselor de moduri $\left\{f_{\vec{k}}(x^i),\, f^*_{\vec{k}}(x^i)\right\}_{\vec{k}\in\mathbb{R}^3}$ au expresiile

$$\text{a)} \int d^3x\, f_{\vec{k}}(x^i) f_{\vec{k}'}(x^i) = \left[\int d^3x\, f^*_{\vec{k}}(x^i) f^*_{\vec{k}'}(x^i)\right]^* = = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \frac{e^{-i(|\vec{k}|+|\vec{k}'|)t}}{2\sqrt{|\vec{k}||\vec{k}'|}} = \frac{\delta(\vec{k}+\vec{k}')}{2|\vec{k}|} e^{-2i|\vec{k}|t}$$

$$\text{b)} \int d^3x\, f_{\vec{k}}(x^i) f^*_{\vec{k}'}(x^i) = \left[\int d^3x\, f^*_{\vec{k}}(x^i) f_{\vec{k}'}(x^i)\right]^* = = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \frac{e^{-i(|\vec{k}|-|\vec{k}'|)t}}{2\sqrt{|\vec{k}||\vec{k}'|}} = \frac{\delta(\vec{k}-\vec{k}')}{2|\vec{k}|}, \tag{1.44}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \int d^3x\, f_{\vec{k}}(x^i) f_{\vec{k}'}(x^i) = \frac{\delta(\vec{k}+\vec{k}')}{2|\vec{k}|}\, e^{-2i|\vec{k}|t} \\
&\text{b)} \quad \int d^3x\, f^*_{\vec{k}}(x^i) f^*_{\vec{k}'}(x^i) = \frac{\delta(\vec{k}+\vec{k}')}{2|\vec{k}|}\, e^{2i|\vec{k}|t} \\
&\text{c)} \quad \int d^3x\, f_{\vec{k}}(x^i) f^*_{\vec{k}'}(x^i) = \frac{\delta(\vec{k}-\vec{k}')}{2|\vec{k}|} \\
&\text{d)} \quad \int d^3x\, f^*_{\vec{k}}(x^i) f_{\vec{k}'}(x^i) = \frac{\delta(\vec{k}-\vec{k}')}{2|\vec{k}|}\,,
\end{aligned} \tag{1.45}$$

astfel încât partea extradiagonală a impulsului total al câmpului devine

$$\begin{aligned}
P^{(E)}_\mu = &- \int d^3k\, d^3k'\, \frac{|\vec{k}'|}{2|\vec{k}|}\, \delta(\vec{k}+\vec{k}')\, k_\mu a_\lambda(\vec{k}) a_\lambda(\vec{k}')\, e^{-2i|\vec{k}|t} + \\
&+ \int d^3k\, d^3k'\, \frac{|\vec{k}'|}{2|\vec{k}|}\, \delta(\vec{k}+\vec{k}')\, k_\lambda a_\mu(\vec{k}) a_\lambda(\vec{k}')\, e^{-2i|\vec{k}|t} - \\
&- \int d^3k\, d^3k'\, \frac{|\vec{k}'|}{2|\vec{k}|}\, \delta(\vec{k}+\vec{k}')\, k_\mu a^*_\lambda(\vec{k}) a^*_\lambda(\vec{k}')\, e^{2i|\vec{k}|t} + \\
&+ \int d^3k\, d^3k'\, \frac{|\vec{k}'|}{2|\vec{k}|}\, \delta(\vec{k}+\vec{k}')\, k_\lambda a^*_\mu(\vec{k}) a^*_\lambda(\vec{k}')\, e^{2i|\vec{k}|t}\,.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

După aplicarea proprietăţii de filtraj a funcţionalei δ-Dirac, obţinem expresia

$$\begin{aligned}
P^{(E)}_\mu = &- \frac{1}{2} \int d^3k\, k_\mu \left[a_\lambda(\vec{k}) a_\lambda(-\vec{k}) e^{-2i|\vec{k}|t} + a^*_\lambda(\vec{k}) a^*_\lambda(-\vec{k}) e^{2i|\vec{k}|t} \right] - \\
&- \frac{1}{2} \int d^3k \left[a_\mu(-\vec{k}) k_\lambda a_\lambda(\vec{k}) e^{-2i|\vec{k}|t} + a^*_\mu(-\vec{k}) k_\lambda a^*_\lambda(\vec{k}) e^{2i|\vec{k}|t} \right],
\end{aligned} \tag{1.47}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

în care prima integrală se anulează din cauza caracterului impar al integrandului, iar a doua, din cauza condiţiei de *gauge* transversal (1.35). Deci avem

$$P_\mu^{(E)} \equiv 0 \,. \tag{1.48}$$

Pentru partea diagonală a impulsului total al câmpului electromagnetic (de radiaţie) avem

$$\begin{aligned} P_\mu^{(D)} &= \int d^3k\, d^3k' \frac{|\vec{k}'|}{2|\vec{k}|} \delta(\vec{k}-\vec{k}')\, k_\mu a_\lambda(\vec{k}) a_\lambda^*(\vec{k}') + \\ &+ \int d^3k\, d^3k' \frac{|\vec{k}'|}{2|\vec{k}|} \delta(\vec{k}-\vec{k}')\, k_\mu a_\lambda^*(\vec{k}) a_\lambda(\vec{k}') - \\ &- \int d^3k\, d^3k' \frac{|\vec{k}'|}{2|\vec{k}|} \delta(\vec{k}-\vec{k}')\, k_\lambda a_\lambda^*(\vec{k}') a_\mu(\vec{k}) - \\ &- \int d^3k\, d^3k' \frac{|\vec{k}'|}{2|\vec{k}|} \delta(\vec{k}-\vec{k}')\, k_\lambda a_\lambda(\vec{k}') a_\mu^*(\vec{k}) \quad , \end{aligned} \tag{1.49}$$

adică

$$P_\mu^{(D)} = \int d^3k\, k_\mu \sum_{\lambda=1}^{3} |a_\lambda(\vec{x})|^2 - \frac{1}{2} \int d^3k \left[k_\lambda a_\lambda^*(\vec{k}) a_\mu(\vec{k}) - k_\lambda a_\lambda(\vec{k}) a_\mu^*(\vec{k}) \right], \tag{1.50}$$

deci, prin aplicarea etalonului transversal (1.35), obţinem pentru impuls expresia

$$P_\mu = \int d^3k\, k_\mu \sum_{\lambda=1}^{3} |a_\lambda(\vec{k})|^2 \,. \tag{1.51}$$

După cum se observă, la nivelul unei interpretări semi-clasice, impulsul total al câmpului este suma completă (continuă după $\vec{k}$ şi discretă după λ) a impulsurilor "elementare" k_μ, asociate fiecărui mod $a_\lambda(\vec{k})$, cu ponderea $|a_\lambda(\vec{k})|^2$.

BCU Cluj / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

C. Energia câmpului

În cazul energiei totale

$$H = \int T_{44}\, d^3x \tag{1.52}$$

a câmpului Maxwell în etalonarea de radiaţie (1.5), avem, din (1.12.c), expresia de principiu

$$H = \frac{1}{4}\int d^3x\, F_{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\int d^3x\, A_{\lambda,4}\, A_{\lambda,4} \tag{1.53}$$

care, utilizând relaţiile (1.37) şi (1.39), capătă forma

$$\begin{aligned} H \;=\; & -\frac{1}{4}\int d^3x\, d^3k\, d^3k' \\ & \left\{\left[k_\rho a_\sigma(\vec{k}) - k_\sigma a_\rho(\vec{k})\right] f_{\vec{k}}(x^i) - \left[k_\rho a^*_\sigma(\vec{k}) - k_\sigma a^*_\rho(\vec{k})\right] f^*_{\vec{k}}(x^i)\right\} \\ & \left\{\left[k'_\rho a_\sigma(\vec{k}') - k'_\sigma a_\rho(\vec{k}')\right] f_{\vec{k}'}(x^i) - \left[k'_\rho a^*_\sigma(\vec{k}') - k'_\sigma a^*_\rho(\vec{k}')\right] f^*_{\vec{k}'}(x^i)\right\} - \\ & - \frac{1}{2}\int d^3x d^3k d^3k' \,|\vec{k}|\,|\vec{k}'|\, \left[a_\lambda(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x^i) - a^*_\lambda(\vec{k}) f^*_{\vec{k}}(x^i)\right] \\ & \left[a_\lambda(\vec{k}') f_{\vec{k}'}(x^i) - a^*_\lambda(\vec{k}') f^*_{\vec{k}'}(x^i)\right]. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Notând cu $H_{(1)}$ şi, respectiv, $H_{(2)}$ termenii corespunzători celor două integrale multiple, adică

$$H = H_{(1)} + H_{(2)}\,, \tag{1.55}$$

vom avea, pe rând, următoarele părţi diagonale şi, respectiv, extradi-

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

agonale ale acestora

$$
\begin{aligned}
\text{a)}\ H^{(D)}_{(1)} &= \frac{1}{4}\int d^3x\, d^3k\, d^3k'\ \left[k_\rho a_\sigma(\vec{k}) - k_\sigma a_\rho(\vec{k})\right] \\
&\qquad \left[k'_\rho a^*_\sigma(\vec{k}') - k'_\sigma a^*_\rho(\vec{k}')\right] f_{\vec{k}}(x^i) f^*_{\vec{k}'}(x^i) + \\
&+ \frac{1}{4}\int d^3x\, d^3k\, d^3k'\ \left[k_\rho a^*_\sigma(\vec{k}) - k_\sigma a^*_\rho(\vec{k})\right] \\
&\qquad \left[k'_\rho a_\sigma(\vec{k}') - k'_\sigma a_\rho(\vec{k}')\right] f^*_{\vec{k}}(x^i) f_{\vec{k}'}(x^i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{b)}\ H^{(D)}_{(2)} &= \frac{1}{2}\int d^3x\, d^3k\, d^3k'\, |\vec{k}|\, |\vec{k}'|\, a_\lambda(\vec{k}) a^*_\lambda(\vec{k}') f_{\vec{k}}(x^i) f^*_{\vec{k}'}(x^i) + \\
&+ \frac{1}{2}\int d^3x\, d^3k\, d^3k'\, |\vec{k}|\, |\vec{k}'|\, a^*_\lambda(\vec{k}) a_\lambda(\vec{k}') f^*_{\vec{k}}(x^i) f_{\vec{k}'}(x^i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{c)}\ H^{(E)}_{(1)} &= -\frac{1}{4}\int d^3x\, d^3k\, d^3k'\ \left[k_\rho a_\sigma(\vec{k}) - k_\sigma a_\rho(\vec{k})\right] \\
&\qquad \left[k'_\rho a_\sigma(\vec{k}') - k'_\sigma a_\rho(\vec{k}')\right] f_{\vec{k}}(x^i) f_{\vec{k}'}(x^i) - \\
&- \frac{1}{4}\int d^3x\, d^3k\, d^3k'\ \left[k_\rho a^*_\sigma(\vec{k}) - k_\sigma a^*_\rho(\vec{k})\right] \\
&\qquad \left[k'_\rho a^*_\sigma(\vec{k}') - k'_\sigma a^*_\rho(\vec{k}')\right] f^*_{\vec{k}}(x^i) f^*_{\vec{k}'}(x^i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{d)}\ H^{(E)}_{(2)} &= -\frac{1}{2}\int d^3x\, d^3k\, d^3k'\, |\vec{k}|\, |\vec{k}'|\, a_\lambda(\vec{k}) a_\lambda(\vec{k}') f_{\vec{k}}(x^i) f_{\vec{k}'}(x^i) - \\
&- \frac{1}{2}\int d^3x\, d^3k\, d^3k'\, |\vec{k}|\, |\vec{k}'|\, a^*_\lambda(\vec{k}) a^*_\lambda(\vec{k}') f^*_{\vec{k}}(x^i) f^*_{\vec{k}'}(x^i)\,.
\end{aligned}
\tag{1.56}
$$

Utilizând integralele (1.45.a, b), să calculăm, mai întâi, contribuţia păr-

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ţilor extradiagonale şi avem

$$\text{a) } H^{(E)}_{(1)} = -\frac{1}{4}\int d^3k\, d^3k' \frac{\delta(\vec{k}+\vec{k}')}{2|\vec{k}|} \Big[k_\rho k'_\rho a_\sigma(\vec{k})a_\sigma(\vec{k}') + k_\sigma k'_\sigma a_\rho(\vec{k})a_\rho(\vec{k}') - k'_\rho k_\sigma a_\rho(\vec{k})a_\sigma(\vec{k}') - k_\rho k'_\sigma a_\sigma(\vec{k})a_\rho(\vec{k}')\Big] e^{-2i|k|t} -$$

$$-\frac{1}{4}\int d^3k\, d^3k' \frac{\delta(\vec{k}+\vec{k}')}{2|\vec{k}|} \Big[k_\rho k'_\rho a^*_\sigma(\vec{k})a^*_\sigma(\vec{k}') + k_\sigma k'_\sigma a^*_\rho(\vec{k})a^*_\rho(\vec{k}') - k'_\rho k_\sigma a^*_\rho(\vec{k})a^*_\sigma(\vec{k}') - k_\rho k'_\sigma a^*_\sigma(\vec{k})a^*_\rho(\vec{k}')\Big] e^{2i|k|t}$$

$$\text{b) } H^{(E)}_{(2)} = -\frac{1}{2}\int d^3k\, d^3k' \frac{|\vec{k}'|}{2}\, \delta(\vec{k}+\vec{k}')\, a_\lambda(\vec{k})\, a_\lambda(\vec{k}')\, e^{-2i|k|t} -$$

$$-\frac{1}{2}\int d^3k\, d^3k' \frac{|\vec{k}'|}{2}\, \delta(\vec{k}+\vec{k}')\, a^*_\lambda(\vec{k})\, a^*_\lambda(\vec{k}')\, e^{2i|k|t}\,. \tag{1.57}$$

După aplicarea proprietăţii de filtraj şi a etalonului transversal (1.35), rămânem cu

$$\text{a) } H^{(E)}_{(1)} = \frac{1}{4}\int d^3k|\vec{k}| \sum_{\lambda=1}^{3}\Big[a_\lambda(\vec{k})a_\lambda(-\vec{k})e^{-2i|\vec{k}|t} + a^*_\lambda(\vec{k})a^*_\lambda(-\vec{k})e^{2i|\vec{k}|t}\Big]$$

$$\text{b) } H^{(E)}_{(2)} = -\frac{1}{4}\int d^3k|\vec{k}| \sum_{\lambda=1}^{3}\Big[a_\lambda(\vec{k})a_\lambda(-\vec{k})e^{-2i|\vec{k}|t} + a^*_\lambda(\vec{k})a^*_\lambda(-\vec{k})e^{2i|\vec{k}|t}\Big], \tag{1.58}$$

BCU IAŞI / CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

astfel încât partea extradiagonală

$$H^{(E)} = H^{(E)}_{(1)} + H^{(E)}_{(2)} \tag{1.59}$$

a energiei câmpului electromagnetic este identic nulă,

$$H^{(E)} \equiv 0\,. \tag{1.60}$$

În ceea ce priveşte părţile diagonale (1.56.a, b), utilizând integralele (1.45.c, d) obţinem

$$\begin{aligned}
\text{a)}\quad H^{(D)}_{(1)} &= \frac{1}{4}\int d^3k\, d^3k'\, \frac{\delta(\vec{k}-\vec{k}')}{2|\vec{k}|} \\
&\Big[k_\rho k'_\rho a_\sigma(\vec{k}) a^*_\sigma(\vec{k}') + k_\sigma k'_\sigma a_\rho(\vec{k}) a^*_\rho(\vec{k}') - \\
&- k_\rho k'_\sigma a^*_\rho(\vec{k}') a_\sigma(\vec{k}) - k_\sigma k'_\rho a^*_\sigma(\vec{k}') a_\rho(\vec{k})\Big] + \\
&+ \frac{1}{4}\int d^3k\, d^3k'\, \frac{\delta(\vec{k}-\vec{k}')}{2|\vec{k}|} \\
&\Big[k_\rho k'_\rho a^*_\sigma(\vec{k}) a_\sigma(\vec{k}') + k_\sigma k'_\sigma a^*_\rho(\vec{k}) a_\rho(\vec{k}') - \\
&- k_\rho k'_\sigma a_\rho(\vec{k}') a^*_\sigma(\vec{k}) - k_\sigma k'_\rho a^*_\rho(\vec{k}) a_\sigma(\vec{k}')\Big]
\end{aligned}$$

$$\text{b)}\quad H^{(D)}_{(2)} = \int d^3k\, d^3k'\, \frac{|\vec{k}'|}{2}\, \delta(\vec{k}-\vec{k}')\, a^*_\lambda(\vec{k}')\, a_\lambda(\vec{k})\,, \tag{1.61}$$

de unde rezultă, prin filtraj şi transversalitate,

$$H^{(D)}_{(1)} = H^{(D)}_{(2)} = \frac{1}{2}\int d^3k\, |\vec{k}| \sum_{\lambda=1}^{3} |a_\lambda(\vec{k})|^2\,. \tag{1.62}$$

Ca urmare, din (1.55), (1.60) şi (1.62), obţinem pentru energia totală a câmpului electromagnetic de radiaţie expresia

$$H = \int d^3k\, |\vec{k}| \sum_{\lambda=1}^{3} |a_\lambda(\vec{k})|^2\,. \tag{1.63}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Analog interpretării semiclasice date impulsului, în acest caz putem afirma că energia câmpului este suma completă (după λ şi $\vec{k}$) a energiei "elementare" $|\vec{k}|$ a fiecărui mod $a_\lambda(\vec{k})$, luată cu ponderea $|a_\lambda(\vec{k})|^2$. Desigur, din cauza "condiţiei de transversabilitate", numai două din cele trei amplitudini spectrale $\{a_\lambda(\vec{k})\}_{\lambda=\overline{1,3}}$ sunt liniar independente, ele corespunzând stărilor de polarizare ale câmpului electromagnetic.

D. Spinul câmpului

Până la discutarea amănunţită a acestor aspecte, la finele prezentului paragraf, să estimăm, pentru moment, şi ultima integrală primă a mişcării, anume spinul câmpului de radiaţie, aşa cum reiese din formula de definiţie

$$S_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\int \sigma^{\alpha\beta 4}\, d^3x\,, \tag{1.64}$$

în baza rezultatelor (1.14.b), (1.34) şi (1.37). Avem

$$S_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\int d^3x\,\left[A_\alpha A_{\beta,4} - A_\beta A_{\alpha,4}\right]\,, \tag{1.65}$$

adică

$$\begin{aligned} S_\mu \;=\; & \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\int d^3x\, d^3k\, d^3k'\,(-i|\vec{k}'|) \\ & \Big\{\Big[a_\alpha(\vec{k})f_{\vec{k}}(x^i) + a^*_\alpha(\vec{k})f^*_{\vec{k}}(x^i)\Big]\Big[a_\beta(\vec{k}')f_{\vec{k}'}(x^i) - a^*_\beta(\vec{k}')f^*_{\vec{k}'}(x^i)\Big] - \\ & - \Big[a_\beta(\vec{k})f_{\vec{k}}(x^i) + a^*_\beta(\vec{k})f^*_{\vec{k}}(x^i)\Big]\Big[a_\alpha(\vec{k}')f_{\vec{k}'}(x^i) - a^*_\alpha(\vec{k}')f^*_{\vec{k}'}(x^i)\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{1.66}$$

BCU IAŞI / CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

Separând relaţia în parte diagonală, respectiv extradiagonală, obţinem

$$\text{a)}\quad S_\mu^{(D)} = \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\int d^3x\, d^3k\, d^3k'\, |\vec{k}'| \Big[a_\alpha(\vec{k})a_\beta^*(\vec{k}')f_{\vec{k}}(x^i)f_{\vec{k}'}^*(x^i) - a_\alpha^*(\vec{k})a_\beta(\vec{k}')f_{\vec{k}}^*(x^i)f_{\vec{k}'}(x^i) - - a_\beta(\vec{k})a_\alpha^*(\vec{k}')f_{\vec{k}}(x^i)f_{\vec{k}'}^*(x^i) + a_\beta^*(\vec{k})a_\alpha(\vec{k}')f_{\vec{k}}^*(x^i)f_{\vec{k}'}(x^i)\Big]$$

$$\text{b)}\quad S_\mu^{(E)} = -\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\int d^3x\, d^3k\, d^3k'\, |\vec{k}'| \Big[a_\alpha(\vec{k})a_\beta(\vec{k}')f_{\vec{k}}(x^i)f_{\vec{k}'}(x^i) - a_\beta(\vec{k})a_\alpha(\vec{k}')f_{\vec{k}}(x^i)f_{\vec{k}'}(x^i) - - a_\alpha^*(\vec{k})a_\beta^*(\vec{k}')f_{\vec{k}}^*(x^i)f_{\vec{k}'}^*(x^i) + a_\beta^*(\vec{k})a_\alpha^*(\vec{k}')f_{\vec{k}}^*(x^i)f_{\vec{k}'}(x^i)\Big]\ . \tag{1.67}$$

Din (1.45.a, b), rezultă pentru partea extradiagonală

$$S_\mu^{(E)} = -\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\int \frac{d^3k\, d^3k'}{2|\vec{k}|}|\vec{k}'|\,\delta(\vec{k}+\vec{k}') \Big[a_\alpha(\vec{k})a_\beta(\vec{k}') - a_\beta(\vec{k})a_\alpha(\vec{k}')\Big]\, e^{-2i|\vec{k}|t} + + \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\int \frac{d^3k\, d^3k'}{2|\vec{k}|}|\vec{k}'|\,\delta(\vec{k}+\vec{k}') \Big[a_\alpha^*(\vec{k})a_\beta^*(\vec{k}') - a_\beta^*(\vec{k})a_\alpha^*(\vec{k}')\Big]\, e^{2i|\vec{k}|t}\ , \tag{1.68}$$

adică, după aplicarea proprietăţii de filtraj,

$$S_\mu^{(E)} = -\frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\int d^3k \Big[a_\alpha(\vec{k})a_\beta(-\vec{k}) - a_\beta(-\vec{k})a_\alpha(\vec{k})\Big]\, e^{-2i|\vec{k}|t} + + \frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\int d^3k \Big[a_\alpha^*(\vec{k})a_\beta^*(-\vec{k}) - a_\beta^*(-\vec{k})a_\alpha^*(\vec{k})\Big]\, e^{2i|\vec{k}|t}\ . \tag{1.69}$$

Cum, din puncte de vedere clasic (şi cuantic, după cum vom vedea în paragraful următor), amplitudinile spectrale $a_\alpha(\vec{k})$, $a_\beta(\vec{k}')$, respectiv

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$a^*_\alpha(\vec{k})$, $a^*_\beta(\vec{k}')$, comută, rezultă imediat că

$$S^{(E)}_\mu \equiv 0 \,. \tag{1.70}$$

În cazul părţii diagonale, avem

$$S^{(D)}_\mu = \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\int \frac{d^3k\, d^3k'}{2|\vec{k}|}\,|\vec{k}'|\,\delta(\vec{k}-\vec{k}') \left[a_\alpha(\vec{k})a^*_\beta(\vec{k}') + a_\alpha(\vec{k}')a^*_\beta(\vec{k}) - a^*_\alpha(\vec{k})a_\beta(\vec{k}') - a^*_\alpha(\vec{k}')a_\beta(\vec{k})\right], \tag{1.71}$$

adică

$$S^{(D)}_\mu = \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\int d^3k\,\left[a_\alpha(\vec{k})a^*_\beta(\vec{k}) - a^*_\alpha(\vec{k})a_\beta(\vec{k})\right], \tag{1.72}$$

deci spinul câmpului de radiaţie (Maxwell) capătă forma

$$S_\mu = -i\,\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\int d^3k\, a^*_\alpha(\vec{k})a_\beta(\vec{k})\,. \tag{1.73}$$

Spre deosebire de vectorul impuls $\vec{P}$, vectorul de spin $\vec{S}$ nu mai este reprezentabil prin modulul pătrat al vectorului amplitudinii spectrale $\vec{a}(\vec{k})$, adică $|\vec{a}(\vec{k})|^2$, ci printr-un termen axial, de forma $\vec{a}^* \times \vec{a}$, care, intuitiv vorbind, provine din şi totodată subliniază, originea rotaţională a spinului, ca moment cinetic intern, spre deosebire de originea translaţională, de tip extern (în ceea ce priveşte gradele de libertate ale sistemului) a impulsului. Cu această observaţie, am ajuns la problema stărilor de polarizare ale radiaţiei electromagnetice. În mod concret, tehnic, chestiunea este următoarea: din cauza "condiţiei de transversabilitate", cele trei amplitudini spectrale $\{a_\lambda(\vec{k})\}_{\lambda=\overline{1,3}}$ nu sunt liniar independente, existând posibilitatea exprimării acestora în raport cu două amplitudini spectrale $\{c_A(\vec{k})\}_{A=\overline{1,2}}$, astfel încât impulsul, energia şi spinul să

BCU "LUCIAN BLAGA" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

capete, în mod simultan, formele *manifest diagonale* :

$$\text{a)}\quad P_\mu \sim k_\mu \sum_{A=1}^{2} |c_A(\vec{k})|^2$$

$$\text{b)}\quad H \sim |\vec{k}| \sum_{A=1}^{2} |c_A(\vec{k})|^2$$

$$\text{c)}\quad S_\mu \sim \frac{k_\mu}{|\vec{k}|} \left[|c_1(\vec{k})|^2 - |c_2(\vec{k})|^2 \right] . \tag{1.74}$$

E. Diagonalizarea lui S_3

Pentru impuls şi energie, în cazul unei orientări particulare a reperului, răspunsul este practic banal. Nu avem decât să aliniem axa *oz* cu direcţia $\vec{k}/|\vec{k}|$ a vectorului de undă şi atunci, k_1 şi k_2 fiind zero, iar k_3 fiind egal cu $|\vec{k}|$, rezultă, din etalonul transversal (1.35),

$$a_3(\vec{k}) = a_3^*(\vec{k}) \equiv 0 . \tag{1.75}$$

Prin urmare, într-un astfel de reper, cele două stări liniar independente de polarizare a radiaţiei electromagnetice sunt date chiar de amplitudinile spectrale $\{a_\lambda(\vec{k})\}_{\lambda=\overline{1,3}}$, iar formulele (1.51) şi (1.63) se scriu direct sub forma dorită

$$P_3 = H = \int d^3k\, |\vec{k}| \sum_{A=1}^{2} |a_A(\vec{k})|^2 . \tag{1.76}$$

Pentru spin, însă, din (1.73) şi (1.75), obţinem expresia

$$S_3 = -i \int d^3k \left[a_1^*(\vec{k})\, a_2(\vec{k}) - a_2^*(\vec{k})\, a_1(\vec{k}) \right] , \tag{1.77}$$

care nu este de forma (1.74.c). Deci, chiar şi în acest reper particular (cu $\vec{k}$ în lungul lui *oz*), problema nu este rezolvată. Avem nevoie de o rotaţie generalizată, în planul complex, numită "rotaţie *null*", care

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

să diagonalizeze integrandul lui (1.77). După cum se poate verifica uşor, dar nu fără o oarecare ingeniozitate în construirea ei (datorată, în Teoria Relativităţii Generale, lui E.T. Newman şi R. Penrose (1962) [48]), această "rotaţie *null*" este de forma

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad a_1(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[c_1(\vec{k}) + c_2(\vec{k})\right] \\
a_2(\vec{k}) &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left[c_1(\vec{k}) - c_2(\vec{k})\right] \\
\text{b)} \quad c_1(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a_1(\vec{k}) - ia_2(\vec{k})\right] \\
c_2(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a_1(\vec{k}) + ia_2(\vec{k})\right] \qquad (1.78)
\end{aligned}$$

şi obţinem, într-adevăr,

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad a_1^*(\vec{k})\,a_2(\vec{k}) - a_2^*(\vec{k})\,a_1(\vec{k}) = i\left[|c_1(\vec{k})|^2 - |c_2(\vec{k})|^2\right] \\
&\text{b)} \quad |a_1(\vec{k})|^2 + |a_2(\vec{k})|^2 = |c_1(\vec{k})|^2 + |c_2(\vec{k})|^2\,, \qquad (1.79)
\end{aligned}$$

astfel încât, abia acum, în reperul (particular) considerat, impulsul, energia şi spinul sunt simultan aduse la forma manifest diagonală

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad P_3 = H = \int d^3k\,|\vec{k}| \sum_{A=1}^{2} |c_A(\vec{k})|^2 \\
&\text{b)} \quad S_3 = \int d^3k\,\left[|c_1(\vec{k})|^2 - |c_2(\vec{k})|^2\right]\,. \qquad (1.80)
\end{aligned}$$

Ca semnificaţie fizică, interpretarea rezultatului (1.80.a) este de acelaşi tip cu cea menţionată o dată cu definirea formulelor (1.51) şi (1.63), cu observaţia că sumarea se face, de această dată, după intensităţile spectrale adevărate (adică liniar independente), $|c_A(\vec{k})|^2$. În cazul spinului, semantica interpretării este de o şi mai mare anvergură, ea subliniind că momentul cinetic intern al câmpului de radiaţie,

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

în reperul $\vec{k} \parallel oz$, este aliniat numai faţă de această axă, fiind o superpoziţie de componente "dextrogire" $|c_1(\vec{k})|^2$ şi, respectiv, "levogire" $|c_2(\vec{k})|^2$. Cu alte cuvinte, pe scurt, câmpul electromagnetic de radiaţie posedă două stări liniar independente, de polarizare circulară, una rotindu-se în sensul vectorului de undă, cea "dextrogiră", iar cealaltă în sens contrar lui $\vec{k}$, fiind deci "levogiră". Evident, problema care se pune acum, sub aspect tehnic, de calcul, este definirea explicită a amplitudinilor spectrale $\{c_A(\vec{k})\}_{A=1,2}$ atunci când reperul este orientat arbitrar faţă de direcţia vectorului de undă.

Pentru aceasta, vom porni de la observaţia că, oricare ar fi direcţia $\vec{k}/|\vec{k}|$ o putem interpreta ca direcţie radială, astfel încât ea va fi "permanent" ortogonală la sfera unitate S^2, centrată în origine. Cum metrica pe S^2 are expresia

$$ds^2 = (d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\,, \quad \{\theta\,,\varphi\} \in (0,\,\pi) \times (0,\,2\pi) \tag{1.81}$$

rezultă că, în oricare din planurile cotangente $T_p^*(S^2)$, există diadul dual ortonormal

$$\begin{aligned} \omega^1 &= d\theta \\ \omega^2 &= \sin\theta\, d\varphi\,, \end{aligned} \tag{1.82}$$

ca bază a secţiunilor fibratului cotangent $T^*(S^2)$, în raport cu care metrica se scrie simplu sub forma

$$ds^2 = \delta_{AB}\omega^A\omega^B\,. \tag{1.83}$$

Duala $\{e_A\}$ a bazei $\{\omega^A\}$, definită prin

$$<\omega^A\,,\vec{e}_B> = \delta^A_B\,, \quad (\forall)\, A,B = 1,2\,, \tag{1.84}$$

va reprezenta diadul ortonormal

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{\partial}{\partial\theta} \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,, \end{aligned} \tag{1.85}$$

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA

bază a secţiunilor fibratului tangent $T(S^2)$. În acest fel, prin construcţie, avem asigurate proprietăţile

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad |\vec{e}_1|^2 = |\vec{e}_2|^2 = 1 \\ &\text{b)} \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ &\text{c)} \quad \vec{k} \cdot \vec{e}_1 = \vec{k} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ &\text{d)} \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{k}/|\vec{k}| \,. \end{aligned} \tag{1.86}$$

Fie $\left\{x^\mu(q^A) \,|\, (q^1 = \theta,\, q^2 = \varphi) \in (0,\pi) \times (0,2\pi)\right\}_{\mu=\overline{1,3}}$ coordonatele punctelor din $\mathbf{R}^3$ situate pe S^2, adică

$$\begin{aligned} X^1 &= \sin\theta \cos\varphi \\ X^2 &= \sin\theta \sin\varphi \\ X^3 &= \cos\theta \,. \end{aligned} \tag{1.87}$$

Atunci, diadul ortonormal $\{e_A\}_{A=1,2}$ se poate explicita ca un set de două câmpuri vectoriale din $\mathbf{R}^3$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{\partial X^\mu}{\partial \theta}\partial_\mu \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial X^\mu}{\partial \varphi}\partial_\mu \,, \end{aligned} \tag{1.88}$$

unde $\left\{\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu}\right\}_{\mu=\overline{1,3}}$ este baza canonică ortonormală

$$\partial_\mu \cdot \partial_\nu = \delta_{\mu\nu} \,, \quad (\forall)\, \mu, \nu = \overline{1,3} \,, \tag{1.89}$$

a spaţiului real tridimensional. În mod concret, utilizând scufundarea (1.87) (a lui S^2 în $\mathbf{R}^3$), "câmpurile diadice" $\{\vec{e}_A\}$ capătă forma

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \vec{e}_1 = e_1^\mu \partial_\mu = \cos\theta\cos\varphi\,\partial_1 + \cos\theta\sin\varphi\,\partial_2 - \sin\theta\,\partial_3 \\ &\text{b)} \quad \vec{e}_2 = e_2^\mu \partial_\mu = -\sin\varphi\,\partial_1 + \cos\varphi\,\partial_2 \,, \end{aligned} \tag{1.90}$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar simbolic, introducând matricea 2×2

$$\left(e^B_{A\cdot}\right) = \mathrm{diag}\left(1, \sin^{-1}\theta\right) , \tag{1.91}$$

ele se pot reprezenta unitar sub forma

$$e^\mu_{A\cdot} = e^B_{A\cdot} \frac{\partial X^\mu}{\partial q^B} , \ \mu = \overline{1,3} , \ A, B = 1, 2 . \tag{1.92}$$

Evident, prin completitudine, direcţia radială poate fi inclusă şi ea, ca un al treilea vector normat, ortogonal pe diadul $\{e_A\}$, şi anume

$$e^\mu_3 = |\vec{k}|^{-1} k^\mu . \tag{1.93}$$

Până aici, putem spune că "ne-am pregătit terenul". Ceea ce urmărim este explicitarea componentelor a două 1-forme de legătură (între S^2 şi R^3), un fel de *soldering forms*[1], astfel încât să putem exprima amplitudinile (spectrale) $\{a_\mu(\vec{k})\}_{\mu=\overline{1,3}}$, printr-o relaţie de forma

$$a_\mu(\vec{k}) = \varepsilon^A_{\mu\cdot} b_A(\vec{k}) \ \Leftrightarrow \ a^*_\mu(\vec{k}) = \varepsilon^A_{\mu\cdot} b^*_A(\vec{k}) \tag{1.94}$$

în raport cu două amplitudini spectrale independente $\{b_A(\vec{k})\}_{A=1,2}$ având satisfăcute proprietăţile:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \ \ k^\mu \varepsilon^A_{\mu\cdot} \equiv 0 , \ A = 1, 2 \\ &\text{b)} \ \ \delta^{\mu\nu} \varepsilon^A_{\mu\cdot} \varepsilon^B_{\nu\cdot} = \delta^{AB} , \ A, B = 1, 2 . \end{aligned} \tag{1.95}$$

Deoarece, aşa cum am văzut în cazul particular $\vec{k} \parallel oz$, amplitudinile $\{c_A\}_{A=1,2}$ descriau stările de polarizare ale câmpului electromagnetic, cele două *soldering forms* reprezintă, din punct de vedere fizic, aşa-numiţii *vectori de polarizare* $\{\varepsilon^A\}_{A=1,2}$. Evident, originea celor două relaţii (1.95.a, b) se află în "condiţia de transversabilitate"

$$\vec{k} \cdot \vec{a}(\vec{k}) = 0 \ \Rightarrow \ k^\mu \varepsilon^A_\mu b_A(\vec{k}) = 0 \ \Rightarrow \ k^\mu \varepsilon^A_\mu \equiv 0$$

[1] forme de legătură

şi în aşa-numita *condiţie de normă*

$$\sum_{\lambda=1}^{3} a_\lambda^*(\vec{k})\, a_\lambda(\vec{k}) = \delta^{\mu\nu}\, a_\mu^*(\vec{k})\, a_\nu(\vec{k}) =$$

$$= \delta^{\mu\nu}\, \varepsilon_\mu^{\ A}.\varepsilon_\nu^{\ B}.\, b_A^*(\vec{k})\, b_B(\vec{k}) = \sum_{A=1,2}^{2} |b_A(\vec{k})|^2$$

din care se observă imediat proprietatea (1.95.b). Dat fiind că, în bazele $\{\omega^A\}_{A=1,2}$ şi $\{dX^\mu\}_{\mu=\overline{1,3}}$ (duala lui $\{\partial_\mu\}_{\mu=\overline{1,3}}$), tensorii metrici fundamentali (g_{AB}) pe S^2 şi, respectiv, $(g_{\mu\nu})$ pe R^3 au componentele

$$\begin{aligned} g_{AB} &= \delta_{AB} \\ g_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu}\,, \end{aligned}$$

cu "inversele"

$$\begin{aligned} g^{AB} &= \delta^{AB} \\ g^{\mu\nu} &= \delta^{\mu\nu}\,, \end{aligned}$$

obţinerea componentelor $\varepsilon_\mu^{\ A}$ (ale vectorilor de polarizare ε^A) este practic banală, o dată ce am construit, în general, diadul (1.92) sau, în particular, (1.90), cu proprietăţile (1.86). Astfel, din (1.86.c), scrisă sub forma

$$k_\nu\, e_{B.}^{\ \nu} = k^\mu\, \delta_{\mu\nu}\, e_{B.}^{\ \nu} = 0\,,$$

avem, prin contracţie cu δ^{AB},

$$k^\mu\, \delta^{AB}\, \delta_{\mu\nu}\, e_{B.}^{\ \nu} = 0\,,$$

ceea ce ne permite să definim componentele vectorilor de polarizare ε^A, prin

$$\varepsilon_\mu^{\ A}. = \delta_{\mu\nu}\, \delta^{AB}\, e_{B.}^{\ \nu}\,, \qquad (1.96)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

astfel încât să avem satisfăcută "condiţia de transversabilitate" (1.95.a). În acelaşi timp, înlocuind (1.96) în membrul stâng din (1.95.b), avem

$$\delta^{\mu\nu}\,\delta_{\mu\rho}\,\delta^{AC}\,e^{\rho}_{C.}\,\delta_{\nu\sigma}\,\delta^{BD}\,e^{\sigma}_{D.} = \delta^{AC}\,\delta^{BD}\,\delta_{\rho\sigma}\,e^{\rho}_{C.}\,e^{\sigma}_{D.}\,. \tag{1.97}$$

Dar caracterul ortonormal al bazei $\{e_A\}$, reprezentat de relaţiile (1.86.a, b) scrise "condensat" sub forma

$$\vec{e}_A \cdot \vec{e}_B = \delta_{AB}\,, \tag{1.98}$$

ne arată că

$$e^{\rho}_{A}\,e^{\sigma}_{B}\,(\partial_\rho \cdot \partial_\sigma) = \delta_{\rho\sigma}\,e^{\rho}_{A}\,e^{\sigma}_{B} = \delta_{AB}\,, \tag{1.99}$$

astfel încât, înlocuind în (1.97), obţinem imediat

$$\delta^{\mu\nu}\,\varepsilon^{A}_{\mu.}\,\varepsilon^{B}_{\nu.} = \delta^{AC}\,\delta^{BD}\,\delta_{CD} \equiv \delta^{AB}\,,$$

adică exact (1.95.b). Deci, într-adevăr,

$$\sum_{\lambda=1}^{3} |a_\lambda(\vec{k})|^2 = \sum_{A=1}^{2} |b_A(\vec{k})|^2\,, \tag{1.100}$$

cu $\{a_\lambda(\vec{k})\}_{\lambda=\overline{1,3}}$ date de (1.94) în funcţie de amplitudinile $\{b_A(\vec{k})\}_{A=1,2}$ ale stărilor de polarizare liniară. Cu acestea, impulsul (1.51) şi energia (1.63) ale câmpului de radiaţie capătă expresia .

$$P_\mu = \int d^3k\; k_\mu \sum_{A=1}^{2} |b_A(\vec{k})|^2 \tag{1.101}$$

şi, respectiv,

$$H = \int d^3k\,|\vec{k}| \sum_{A=1}^{2} |b_A(\vec{k})|^2\,, \tag{1.102}$$

adică iau forma dorită (1.74.a, b).

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru spin, însă, rezultă, prin înlocuire în (1.73), expresia

$$S_\mu = -i \int d^3k\, \varepsilon_{\mu\alpha\beta}\, \varepsilon^A_\alpha\, \varepsilon^B_\beta\, b^*_A(\vec{k})\, b_B(\vec{k}) ,$$

adică

$$\vec{S} = -i \int d^3k\, (\varepsilon^A \times \varepsilon^B)\, b^*_A(\vec{k})\, b_B(\vec{k}) . \qquad (1.103)$$

Cum, din (1.96), avem în mod natural

$$\varepsilon^A = \vec{e}_A , \qquad (1.104)$$

obţinem, aplicând proprietatea (1.86.d), că expresia (1.103) capătă forma concretă

$$S_\mu = -i \int \frac{d^3k}{|\vec{k}|}\, k_\mu \left[b^*_1(\vec{k})\, b_2(\vec{k}) - b^*_2(\vec{k})\, b_1(\vec{k}) \right] , \qquad (1.105)$$

care, pentru a deveni de tipul (1.74.c), necesită efectuarea "rotaţiei *null*"

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad b_A(\vec{k}) = n^B_{A\cdot}\, c_B(\vec{k}) \\ &\qquad\; b^*_A(\vec{k}) = n^{*B}_{A\cdot}\, c^*_B(\vec{k}) \\ &\qquad\qquad\qquad , \text{ cu } n \cdot m = m \cdot n = 1 \text{ (matricea unitate)}, \\ &\text{b)} \quad c_A(\vec{k}) = m^B_{A\cdot}\, b_B(\vec{k}) \\ &\qquad\; c^*_A(\vec{k}) = m^{*B}_{A\cdot}\, b^*_B(\vec{k}) \quad , \end{aligned} \qquad (1.106)$$

adică explicit, având în vedere relaţiile (1.78),

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad b_1(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[c_1(\vec{k}) + c_2(\vec{k}) \right] \\ &\qquad\; b_2(\vec{k}) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[c_1(\vec{k}) - c_2(\vec{k}) \right] \\ &\text{b)} \quad c_1(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[b_1(\vec{k}) - i b_2(\vec{k}) \right] \\ &\qquad\; c_2(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[b_1(\vec{k}) + i b_2(\vec{k}) \right] . \end{aligned} \qquad (1.107)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Fizic, transformările (1.107) semnifică (după cum am menţionat deja) trecerea de la stările de polarizare liniară, de amplitudini $\{b_A(\vec{k})\}_{A=1,2}$, la cele de polarizare circulară, de amplitudini $\{c_A(\vec{k})\}_{A=1,2}$. Acum, ca şi în cazul $\vec{k} \parallel oz$, obţinem (folosind (107.a))

$$\text{a)}\quad b_1^*(\vec{k})\, b_2(\vec{k}) - b_2^*(\vec{k})\, b_1(\vec{k}) = i\left(|c_1(\vec{k})|^2 - |c_2(\vec{k})|^2\right),$$

$$\text{b)}\quad \sum_{A=1}^{2} |b_A(\vec{k})|^2 = \sum_{A=1}^{2} |c_A(\vec{k})|^2, \tag{1.79'}$$

astfel încât toate cele trei expresii, (1.101), (1.102) şi (1.105), ale impulsului, energiei şi spinului, iau simultan forma (1.74), adică

$$\text{a)}\quad P_\mu = \int d^3k\, k_\mu \sum_{A=1}^{2} |c_A(\vec{k})|^2$$

$$\text{b)}\quad H = \int d^3k\, |\vec{k}| \sum_{A=1}^{2} |c_A(\vec{k})|^2$$

$$\text{c)}\quad S_\mu = \int \frac{d^3k}{|\vec{k}|}\, k_\mu \left[|c_1(\vec{k})|^2 - |c_2(\vec{k})|^2\right], \tag{1.108}$$

reprezentând, sub aspect conceptual, setul principal de rezultate din cadrul acestui paragraf.

Cu privire la forma concretă a vectorilor de polarizare şi a exprimării amplitudinilor $\{a_\mu(\vec{k})\}_{\mu=\overline{1,3}}$, atât în raport cu $\{b_A(\vec{k})\}_{A=1,2}$, cât şi în raport cu $\{c_A(\vec{k})\}_{A=1,2}$, avem "sistematica" următoare:

(i) În cazul polarizării liniare, vectorii sunt ε^A, daţi prin şirul de relaţii (1.104), (1.96), (1.92) şi (1.91), de expresia generală

$$\varepsilon_\mu^{\ A} = \delta_{\mu\nu}\, \delta^{AB}\, e_B^{\ C}\, \frac{\partial X^\nu}{\partial q^C}, \tag{1.109}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

care se reduce concret, prin (1.104) şi (1.90), la forma

$$\begin{aligned} &a)\ \ \varepsilon^1 = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) \\ &b)\ \ \varepsilon^2 = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\ , \end{aligned} \tag{1.110}$$

cu proprietăţile (1.95), adică, explicit,

$$\begin{aligned} &a) \quad |\varepsilon_1|^2 = |\varepsilon_2|^2 = 1 \\ &b) \quad \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 0 \\ &c) \quad \vec{k}\cdot\varepsilon_1 = \vec{k}\cdot\varepsilon_2 = 0 \\ &d) \quad \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 = \vec{k}/|\vec{k}|. \end{aligned} \tag{1.86'}$$

Din (1.94) şi (1.110) obţinem imediat amplitudinile spectrale $\{a_\mu(\vec{k})\}_{\mu=1,3}$:

$$\begin{aligned} &a)\ \ a_1(\vec{k}) = \cos\theta\cos\varphi\, b_1(\vec{k}) - \sin\varphi\, b_2(\vec{k}) \\ &b)\ \ a_2(\vec{k}) = \cos\theta\sin\varphi\, b_1(\vec{k}) + \cos\varphi\, b_2(\vec{k}) \\ &c)\ \ a_3(\vec{k}) = -\sin\theta\, b_1(\vec{k}) \end{aligned} \tag{1.111}$$

verificând, evident, condiţia de normă (1.100).

(ii) În cazul polarizării circulare, se va lucra efectiv în corpul $\mathbf{C}$ al numerelor complexe şi vom avea, din (1.111) şi rotaţia *null* (1.107.a),

$$\begin{aligned} a)\ \ a_1(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\cos\theta\cos\varphi - i\sin\varphi)\, c_1(\vec{k}) + \right. \\ &\quad \left. + (\cos\theta\cos\varphi + i\sin\varphi)\, c_2(\vec{k})\right] \\ b)\ \ a_2(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\cos\theta\sin\varphi + i\cos\varphi)\, c_1(\vec{k}) + \right. \\ &\quad \left. + (\cos\theta\sin\varphi - i\cos\varphi)\, c_2(\vec{k})\right] \\ c)\ \ a_3(\vec{k}) &= -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\left[c_1(\vec{k}) + c_2(\vec{k})\right] \end{aligned}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$
\begin{aligned}
\text{a}') \quad a_1^*(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\cos\theta \cos\varphi + i \sin\varphi)\, c_1^*(\vec{k}) + \right. \\
&\quad \left. + (\cos\theta \cos\varphi - i \sin\varphi)\, c_2^*(\vec{k}) \right] \\
\text{b}') \quad a_2^*(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\cos\theta \sin\varphi - i \cos\varphi)\, c_1^*(\vec{k}) + \right. \\
&\quad \left. + (\cos\theta \sin\varphi + i \cos\varphi)\, c_2^*(\vec{k}) \right] \\
\text{c}') \quad a_3^*(\vec{k}) &= -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \left[c_1^*(\vec{k}) + c_2^*(\vec{k}) \right], \qquad (1.112)
\end{aligned}
$$

cu proprietăţile (ce se pot verifica printr-un calcul direct)

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \sum_{\lambda=1}^{3} |a_\lambda(\vec{k})|^2 = \sum_{A=1}^{2} |c_A(\vec{k})|^2 \\
&\text{b)} \quad \vec{a}^{\,*} \times \vec{a} = \frac{i\vec{k}}{|\vec{k}|} \left[|c_1(\vec{k})|^2 - |c_2(\vec{k})|^2 \right] . \qquad (1.113)
\end{aligned}
$$

De această dată, vectorii de polarizare sunt notaţi cu ϵ^A şi vor avea componentele ϵ_μ^A din C (spre deosebire de ε_μ^A care sunt din R). Acestea se determină după cum urmează: din (1.106.a) şi (1.94), avem, la nivelul unei exprimări generale,

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad a_\mu(\vec{k}) = \varepsilon_{\mu\cdot}^{A} n_{A\cdot}^{B} c_B(\vec{k}) \\
&\text{b)} \quad a_\mu^*(\vec{k}) = \varepsilon_{\mu\cdot}^{A} n_{A\cdot}^{*B} c_B^*(\vec{k}) , \qquad (1.114)
\end{aligned}
$$

care trebuie să fie de forma

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad a_\mu(\vec{k}) = \epsilon_{\mu\cdot}^{A} c_A(\vec{k}) \\
&\text{b)} \quad a_\mu^*(\vec{k}) = \epsilon_{\mu\cdot}^{*A} c_A^*(\vec{k}) , \qquad (1.115)
\end{aligned}
$$

deci

$$
\epsilon_\mu^A = \varepsilon_{\mu\cdot}^{B} n_{B\cdot}^{A} \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_\mu^{*A} = \varepsilon_{\mu\cdot}^{B} n_{B\cdot}^{*A} . \qquad (1.116)
$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Utilizând expresia generală (1.109) a componentelor $\epsilon^A_{\mu\cdot}$, rezultă imediat componentele

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \epsilon^A_{\mu\cdot} = \delta_{\mu\nu}\, n^A_{B\cdot}\, \delta^{BC}\, e^D_{C\cdot}\, \frac{\partial X^\nu}{\partial q^D} \\ &\text{b)}\quad \epsilon^{*A}_{\mu\cdot} = \delta_{\mu\nu}\, n^{*A}_{B\cdot}\, \delta^{BC}\, e^D_{C\cdot}\, \frac{\partial X^\nu}{\partial q^D} \end{aligned} \tag{1.117}$$

ale vectorilor $\{\epsilon^A\,,\ \epsilon^{*A}\}_{A=1,2}$ de polarizare circulară. În mod concret, din (1.115) şi (1.112), obţinem

$$\begin{aligned} \epsilon^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\cos\theta\cos\varphi - i\sin\varphi)\,,(\cos\theta\sin\varphi + i\cos\varphi)\,,-\sin\theta\right] \\ \epsilon^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\cos\theta\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,(\cos\theta\sin\varphi - i\cos\varphi)\,,-\sin\theta\right], \end{aligned} \tag{1.118}$$

cu proprietatea evidentă, dar deloc trivială (sub aspect "tehnic"),

$$\epsilon^{*1} = \epsilon^2 \ \Leftrightarrow\ \epsilon^{*2} = \epsilon^1\,, \tag{1.119}$$

care conduce la

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \epsilon^{*1}\cdot\epsilon^1 = |\epsilon^1|^2 = \epsilon^1\cdot\epsilon^2 = 1 \\ &\text{b)}\quad \epsilon^{*2}\cdot\epsilon^2 = |\epsilon^2|^2 = \epsilon^1\cdot\epsilon^2 = 1 \\ &\text{c)}\quad \epsilon^1\cdot\epsilon^1 = \epsilon^2\cdot\epsilon^2 = 0\,,\ \text{vectori } \textit{null} \\ &\text{d)}\quad \epsilon^{*1}\times\epsilon^1 = \epsilon^2\times\epsilon^1 = i\vec{k}/|\vec{k}| \\ &\text{e)}\quad \epsilon^{*2}\times\epsilon^2 = \epsilon^1\times\epsilon^2 = -i\vec{k}/|\vec{k}| \\ &\text{f)}\quad \epsilon^{*1}\times\epsilon^2 = \epsilon^2\times\epsilon^2 \equiv 0 \\ &\text{g)}\quad \epsilon^{*2}\times\epsilon^1 = \epsilon^1\times\epsilon^1 \equiv 0\,, \end{aligned} \tag{1.120}$$

proprietăţi ce pot fi rezumate (într-o scriere condensată) analog formulei (1.95) (dacă adăugăm şi "condiţia de transversalitate")

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi anume

$$\text{a)}\quad k^{\mu}\epsilon_{\mu}^{A} = k_{\mu}\epsilon_{\mu}^{*A} \equiv 0$$

$$\text{b)}\quad \delta^{\mu\nu}\epsilon_{\mu}^{*A}\epsilon_{\nu}^{B} = \delta^{AB}$$

$$\text{c)}\quad \epsilon^{*A} \times \epsilon^{B} = i\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\eta^{AB},\ \left(\eta^{AB}\right) = \text{diag}[1,-1]. \quad (1.121)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5.2 Cuantificarea câmpului de radiaţie (metoda canonică necovariantă)

A. Operatorii de creare şi anihilare

Fără să insistăm prea mult asupra chestiunilor de fineţe care apar în metoda canonică generală (în special, covariantă) de cuantificare a câmpului electromagnetic (ea constituind subiectul paragrafului următor), dorim să subliniem, pentru început, următorul aspect. După cum se cunoaşte (Dirac [19], precum şi Bjorken şi Drell [6]), în cuantificarea teoriilor de câmp cu constrângeri există, în mod principial, două metode de lucru, care, în final, dacă au fost formulate şi aplicate corect, conduc la acelaşi set de rezultate. În decursul aplicării lor, însă, aspectele şi formele intermediare de calcul pot să difere foarte mult.

Astfel, prima metodă susţine că toate constrângerile trebuie rezolvate de la bun început, astfel încât să fie extrase aşa-numitele *grade veridice de libertate* în raport cu care se reformulează lagrangeianul iniţial, pentru a avea o dependenţă explicită a acestuia, numai de modurile de câmp esenţiale, trecându-se apoi la aplicarea metodei canonice de cuantificare. Evident, prin prisma paragrafului anterior şi a titlului celui de faţă, devine clar că aceasta este calea ce o vom urma aici.

A doua metodă, datorată în special lui Dirac, nu porneşte de la rezolvarea (pe cât posibil) explicită a constrângerilor, ci, din contra, le consideră pe acestea ca părţi efective (integrante) ale unui lagrangeian total, obţinut din cel iniţial prin intermediul metodei Lagrange (clasice) şi trece direct la cuantificarea lui canonică. În acest fel, în decursul cuantificării, toate componentele operatoriale de câmp beneficiază de acelaşi tratament şi covarianţa teoriei este manifestă. La sfârşit, însă, stările cuantice virtuale trebuie eliminate, ceea ce necesită aplicarea unui formalism de extragere a stărilor (fizice) reale. Cu alte cuvinte, în timp ce prima metodă realizează, de la început, o discriminare între operatorii de câmp, după natura algebric esenţială a acestora, dar lu-

crează numai cu stări cuantice reale, a doua metodă lucrează inițial cu o clasă mixtă (mai largă) de stări cuantice (atât reale, cât și virtuale), tratează, în mod egal, toate componentele operatorilor de câmp și elimină la sfârșit stările cuantice virtuale.

Avantajele și dezavantajele fiecăreia dintre metode sunt acum destul de clare. În primul caz, nu avem asigurată covarianța, dar stările sunt întotdeauna reale. În al doilea caz, avem intermediar stări cuantice virtuale, dar este întotdeauna păstrată covarianța.

Să trecem concret la aplicarea primei metode. Alegând etalonul de radiație $A_4 = 0$, alterăm covarianța lagrangeianului

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F^{ik} F_{ik} \tag{2.1}$$

prin selectarea numai a subclasei referențialelor inerțiale, în care

$$A_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - |\vec{v}|^2}} \left(A'_4 - \vec{v}' \cdot \vec{A}' \right) = 0 \, , \; c = 1 \, , \tag{2.2}$$

dar obținem explicit lagrangeianul

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} A_{\mu,4} A_{\mu,4} \, , \; \mu = \overline{1,3} \, , \tag{2.3}$$

care depinde numai de "gradele veridice de libertate" $\{A_\mu(x^i)\}_{\mu=\overline{1,3}}$. Bineînțeles, din cauza condiției reziduale de *gauge* transversal

$$\nabla \cdot \vec{A} = A_{\mu,\mu} = 0 \, , \tag{2.4}$$

acestea nu sunt întru totul liniar independente, dar această problemă o vom rezolva prin luarea în considerație a rolului și a proprietăților vectorilor de polarizare $\{\varepsilon^A\}_{a=\overline{1,2}}$. Deocamdată, să definim impulsurile canonice generalizate

$$\pi^\mu = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,4}} \, , \text{ cu } \mu = \overline{1,3} \, , \; x^4 = t \, , \tag{2.5}$$

BCU IAȘI CENTRALĂ UNIVERSITARĂ LIBRARY

adică, în mod concret,

$$\pi_\mu = A_{\mu,4} \tag{2.6}$$

şi să impunen valabilitatea unei relaţii de comutare la timpi egali, de tip Bohr-Heisenberg, adică

$$[\pi_\mu(x'), A_\nu(x)]_{t'=t} = -i C_{\mu\nu}(\vec{x}' - \vec{x}) . \tag{2.7}$$

Dacă cele trei componente $A_\mu(x^i)$ ale operatorului de câmp $\vec{A}(x^i)$ ar fi fost independente (deci nesupuse transversalităţii), atunci, cu siguranţă, prin analogie cu cazul câmpului scalar, tensor-funcţionala $C_{\mu\nu}(\vec{x}' - \vec{x})$ ar fi factorizat în $\delta_{\mu\nu}\,\delta(\vec{x}' - \vec{x})$. Altfel însă, datorită etalonului transversal (2.4), observăm din (2.7), prin luarea divergenţei "după ν", că trebuie să avem

$$[\pi_\mu(x'), A_{\nu,\nu}(x)]_{t'=t} = -i C_{\mu\nu,\nu}(\vec{x}' - \vec{x}) ,$$

deci

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} C_{\mu\nu}(\vec{x}' - \vec{x}) \equiv 0 , \tag{2.8}$$

condiţie ce nu poate fi satisfăcută de funcţionala $\delta_{\mu\nu}\,\delta(\vec{x}' - \vec{x})$, deoarece

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta(\vec{x}' - \vec{x}) \neq 0 .$$

Sub aspect conceptual, acesta este preţul plătit pentru violarea covarianţei teoriei. Oricum, însă, tensor-funcţionala $C_{\mu\nu}(\vec{x}' - \vec{x})$ trebuie să fie simetrică, atât în indicii μ, ν, cât şi în argumentele $\vec{x}'$, $\vec{x}$, fiindcă, simplist vorbind (deocamdată), ea trebuie "să se apropie cât de mult" de $\delta_{\mu\nu}$, în privinţa comportării tensoriale, şi de funcţionala Dirac $\delta(\vec{x}' - \vec{x})$, sub aspectul proprietăţilor ei de funcţie generalizată. Prin intermediul unei integrale Fourier, putem exprima aceste lucruri într-o manieră mult mai clară. Cum

$$\delta_{\mu\nu}\,\delta(\vec{x}' - \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \delta_{\mu\nu}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}' - \vec{x})} ,$$

BCU IAŞI ITALIAN UNIVERSITY LIBRARY

rezultă, în cazul lui $C_{\mu\nu}(\vec{x}' - \vec{x})$, expresia

$$C_{\mu\nu}(\vec{x}' - \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} h_{\mu\nu}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} , \tag{2.9}$$

în care, în primul rând,

$$h_{\mu\nu}(\vec{k}) = h_{\nu\mu}(\vec{k}) . \tag{2.10}$$

În al doilea rând, trecându-l pe $\vec{k}$ în $-\vec{k}$, avem

$$C_{\mu\nu}(\vec{x}' - \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} h_{\mu\nu}(-\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} , \tag{2.11}$$

care coincide cu $C_{\mu\nu}(\vec{x} - \vec{x}')$ dacă

$$h_{\mu\nu}(\vec{k}) = h_{\mu\nu}(-\vec{k}) . \tag{2.12}$$

În fine, în al treilea rând, impunând reprezentării Fourier (2.9) satisfacerea condiţiei de transversalitate (2.8), rezultă imediat condiţia de proiector ortogonal pe direcţia lui $\vec{k}$ a tensorului $h(\vec{k})$, adică

$$C_{\mu\nu,\nu}(\vec{x}' - \vec{x}) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_\nu\, h_{\mu\nu}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} \equiv 0 , \tag{2.13}$$

deci

$$k_\nu\, h_{\mu\nu}(\vec{k}) = k_\mu\, h_{\mu\nu}(\vec{k}) = 0 . \tag{2.14}$$

Cam acestea sunt proprietăţile generale ale tensorului $h(\vec{k})$, ce pot fi obţinute fără a apela, în nici un fel, la forma operatorilor de câmp $A_\mu(x^i)$.

Dat fiind că dorim o cuantificare explicită a câmpului de radiaţie, vom avea nevoie de expresia concretă a componentelor $h_{\mu\nu}(\vec{k})$ şi, de aceea, trebuie să revenim la soluţia generală

$$A_\mu(x^i) = \int d^3k \left[a_\mu(\vec{k})\, f_{\vec{k}}(x^i) + a^*_\mu(\vec{k})\, f^*_{\vec{k}}(x^i) \right] , \tag{2.15}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cu modurile ortonormale de frecvenţă pozitivă, respectiv negativă,

$$f_{\vec{k}}(x^i) = \frac{(2\pi)^{-3/2}}{\sqrt{2|\vec{k}|}} e^{ik_i x^i}$$
$$f^*_{\vec{k}}(x^i) = \frac{(2\pi)^{-3/2}}{\sqrt{2|\vec{k}|}} e^{-ik_i x^i} \quad , \; k_4 = -|\vec{k}| \, , \tag{2.16}$$

a ecuaţiei Euler-Lagrange

$$\Box A_\mu = 0 \, , \tag{2.17}$$

dedusă din lagrangeianul (2.3). De această dată, spre deosebire de cele prezentate în paragraful anterior, fiind vorba de aşa-numita *a doua cuantificare*, câmpurile reale (2.15) devin operatori liniari autoadjuncţi peste un spaţiu liniar abstract numit *spaţiul Fock al stărilor cuantice* ale câmpului. În acest fel, amplitudinile spectrale $\{a_\mu(\vec{k}), a^*_\mu(\vec{k})\}$ trebuie ridicate la rang de operatori liniari $\{a_\mu(\vec{k}), a^\dagger_\mu(\vec{k})\}$ (unde "†" este simbolul conjugării hermitice) pe spaţiul Fock al stărilor, în reprezentare de impuls. De asemenea, pentru simplificarea scrierii, nu vom mai desemna conjugarea complexă prin simbolul "$*$", ci prin supralinierea "$-$". Aşadar, operatorii de câmp devin

$$A_\mu(x^i) = \int d^3k \left[a_\mu(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x^i) + a^\dagger_\mu(\vec{k}) \bar{f}_{\vec{k}}(x^i) \right] , \tag{2.18}$$

iar impulsurile generalizate, canonic asociate acestora, se vor scrie (din (2.6) şi (2.16))

$$\pi_\mu(x^i) = -i \int d^3k \, |\vec{k}| \left[a_\mu(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x^i) - a^\dagger_\mu(\vec{k}) \bar{f}_{\vec{k}}(x^i) \right] . \tag{2.19}$$

Impunând operatorilor (2.18) şi (2.19) relaţia de comutare la timpi egali

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(2.7), rezultă expresia detaliată

$$[\pi_\mu(x'), A_\nu(x)]_{t'=t} = -i \int d^3k' \, d^3k \, |\vec{k}'|$$
$$\left[a_\mu(\vec{k}') f_{\vec{k}'}(x') - a_\mu^\dagger(\vec{k}') \bar{f}_{\vec{k}'}(x'), a_\nu(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x) + a_\nu^\dagger(\vec{k}) \bar{f}_{\vec{k}}(x)\right]_{t'=t} =$$
$$= -i \int d^3k' \, d^3k \, |\vec{k}'| \left\{ \left[a_\mu(\vec{k}'), a_\nu(\vec{k})\right] f_{\vec{k}'}(x') f_{\vec{k}}(x) - \right.$$
$$- \left[a_\mu^\dagger(\vec{k}'), a_\nu^\dagger(\vec{k})\right] \bar{f}_{\vec{k}'}(x') \bar{f}_{\vec{k}}(x) + \left[a_\mu(\vec{k}'), a_\nu^\dagger(\vec{k})\right] f_{\vec{k}'}(x') \bar{f}_{\vec{k}}(x) +$$
$$\left. \left[a_\nu(\vec{k}), a_\mu^\dagger(\vec{k}')\right] f_{\vec{k}}(x) \bar{f}_{\vec{k}'}(x') \right\}_{t'=t} = -i C_{\mu\nu}(\vec{x}' - \vec{x}), \qquad (2.20)$$

din care, prin analogie cu cuantificarea câmpului scalar, observăm următoarele aspecte. Primii doi comutatori conţin numai operatori de anihilare (asociaţi frecvenţelor pozitive) şi, respectiv, de creare (asociaţi frecvenţelor negative), astfel încât aceşti comutatori trebuie să fie nuli:

$$\text{a)} \quad \left[a_\mu(\vec{k}'), a_\nu(\vec{k})\right] = 0$$
$$\text{b)} \quad \left[a_\mu^\dagger(\vec{k}'), a_\nu^\dagger(\vec{k})\right] = 0 . \qquad (2.21)$$

În plus, numai în acest caz putem evita apariţia termenilor temporali-armonici

$$e^{-i(|\vec{k}'|+|\vec{k}|)t} \quad \text{şi} \quad e^{i(|\vec{k}'|+|\vec{k}|)t} ,$$

deoarece, chiar dacă am avea, prin absurd,

$$\left[a_\mu(\vec{k}'), a_\nu(\vec{k})\right] = (tensor)_{\mu\nu} \, \delta(\vec{k}' \pm \vec{k})$$
$$\left[a_\mu^\dagger(\vec{k}'), a_\nu^\dagger(\vec{k})\right] = (tensor)_{\mu\nu} \, \delta(\vec{k}' \pm \vec{k}) ,$$

am obţine, după aplicarea proprietăţii de filtraj după $\delta(\vec{k}' \pm \vec{k})$,

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$e^{-2i|\vec{k}|t} \text{ şi respectiv } e^{2i|\vec{k}|t} ,$$

deci am avea în membrul stâng o dependenţă temporală explicită, în timp ce tensor-funcţionala $C_{\mu\nu}(\vec{x}'-\vec{x})$ este independentă de timp. Apoi, următorii doi comutatori, fiind de tipul [anihilare, creare], vor avea forma (tot prin analogie cu cuantificarea scalarului real)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \left[a_\mu(\vec{k}') , a_\nu^\dagger(\vec{k})\right] = f_{\mu\nu}(\vec{k})\,\delta(\vec{k}'-\vec{k}) \\ \text{b)} \quad & \left[a_\nu(\vec{k}) , a_\mu^\dagger(\vec{k}')\right] = \bar{f}_{\mu\nu}(\vec{k})\,\delta(\vec{k}'-\vec{k}) , \end{aligned} \tag{2.22}$$

cu

$$\bar{f}_{\mu\nu}(\vec{k}) = f_{\nu\mu}(\vec{k}) , \tag{2.23}$$

unde, în (2.22.b), ne-am folosit de faptul că funcţionala δ-Dirac este pară în raport cu argumentul ei $\vec{k}'-\vec{k}$. Înlocuind relaţiile de comutare (2.21), (2.22) şi modurile (2.16) în comutatorul fundamental (2.20) şi integrând după $\vec{k}'$, obţinem

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[f_{\mu\nu}(\vec{k})\,e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} + \bar{f}_{\mu\nu}(\vec{k})\,e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}\right] = \\ & = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} h_{\mu\nu}(\vec{k})\,e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} . \end{aligned} \tag{2.24}$$

Aici am făcut, de asemenea, apel la reprezentarea (2.9).

Dar, exprimând operatorii $a_\mu(\vec{k}')$ şi $a_\nu^\dagger(\vec{k})$ în raport cu operatorii de anihilare şi, respectiv, de creare a stărilor liniar polarizate A, B, adică $\{b_A(\vec{k}') , b_B^\dagger(\vec{k})\}_{A,B=\overline{1,2}}$ şi

$$\begin{aligned} a_\mu(\vec{k}') &= \varepsilon_\mu^A\, b_A(\vec{k}') \\ a_\nu^\dagger(\vec{k}) &= \varepsilon_\nu^B\, b_A^\dagger(\vec{k}) , \end{aligned} \tag{2.25}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ajungem la relaţiile de comutare (2.22) sub forma

$$\text{a)}\quad \varepsilon^A_{\mu\cdot}\varepsilon^B_{\nu\cdot}\left[b_A(\vec{k}'),\, b^\dagger_B(\vec{k})\right] = f_{\mu\nu}(\vec{k})\,\delta(\vec{k}'-\vec{k})$$
$$\text{b)}\quad \varepsilon^B_{\nu\cdot}\varepsilon^A_{\mu\cdot}\left[b_B(\vec{k}),\, b^\dagger_A(\vec{k}')\right] = \bar{f}_{\mu\nu}(\vec{k})\,\delta(\vec{k}'-\vec{k})\,, \qquad (2.26)$$

unde vectorii de polarizare liniară $\{\varepsilon^A\}_{A=1,2}$ sunt daţi de expresiile (din paragraful precedent)

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 &= (\cos\theta\cos\varphi\,,\ \cos\theta\sin\varphi\,,\ -\sin\theta)\\ \varepsilon^2 &= (-\sin\varphi\,,\ \cos\varphi\,,0)\ .\end{aligned} \qquad (2.27)$$

Cum, de această dată, operatorii de anihilare, respectiv creare, $b_A(\vec{k}')$, $b^\dagger_B(\vec{k})$ şi $b_B(\vec{k})$, $b^\dagger_A(\vec{k}')$ sunt asociaţi unor stări de polarizare liniar independente, rezultă că aceştia, verificând "transversalitatea"

$$k^\mu\,\varepsilon^A_\mu = 0\,,\ (\forall)\,A=1,2\ ,$$

vor satisface relaţiile de comutare "ortodoxe"

$$\left[b_A(\vec{k}')\,,\, b^\dagger_B(\vec{k})\right] = \delta_{AB}\,\delta(\vec{k}'-\vec{k})\,,\ (\forall)\,A,B=1,2\,. \qquad (2.28)$$

Prin urmare, înlocuind în (2.26), obţinem imediat

$$\bar{f}_{\mu\nu}(\vec{k}) = f_{\nu\mu}(\vec{k}) = f_{\mu\nu}(\vec{k}) = \delta_{AB}\,\varepsilon^A_{\mu\cdot}\varepsilon^B_{\nu\cdot} \qquad (2.29)$$

având, de asemenea, asigurată proprietatea

$$k_\mu\, f_{\mu\nu}(\vec{k}) \equiv 0\,. \qquad (2.30)$$

Din (2.27) şi (2.29) rezultă fără probleme componentele explicite ale

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

tensorului $f(\vec{k})$, anume

$$\begin{aligned}
f_{11} &= (\varepsilon_1^1{}_.)^2 + (\varepsilon_1^2{}_.)^2 = 1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi \\
f_{22} &= (\varepsilon_2^1{}_.)^2 + (\varepsilon_2^2{}_.)^2 = 1 - \sin^2\theta\sin^2\varphi \\
f_{33} &= (\varepsilon_3^1{}_.)^2 + (\varepsilon_3^2{}_.)^2 = 1 - \cos^2\theta \\
f_{13} &= f_{31} = (\varepsilon_1^1{}_.)^2 + (\varepsilon_3^2{}_.)^2 = (\varepsilon_3^1{}_.)^2 + (\varepsilon_1^2{}_.)^2 = -\cos\theta\sin\theta\cos\varphi \\
f_{23} &= f_{32} = (\varepsilon_2^1{}_.)^2 + (\varepsilon_3^2{}_.)^2 = (\varepsilon_3^1{}_.)^2 + (\varepsilon_2^2{}_.)^2 = -\cos\theta\sin\theta\sin\varphi \\
f_{12} &= f_{21} = (\varepsilon_1^1{}_.)^2 + (\varepsilon_2^2{}_.)^2 = (\varepsilon_2^1{}_.)^2 + (\varepsilon_1^2{}_.)^2 = +\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi
\end{aligned} \tag{2.31}$$

pe care observăm că le putem scrie "uniform", sub forma proiectorului ortogonal pe $\vec{k}$

$$f_{\mu\nu}(\vec{k}) = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{|\vec{k}|^2}\,. \tag{2.32}$$

În acest stadiu, la nivelul algebrei de comutatori ai operatorilor de creare şi anihilare, problema cuantificării canonice necovariante a câmpului de radiaţie electromagnetică este principial rezolvată. Avem, în primul rând, comutatorii (2.28) care conduc, prin (2.32) şi (2.22), la relaţiile de comutare

$$\left[a_\mu(\vec{k}'),\, a_\nu^\dagger(\vec{k})\right] = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{|\vec{k}|^2}\right)\delta(\vec{k}' - \vec{k})\,. \tag{2.33}$$

În al doilea rând, din (2.32) şi (2.24), rezultă $h = f$, adică

$$h_{\mu\nu}(\vec{k}) = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{|\vec{k}|^2} = \delta_{AB}\,\varepsilon_\mu^A{}_.\,\varepsilon_\nu^B{}_.\,, \tag{2.34}$$

deci obţinem expresia concretă (în reprezentare de impuls)

$$C_{\mu\nu}(\vec{x}' - \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{|\vec{k}|^2}\right] e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} \tag{2.35}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a tensor-funcţionalei implicate în relaţia de cuantificare Bohr-Heisenberg (2.7).

Forma operatorilor impuls total, energie totală şi spin ai câmpului de radiaţie se poate obţine, aproape direct, din mărimile clasice corespunzătoare, deduse în paragraful precedent, cu singurul amendament important că, de această dată, amplitudinile spectrale reciproc complex conjugate $\{a_\mu^*(\vec{k}'), a_\nu(\vec{k})\}$, fiind ridicate la rang de operatori reciproc conjugaţi hermitic $\{a_\mu^\dagger(\vec{k}'), a_\nu(\vec{k})\}$, nu vor mai comuta, deci, până la introducerea *produsului normal*, poziţia lor relativă trebuie atent respectată.

B. Operatorul impuls

Partea extradiagonală a mărimii clasice corespunzătoare era dată de (1.47), adică

$$P_\mu^{(E)} = -\frac{1}{2}\int d^3k\, k_\mu \left[a_\lambda(\vec{k})a_\lambda(-\vec{k})e^{-2i|\vec{k}|t} + a_\lambda^*(\vec{k})a_\lambda^*(-\vec{k})e^{2i|\vec{k}|t}\right] - \\ -\frac{1}{2}\int d^3k \left[a_\mu(-\vec{k})k_\lambda a_\lambda(\vec{k})e^{-2i|\vec{k}|t} + a_\mu^*(-\vec{k})k_\lambda a_\lambda^*(\vec{k})e^{2i|\vec{k}|t}\right]. \tag{2.36}$$

Cum vectorii de polarizare liniară ε_λ^A implicaţi în a doua integrală sunt ortogonali pe $\vec{k}$, rămânem cu expresia operatorială

$$P_\mu^{(E)} = -\frac{1}{2}\int d^3k\, k_\mu \left[a_\lambda(\vec{k})a_\lambda(-\vec{k})e^{-2i|\vec{k}|t} + a_\lambda^\dagger(\vec{k})a_\lambda^\dagger(-\vec{k})e^{2i|\vec{k}|t}\right], \tag{2.37}$$

care, datorită caracterului impar al integrandului, se anulează. Deci partea extradiagonală a operatorului impuls este zero. În ceea ce priveşte

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

partea diagonală, aveam expresia clasică "prefinală"

$$P_\mu^{(D)} = \int d^3k\, d^3k' \frac{|\vec{k}'|}{2|\vec{k}|} \delta(\vec{k}-\vec{k}')\, k_\mu a_\lambda(\vec{k}) a_\lambda^*(\vec{k}') +$$
$$+ \int d^3k\, d^3k' \frac{|\vec{k}'|}{2|\vec{k}|} \delta(\vec{k}-\vec{k}')\, k_\mu a_\lambda^*(\vec{k}) a_\lambda(\vec{k}') -$$
$$- \int d^3k\, d^3k' \frac{|\vec{k}'|}{2|\vec{k}|} \delta(\vec{k}-\vec{k}')\, k_\lambda a_\lambda^*(\vec{k}') a_\mu(\vec{k}) -$$
$$- \int d^3k\, d^3k' \frac{|\vec{k}'|}{2|\vec{k}|} \delta(\vec{k}-\vec{k}')\, k_\lambda a_\lambda(\vec{k}') a_\mu^*(\vec{k}) . \qquad (2.38)$$

Din proprietatea de filtraj a funcţionalei Dirac şi condiţia de transversalitate $\vec{k}\cdot\varepsilon^A = 0$, ultimele două integrale se anulează, astfel încât, ridicând amplitudinile la rang de operatori, obţinem pentru operatorul impuls

$$P_\mu = \frac{1}{2}\int d^3k\, k_\mu \left[a_\lambda(\vec{k}) a_\lambda^\dagger(\vec{k}) + a_\lambda^\dagger(\vec{k}) a_\lambda(\vec{k})\right] . \qquad (2.39)$$

Dar, din comutatorul (2.33), rezultă

$$\sum_{\lambda=1}^{3} a_\lambda(\vec{k})\, a_\lambda^\dagger(\vec{k}) = \sum_{\lambda=1}^{3} a_\lambda^\dagger(\vec{k})\, a_\lambda(\vec{k}) + \delta(0) \sum_{\lambda=1}^{3} \left[\delta_{\lambda\lambda} - \frac{k_\lambda k_\lambda}{|\vec{k}|^2}\right] , \qquad (2.40)$$

adică, reintroducând convenţia Einstein de sumare,

$$a_\lambda(\vec{k})\, a_\lambda^\dagger(\vec{k}) = a_\lambda^\dagger(\vec{k})\, a_\lambda(\vec{k}) + 2\,\delta(0) . \qquad (2.41)$$

Ultima relaţie conduce, prin înlocuire în (2.39), la forma completă

$$P_\mu = \int d^3k\, k_\mu a_\lambda^\dagger(\vec{k})\, a_\lambda(\vec{k}) + \int d^3k\, k_\mu \delta(0) , \qquad (2.42)$$

a operatorului impuls, care deocamdată conţine partea aparent divergentă

$$P_\mu[0] = \int d^3k\, k_\mu \delta(0) , \qquad (2.43)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

numită *impulsul de zero* al câmpului de radiaţie. În legătură cu acesta, nu vom mai relua în detaliu explicaţiile date la omologul său spinorial sau scalar, ci reamintim doar că, imediat după regularizarea lui $\delta(0)$, aveam

$$P_\mu[\varepsilon] = \delta(\varepsilon) \int d^3k\, k_\mu \,, \tag{2.44}$$

care este identic zero, dat fiind că

$$\int d^3k\, k_\mu = 0 \,, \tag{2.45}$$

înainte de a lua limita $\varepsilon \to 0$. În concluzie, rămânem cu partea finită

$$P_\mu = \int d^3k\, k_\mu a_\lambda^\dagger(\vec{k})\, a_\lambda(\vec{k}) \,, \tag{2.46}$$

care se explicitează după operatorii de creare şi, respectiv, de anihilare $b_A^\dagger(\vec{k})$, $b_B(\vec{k})$ a stărilor de polarizare liniară A, B, după cum urmează:

$$P_\mu = \int d^3k\, k_\mu \varepsilon_\lambda^A \varepsilon_\lambda^B\, b_A^\dagger(\vec{k})\, b_B(\vec{k}) \,. \tag{2.47}$$

Cum

$$\varepsilon_\lambda^A \varepsilon_\lambda^B = \delta^{AB} \,, \tag{2.48}$$

rezultă imediat expresia finală

$$P_\mu = \int d^3k\, k_\mu \left[N_1(\vec{k}) + N_2(\vec{k})\right] \,, \tag{2.49}$$

unde

$$N_A = b_A^\dagger(\vec{k})\, b_A(\vec{k}) \tag{2.50}$$

este operatorul număr de fotoni (reali) de impuls $\vec{k}$, în starea de polarizare A.

În concluzie, impulsul total al câmpului de radiaţie cuantificat este dat de contribuţia "egală" după cele două stări liniar independente de polarizare a tuturor fotonilor (reali), transportând, fiecare, o cuantă de impuls $\vec{k}$.

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

C. Energia

În cazul operatorului hamiltonian, deci a enegiei câmpului cuantificat, detaliile tehnice sunt puţin mai complicate. Deşi partea extradiagonală $H^{(E)}$ este zero, dat fiind că $H^{(E)}_{(1)}$ şi $H^{(E)}_{(2)}$ din (1.58.a,b) se reduc (reciproc), chiar după interpretarea amplitudinilor ca operatori, partea diagonală a lui H trebuie mai atent analizată, din cauza necomutativităţii operatorilor $a_\mu(\vec{k})$, $a^\dagger_\nu(\vec{k}')$. Pentru aceasta, vom porni de la expresiile (1.56.a,b) ale subpărţilor diagonale $H^{(D)}_{(1)}$, $H^{(D)}_{(2)}$. Înlocuind amplitudinile spectrale cu operatori, avem

$$\text{a)}\quad H^{(D)}_{(1)} = \frac{1}{8}\int \frac{d^3k}{|\vec{k}|}\left\{\left[k_\rho a_\sigma(\vec{k}) - k_\sigma a_\rho(\vec{k})\right]\left[k_\rho a^\dagger_\sigma(\vec{k}) - k_\sigma a^\dagger_\rho(\vec{k})\right] + \right.$$
$$\left. + \left[k_\rho a^\dagger_\sigma(\vec{k}) - k_\sigma a^\dagger_\rho(\vec{k})\right]\left[k_\rho a_\sigma(\vec{k}) - k_\sigma a_\rho(\vec{k})\right]\right\}$$
$$\text{b)}\quad H^{(D)}_{(2)} = \frac{1}{4}\int d^3k\,|\vec{k}|\left\{a^\dagger_\lambda(\vec{k})\,a_\lambda(\vec{k}) + a_\lambda(\vec{k})\,a^\dagger_\lambda(\vec{k})\right\}. \qquad (2.51)$$

Prin aplicarea condiţiei de transversalitate, partea diagonală $H^{(D)}_{(1)}$ se reduce la

$$H^{(D)}_{(1)} = \frac{1}{4}\int d^3k\,|\vec{k}|\left\{a^\dagger_\lambda(\vec{k})\,a_\lambda(\vec{k}) + a_\lambda(\vec{k})\,a^\dagger_\lambda(\vec{k})\right\}, \qquad (2.52)$$

adică avem $H^{(D)}_{(1)} \equiv H^{(D)}_{(2)}$ şi, astfel, din şirul de relaţii

$$\begin{aligned} H^{(E)} &\equiv 0 \\ H^{(D)} &= H^{(D)}_{(1)} + H^{(D)}_{(2)} \\ H &= H^{(D)} + H^{(E)} \end{aligned}$$

şi (2.41), (2.48), (2.50) obţinem pentru forma completă a operatorului hamiltonian expresia

$$H = :H: + H[0], \qquad (2.53)$$

BCU MSI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde

$$: H : = \int d^3k\,|\vec{k}|\,\left[N_1(\vec{k}) + N_2(\vec{k})\right] \tag{2.54}$$

este aşa-numitul *hamiltonian normal* (cuantificat), iar

$$H[0] = \int d^3k\,|\vec{k}|\,\delta(0) \tag{2.55}$$

este energia de zero a câmpului de radiaţie cuantificat.

Similar energiilor de zero ale câmpurilor scalare şi spinoriale, $H[0]$ este ultradivergentă şi trebuie eliminată formal, prin luarea în considerare (de la început) a produsului normal

$$\begin{aligned} &: \text{operator anihilare} \cdot \text{operator creare} : = \\ &= \text{operator creare} \cdot \text{operator anihilare}\ , \end{aligned}$$

ce are ca argument fizic faptul că, cel puţin într-un spaţiu plat (cum este spaţiul Minkowski), alegerea mărimilor de zero este arbitrară, dat fiind că, sub aspect dinamic, ceea ce contează este diferenţa mărimilor fizice (observabile) faţă de acestea. Cu alte cuvinte, fără a mai relua discuţiile din capitolele III şi IV asupra acesui subiect, produsul normal ": :" reprezintă matematic o regulă simplă de substragere a unei părţi ultradivergente, fizic inobservabilă într-un spaţiu-timp plat, dintr-o anumită mărime de tipul "parte finită (diferită de zero) + parte divergentă", astfel încât partea rămasă (evident, cea finită) să reprezinte, fizic, valoarea efectivă a observabilei considerate. Deci, în cazul câmpului de radiaţie cuantificat, operatorul energiei totale a acestuia este dat de formula (2.54), semnificând sumarea completă, continuă după $\vec{k}$ şi discretă după $A = 1, 2$, a tuturor cuantelor de energie $|\vec{k}|$ transportate de *numerele (spectrale) de ocupare* $N_A(\vec{k})$, corespunzătoare fotonilor reali, aflaţi în cele două stări liniar independente de polarizare.

BCU IAŞI ... UNIVERSITY LIBRARY

D. Spinul

În fine, pentru determinarea formei concrete a operatorului moment cinetic intern (de spin) al câmpului electromagnetic, în etalonarea de radiaţie, vom avea în vedere, mai întâi, că partea extradiagonală a acestuia (1.69), adică

$$S_\mu^{(E)} = -\frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\int d^3k \left\{\left[a_\alpha(\vec{k})a_\beta(-\vec{k}) - a_\beta(-\vec{k})a_\alpha(\vec{k})\right] e^{-2i|\vec{k}|t} - \right.$$
$$\left. - \left[a_\alpha^\dagger(\vec{k})a_\beta^\dagger(-\vec{k}) - a_\beta^\dagger(-\vec{k})a_\alpha^\dagger(\vec{k})\right] e^{2i|\vec{k}|t}\right\} \quad (2.56)$$

este identic zero, dat fiind că operatorii $\{a_\alpha(\vec{k}), a_\beta(-\vec{k})\}$ şi respectiv $\{a_\alpha^\dagger(\vec{k}), a_\beta^\dagger(-\vec{k})\}$ comută (vezi relaţiile (2.21.a,b)). Prin urmare, ca şi în cazul clasic, rămâne esenţială numai partea diagonală, adică

$$S_\mu = -\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\int d^3k \left[a_\alpha^\dagger(\vec{k})a_\beta(\vec{k}) - a_\alpha(\vec{k})a_\beta^\dagger(\vec{k})\right], \quad (2.57)$$

iar ultimul termen va fi rearanjat, utilizând comutatorul (2.33), conducând la

$$S_\mu = :S_\mu: + S_\mu[0], \quad (2.58)$$

cu

$$\text{a)} \quad :S_\mu: = -i\int d^3k\, \varepsilon_{\mu\alpha\beta}\, a_\alpha^\dagger(\vec{k})\, a_\beta(\vec{k})$$

$$\text{b)} \quad S_\mu[0] = \frac{i}{2}\int d^3k\, \varepsilon_{\mu\alpha\beta}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{|\vec{k}|^2}\right)\delta(0). \quad (2.59)$$

Datorită contracţiei tensorului antisimetric Levi-Civita cu proiectorul ortogonal (evident, simetric) $f_{\alpha\beta}(\vec{k}) = \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{|\vec{k}|^2}$, spinul de zero este nul (pe considerente de regularizare similare celor de la $P_\mu[0]$), obţinând (chiar şi fără introducerea produsului normal) că operatorul de spin al câmpului de radiaţie este dat de expresia

$$S_\mu = -i\int \frac{d^3k}{|\vec{k}|}\, k_\mu \left[b_1^\dagger(\vec{k})\, b_2(\vec{k}) - b_2^\dagger(\vec{k})\, b_1(\vec{k})\right], \quad (2.60)$$

BCU IAŞI - CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

dedusă din (1.59.a) pe baza relaţiei

$$\vec{a}^{\dagger} \times \vec{a} = (\varepsilon^A \times \varepsilon^B)\, b_A^{\dagger}\, b_B \tag{2.61}$$

şi a proprietăţii de ortogonalitate triadică

$$\varepsilon^A \times \varepsilon^B = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \tag{2.62}$$

a celor doi vectori de polarizare liniară. Pentru a aduce operatorul (2.60) la o formă de tipul (1.108.c), vom introduce operatorii de anihilare a stărilor de polarizare circulară

$$\begin{aligned} c_1(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[b_1(\vec{k}) - i\, b_2(\vec{k}) \right] \\ c_2(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[b_1(\vec{k}) + i\, b_2(\vec{k}) \right] \end{aligned} \tag{2.63}$$

şi, corespunzător, operatorii de creare a aceloraşi stări (circular polarizate)

$$\begin{aligned} c_1^{\dagger}(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[b_1^{\dagger}(\vec{k}) + i\, b_2^{\dagger}(\vec{k}) \right] \\ c_2^{\dagger}(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[b_1(\vec{k}) - i\, b_2^{\dagger}(\vec{k}) \right] , \end{aligned} \tag{2.64}$$

astfel încât să avem asigurat comutatorul fundamental

$$\left[c_A(\vec{k}'), c_B^{\dagger}(\vec{k}) \right] = \delta_{AB}\, \delta(\vec{k}' - \vec{k}) . \tag{2.65}$$

Pentru $A = 1$, $B = 2$, rezultă imediat

$$\left[c_1(\vec{k}'), c_2^{\dagger}(\vec{k}) \right] = \frac{1}{2} \left\{ \left[b_1(\vec{k}'), b_1^{\dagger}(\vec{k}) \right] - \left[b_2(\vec{k}'), b_2^{\dagger}(\vec{k}) \right] \right\} , \tag{2.66}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ceilalţi comutatori ai operatorilor b (respectiv $b^\dagger$) fiind nuli, dar, după cum reiese din (2.28), comutatorul (2.66) se reduce la

$$\left[c_1(\vec{k}'), c_2^\dagger(\vec{k})\right] = \frac{1}{2}\left\{\delta(\vec{k}'-\vec{k}) - \delta(\vec{k}'-\vec{k})\right\} \equiv 0\,. \tag{2.67}$$

Cazul $A = 2$, $B = 1$ se obţine din (2.67), prin conjugare hermitică. Mai rămân atunci comutatorii

$$\begin{aligned}\left[c_1(\vec{k}'), c_1^\dagger(\vec{k})\right] &= \frac{1}{2}\left\{\left[b_1(\vec{k}'), b_1^\dagger(\vec{k})\right] + \left[b_2(\vec{k}'), b_2^\dagger(\vec{k})\right]\right\}\\ \left[c_2(\vec{k}'), c_2^\dagger(\vec{k})\right] &= \frac{1}{2}\left\{\left[b_1(\vec{k}'), b_1^\dagger(\vec{k})\right] + \left[b_2(\vec{k}'), b_2^\dagger(\vec{k})\right]\right\},\end{aligned} \tag{2.68}$$

ce conduc, evident, la confirmarea relaţiei (2.65). Prin urmare, operatorii $c_A(\vec{k})$, $c_A^\dagger(\vec{k})$ sunt într-adevăr operatori de anihilare, respectiv de creare, a stărilor de polarizare circulară, A.

Inversând rotaţiile *null* (2.63) şi (2.64) obţinem

$$\begin{aligned}b_1(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[c_1(\vec{k}) + c_2(\vec{k})\right]\\ b_2(\vec{k}) &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left[c_1(\vec{k}) - c_2(\vec{k})\right],\end{aligned} \tag{2.69}$$

respectiv

$$\begin{aligned}b_1^\dagger(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[c_1^\dagger(\vec{k}) + c_2^\dagger(\vec{k})\right]\\ b_2^\dagger(\vec{k}) &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\left[c_1^\dagger(\vec{k}) - c_2^\dagger(\vec{k})\right],\end{aligned} \tag{2.70}$$

ceea ce ne permite să aducem expresia (2.60) la forma "prefinală"

$$\begin{aligned}S_\mu = -i\int d^3k\,\frac{k_\mu}{|\vec{k}|}\Big\{&\frac{i}{2}\left[c_1^\dagger(\vec{k}) + c_2^\dagger(\vec{k})\right]\left[c_1(\vec{k}) - c_2(\vec{k})\right] +\\ &+\frac{i}{2}\left[c_1^\dagger(\vec{k}) - c_2^\dagger(\vec{k})\right]\left[c_1(\vec{k}) + c_2(\vec{k})\right]\Big\}\,,\end{aligned} \tag{2.71}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

din care rezultă imediat spinul câmpului de radiaţie (cuantificat)

$$S_\mu = \int d^3k \frac{k_\mu}{|\vec{k}|} \left[\underline{N}_1(\vec{k}) - \underline{N}_2(\vec{k})\right] \tag{2.72}$$

în reprezentare diagonală după numerele de ocupare

$$\underline{N}_A(\vec{k}) = c_A^\dagger(\vec{k})\, c_A(\vec{k}) \tag{2.73}$$

ale stărilor de polarizare circulară.

După cum se poate observa, spinul total are direcţia impulsului, ceea ce este o proprietate fundamentală a spinului cuantelor de masă nulă, iar cele două polarizări independente contribuie cu semne opuse, ceea ce confirmă caracterul lor dextro- şi, respectiv, levogir.

În sfârşit, mai trebuie să subliniem că, prin utilizarea directă a relaţiilor (2.69) şi (2.70), în expresiile (2.49) şi (2.54), se pot obţine, fără dificultate, operatorii impuls şi energie

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad P_\mu = \int d^3k\, k_\mu \sum_{A=1}^{2} \underline{N}_A(\vec{k}) \\ &\text{b)} \quad :H: = \int d^3k\, |\vec{k}| \sum_{A=1}^{2} \underline{N}_A(\vec{k}) \end{aligned} \tag{2.74}$$

în raport cu numerele de ocupare $\{\underline{N}_A\}_{A=1,2}$ corespunzătoare fotonilor circular polarizaţi.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

E. Produs cronologic

În fine, dar nu în ultimul rând, mai avem de calculat *contracţia cronologică*

$$\overbrace{A_\mu(x)\,A_\nu}(x') = \langle 0|\mathrm{T}\,[A_\mu(x)\,A_\nu(x')]\,|0\rangle\,, \tag{2.75}$$

care, după cum ştim deja (de la câmpurile scalar şi spinorial), este o funcţie singulară, ce coincide, până la factorul unităţii imaginare i, cu propagatorul câmpului de radiaţie (în cazul nostru). Astfel, din expresia (2.18), avem

$$\begin{aligned}
&\overbrace{A_\mu(x)\,A_\nu}(x') = \\
&= \theta(t-t')\,\langle 0|A_\mu(x)\,A_\nu(x')|0\rangle + \theta(t'-t)\,\langle 0|A_\nu(x')A_\mu(x)|0\rangle = \\
&= \theta(t-t')\int d^3k\,d^3k'\,\langle 0|\left[a_\mu(\vec{k})\,f_{\vec{k}}(x) + a_\mu^\dagger(\vec{k})\,\bar{f}_{\vec{k}}(x)\right] \\
&\qquad\qquad \left[a_\nu(\vec{k}')\,f_{\vec{k}'}(x') + a_\nu^\dagger(\vec{k}')\,\bar{f}_{\vec{k}'}(x')\right]|0\rangle + \\
&+\theta(t'-t)\int d^3k'\,d^3k\,\langle 0|\left[a_\nu(\vec{k}')\,f_{\vec{k}'}(x') + a_\nu^\dagger(\vec{k}')\,\bar{f}_{\vec{k}'}(x')\right] \\
&\qquad\qquad \left[a_\mu(\vec{k})\,f_{\vec{k}}(x) + a_\mu^\dagger(\vec{k})\,\bar{f}_{\vec{k}}(x)\right]|0\rangle
\end{aligned} \tag{2.76}$$

şi, folosind proprietăţile

$$\begin{aligned}
\langle 0|a_\mu(\vec{k})\,a_\nu(\vec{k}')|0\rangle &= \langle 0|a_\nu(\vec{k}')a_\mu(\vec{k})|0\rangle \equiv 0\,, \\
\langle 0|a_\mu^\dagger(\vec{k})\,a_\nu^\dagger(\vec{k}')|0\rangle &= \langle 0|a_\nu^\dagger(\vec{k}')a_\mu^\dagger(\vec{k})|0\rangle \equiv 0\,,
\end{aligned} \tag{2.77}$$

precum şi relaţia

$$\langle 0|a_\mu(\vec{k})\,a_\nu^\dagger(\vec{k}')|0\rangle = \langle 0|a_\nu(\vec{k}')a_\mu^\dagger(\vec{k})|0\rangle = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{|\vec{k}|^2}\right)\delta(\vec{k}-\vec{k}')\,, \tag{2.78}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ce rezultă din comutatorul (2.33), obţinem expresia

$$\widehat{A_\mu(x)\,A_\nu}(x') = \theta(t-t')\int d^3k\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{|\vec{k}|^2}\right) f_{\vec{k}}(x)\,\bar{f}_{\vec{k}}(x') + \\ + \theta(t'-t)\int d^3k\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{|\vec{k}|^2}\right) f_{\vec{k}}(x')\,\bar{f}_{\vec{k}}(x)\,, \tag{2.79}$$

care se reduce, prin utilizarea concretă a modurilor (2.16), la forma

$$\widehat{A_\mu(x)\,A_\nu}(x') = \theta(t-t')\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{|\vec{k}|^2}}{2|\vec{k}|}\,e^{ik(x-x')} + \\ + \theta(t'-t)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{|\vec{k}|^2}}{2|\vec{k}|}\,e^{-ik(x-x')}\,. \tag{2.80}$$

Sub aspect tridimensional (eminamente necovariant ca formulare), aceasta este nu numai corectă, dar pare a fi şi definitivă. Singura problemă care apare, integral de ordin estetic, este prezenţa funcţiilor treaptă ale lui Heaviside şi alternanţa de semn a fazelor din cele două exponenţiale. Se sugerează astfel, ca direcţie generalizatoare, existenţa unei reprezentări integrale complexe, pe spaţiul $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{C}$ al 4-impulsului $k = (\vec{k}, \omega)$, care să permită atât o exprimare "mono-term" a membrului drept din (2.80), cât şi deducerea imediată a transformatei Fourier $\left[\widehat{A_\mu(x)\,A_\nu}(x')\right](k)$ a contracţiei cronologice (pe starea de vid) a componentelor 3-vectorului operator de câmp $A(x)$. În acest sens, pornim de la observaţia că, prin trecerea lui $\vec{k}$ în $-\vec{k}$ în a doua integrală din (2.80), obţinem, în cazul $t < t'$, expresia

$$\widehat{A_\mu(x)\,A_\nu}(x')\Big|_{t<t'} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{|\vec{k}|^2}\right) e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}\,\frac{e^{i|\vec{k}|(t-t')}}{2|\vec{k}|}\,, \tag{2.81}$$

BCU INSTITUTE ALUMNI LIBRARY

care coincide cu

$$\overbrace{A_\mu(x)\,A_\nu}(x')\Big|_{t>t'} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{|\vec{k}|^2}\right) e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}\,\frac{e^{-i|\vec{k}|(t-t')}}{2|\vec{k}|} \tag{2.82}$$

până la semnul termenului temporal al fazei exponenţialei. Cum, însă, $\pm|\vec{k}|$ sunt cele două rădăcini ale ecuaţiei algebrice

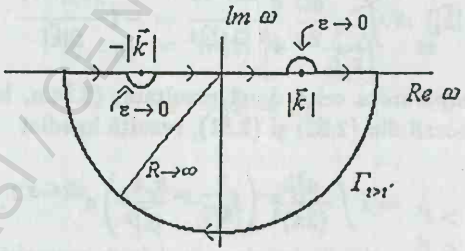
$$\omega^2 - |\vec{k}|^2 = 0\,, \tag{2.83}$$

ne putem da seama că, prin aplicarea teoremei reziduurilor integralei în complex

$$\mathcal{J}(t,t';\pm|\vec{k}|) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - |\vec{k}|^2}\,, \tag{2.84}$$

evaluată pe două contururi, potrivit definite, avem posibilitatea să exprimăm unitar ambele formule (2.81) şi (2.82).

Într-adevăr, pentru $t > t'$, trebuie ca $Im\,\omega < 0$, pentru a avea asigurată convergenţa integralei (2.84) pe conturul $\Gamma_{t>t'}$, conţinând numai polul $|\vec{k}|$ şi extinzându-se la infinitul complex pe un semicerc. Rezultă "conturul pe dreapta"

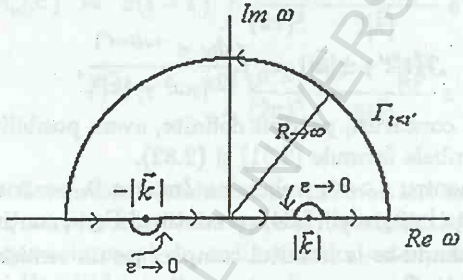


BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi integrala

$$\mathcal{J}(t,t';|\vec{k}|) = \int_{\Gamma_{t>t'}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - |\vec{k}|^2} = -i \frac{e^{-i|\vec{k}|(t-t')}}{2|\vec{k}|} \tag{2.84.a}$$

Pentru $t < t'$, trebuie ca $Im\,\omega < 0$ (pe aceleaşi considerente de convergenţă), obţinând "conturul pe stânga" $\Gamma_{t<t'}$,



ce conţine numai polul $-|\vec{k}|$, şi integrala

$$\mathcal{J}(t,t';-|\vec{k}|) = \int_{\Gamma_{t<t'}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - |\vec{k}|^2} = -i \frac{e^{i|\vec{k}|(t-t')}}{2|\vec{k}|} \tag{2.84.b}$$

Prin simpla comparare a celor două rezultate, (2.84.a, b), cu forma termenilor temporali din (2.82) şi (2.81), rezultă imediat

$$\overbrace{A_\mu(x)\,A_\nu(x')}\Big|_{\substack{t>t' \\ t<t'}} = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{|\vec{k}|^2}\right) e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}\, \mathcal{J}(t,t';\pm|\vec{k}|) \tag{2.85}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică, datorită caracterului disjunct al funcţiilor Heaviside $\theta(t-t')$ şi $\theta(t'-t)$, contracţia cronologică (2.80) se poate exprima unitar sub forma integralei complexe

$$\overbrace{A_\mu(x)\,A_\nu}(x') = -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{|\vec{k}|^2}}{k^2}\,e^{ik(x-x')}\,, \tag{2.86}$$

cu $k^4=\omega\in\mathbf{C}$ şi $k^2=|\vec{k}|^2-\omega^2$, evaluată pe $\Gamma_{t>t'}$ sau $\Gamma_{t<t'}$, după cum $t>t'$ sau $t<t'$.

Un singur lucru ne mai deranjează acum, şi anume faptul că integrala după ω nu se face numai pe axa reală, din cauza celor două semicercuri de rază $\varepsilon\to 0$.

Această problemă este rezolvată prin bine cunoscutul artificiu al deplasării infinitezimal-imaginare a celor doi poli. Astfel, dacă în loc de k^2, la numitorul integrandului din (2.86) scriem $k^2-i\varepsilon$, cu $\varepsilon\to 0_+$, vom avea din

$$k^2-i\varepsilon=0 \tag{2.87}$$

polii

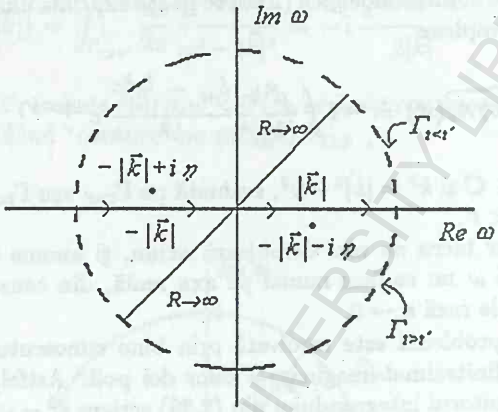
$$\begin{aligned}
\text{a)}\ \omega_{(1)} &= -|\vec{k}|\left[1-\frac{i\varepsilon}{|\vec{k}|^2}\right]^{1/2}\approx \\
&\approx -|\vec{k}|+i\eta \\
\text{b)}\ \omega_{(2)} &= +|\vec{k}|\left[1-\frac{i\varepsilon}{|\vec{k}|^2}\right]^{1/2}\approx \\
&\approx +|\vec{k}|-i\eta\,,
\end{aligned} \tag{2.88}$$

cu

$$\eta=\frac{\varepsilon}{2|\vec{k}|}\to 0_+\,,$$

care (prin deplasarea $\pm i\eta$) lasă nesingulară întreaga axă reală pentru ω. Cele două contururi Γ iau forma din figura

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



şi, cum integralele pe cele două semicercuri de $R \to \infty$ sunt nule, rămânem cu formula

$$\overbrace{A_\mu(x)\,A_\nu}(x') = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{|\vec{k}|^2}}{k^2 - i\varepsilon} e^{ik(x-x')}, \tag{2.89}$$

în care limita $\varepsilon \to 0_+$ se subînţelege şi se face după efectuarea integralei pe R^4 (după k). Evident, până la factorul $(2\pi)^{-2}$, adesea neconsiderat în majoritatea cărţilor de specialitate, imaginea Fourier (în spaţiul cuadrivectorilor $k \in \mathrm{R}^4$) a contracţiei cronologice a componentelor lui $A(x)$ va fi

$$\left[\overbrace{A_\mu(x)\,A_\nu}(x')\right](k) = -i\left(k^2 - i\varepsilon\right)^{-1}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{|\vec{k}|^2}\right) \tag{2.90}$$

în termenii "fixării radiative" a etalonului $U(1)$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5.3 Cuantificarea covariant-canonică a câmpului electromagnetic

Din cauza caracterului *gauge* $U(1)$ al câmpului electromagnetic, problema cuantificării sale canonice şi covariante a rămas deschisă până pe la mijlocul deceniului şase al secolului nostru. Chiar şi după aceea, respectiv prin 1965-1970, Bjorken şi Drell, doi emeriţi fizicieni contemporani, obişnuiau să spună studenţilor că, deşi câmpul Maxwell a fost primul câmp unitar (unificând interacţiunile electrice cu cele magnetice) posesor al unei teorii clasice consistente (bazată pe ecuaţiile Maxwell), larg verificată experimental şi cu profunde implicaţii tehnologice, fiind de asemenea şi primul câmp cuantificat (Dirac, 1928), canonic necovariant, el a produs şi a ridicat cele mai mari surprize şi probleme (cu excepţia câmpului gravitaţional) în decursul cuantificării sale covariante. Există câteva dificultăţi de principiu care fac practic imposibilă aplicarea naivă a metodei canonice de cuantificare în formulare Lorentz-covariantă.

Astfel, chiar din punct de vedere clasic, o primă problemă ar fi că mărimile fizic observabile sunt cele şase componente ale tensorului Maxwell (antisimetric, de ordinul 2) F – soluţii ale ecuaţiilor pentru câmpul liber

$$\begin{aligned} F^{ik}{}_{,k} &= 0 \\ \varepsilon^{ijkl} F_{jk,l} &= 0 , \end{aligned}$$

cu $\eta_{Minkowski} = \mathrm{diag}[1, 1, 1, -1]$, pentru ridicarea şi coborârea indicilor – şi nu cele patru componente ale potenţialului A al câmpului electromagnetic. Dacă am aplica principiul corespondenţei, gândindune la o cuantificare directă, în raport cu observabilele F, atunci am avea probleme, deoarece densitatea de lagrangeian $U(1)$ *gauge*-invariantă este, simplu şi obligatoriu,

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{4} F^{ik} F_{ik} ,$$

neconţinând deci nici o derivată (temporală) a lui F. Prin urmare, nu putem construi direct (din lagrangeian) impulsul canonic conjugat observabilei F. Dacă, pe de altă parte, lucrăm cu 4-vectorul potenţial A, când

$$F_{ik} = A_{k,i} - A_{i,k} ,$$

atunci al doilea set al ecuaţiilor Maxwell este automat satisfăcut, iar primul set coincide cu ecuaţiile Euler-Lagrange

$$(\eta_{ik} \Box - \partial_i \partial_k) A^k = 0$$

obţinute din $\mathcal{L}_M$. Din nefericire, operatorul liniar tensorial diferenţial de ordin 2

$$\hat{D}_{ik} = \eta_{ik} \Box - \partial_i \partial_k$$

nu admite invers. Într-adevăr, din

$$\hat{D}_{ik}\, e^{ipx} = -p^2 \left(\eta_{ik} - \frac{p_i p_k}{p^2} \right) e^{ipx} ,$$

rezultă matricea

$$h_{ik}(p) = \eta_{ik} - \frac{p_i p_k}{p^2}$$

care nu este inversabilă, deoarece

$$\det [h_{ik}(p)] = 0$$

după cum se poate constata printr-un calcul direct sau, mai elegant, din proprietatea

$$h_{ik}(p)\, p^k \equiv 0 .$$

Prin urmare, apar probleme serioase în construirea funcţiei Green a câmpului electromagnetic dacă nu se impun condiţii suplimentare celor patru componente ale potenţialului vector. Sub acţiunea transformării

$$\underset{\sim}{A}{}^k = A^k + \phi'^k$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ecuaţia de câmp pentru A rămâne invariantă,

$$\hat{D}_{ik}\underline{A}^k = 0\,,$$

oricare ar fi câmpul scalar ϕ, deci este posibilă o deformare continuă, complet arbitrară după ϕ, a oricărei soluţii "iniţiale" A. În consecinţă, în lipsa oricărei constrângeri, 4-potenţialul nefiind unic definit, nu poate servi ca o observabilă a teoriei.

La nivel clasic, în formulare $SO(3,1)$-covariantă, ieşirea din acest impas se face prin fixarea de etalon Lorentz

$$A^k{}_{,k} = 0\,,$$

ce reduce operatorul $\hat{D}_{ik}$ la operatorul inversabil

$$\hat{\mathcal{D}}_{ik} = \eta_{ik}\,\Box\,,$$

în raport cu care întregul set al ecuaţiilor Maxwell pentru câmpul liber se scrie simplu

$$\Box A_i = 0\,.$$

Din

$$\hat{\mathcal{D}}_{ik}e^{ipx} = -\,p^2\,\eta_{ik}\,e^{ipx}\,,$$

rezultă imediat

$$e^{ipx} = -\,\frac{\eta^{ik}}{p^2}\,\hat{\mathcal{D}}_{ik}\,e^{ipx}\,,$$

ceea ce înseamnă că, în reprezentare de impuls, inversul lui $\hat{\mathcal{D}}$ va fi dat de expresia

$$\hat{\mathcal{D}}^{-1} = -\,\frac{1}{p^2}\,\eta\,,$$

adică imaginea Fourier a funcţiei Green a câmpului electromagnetic va fi, simplu,

$$\mathcal{G}^{(p)}_{ik} = -\,\frac{1}{p^2}\,\eta_{ik}\,.$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În acelaşi timp, pentru ca atât condiţia Lorentz, cât şi ecuaţiile Maxwell $\hat{\mathcal{D}}_{ik}A^k = 0$ să rămână invariante la transformarea $A^k = \underline{A}^k - \phi^{,k}$, trebuie obligatoriu ca $\Box\phi = 0$, adică soluţia A este unică modulo $[\Box\phi = 0]$.

Dacă acum, din punct de vedere clasic, teoria pare în regulă, vom constata imediat apariţia unui nou şir de probleme, dacă încercăm, fără nici un fel de precauţii, o cuantificare *ad hoc*, bazată pe

a) relaţiile de comutare Bohr-Heisenberg;

b) densitatea de lagrangeian $U(1)$ *gauge*-invariantă $\mathcal{L}_M$;

c) condiţia Lorentz de fixare a etalonului.

Astfel, în spiritul covarianţei Lorentz, interpretând cele patru componente ale potenţialului ca variabile canonice, rezultă, din $\mathcal{L}_M$, impulsurile canonic conjugate

$$\pi^{i4} = -\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial A_{i,4}} = F^{i4} ,$$

ce ar trebui să satisfacă relaţiile Bohr-Heisenberg de comutare (la timp egal)

$$\left[\pi^{i4}(\vec{x}', t) , A_k(\vec{x}, t)\right] = -i\,\delta^i_k\,\delta(\vec{x}' - \vec{x}) .$$

Dacă în privinţa celor trei componente spaţiale π^{i4} nu avem nici o problemă, componenta temporală $\pi^{44} = F^{44}$, fiind evident zero, distruge imediat această relaţie de comutare, conducând la

$$\left[\pi^{44}(\vec{x}', t) , A_k(\vec{x}, t)\right] \equiv 0 ,$$

oricare ar fi componenta A_k a 4-potenţialului. Prin urmare, cuantificarea covariant-canonică a teoriei bazate direct pe lagrangeianul $U(1)$ *gauge*-invariant $\mathcal{L}_M$ nu este posibilă.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Considerând, în spiritul teoriilor cuantice, $A^i{}_{,i}$ ca un operator $\hat{A}^i{}_{,i}$, atunci condiţia Lorentz, aplicată unei stări fizice $|\psi\rangle$ a câmpului electromagnetic, ar trebuie scrisă ca

$$\hat{A}^i{}_{,i}|\psi\rangle = 0\,.$$

Dar, după cum se poate demonstra [43, 31], operatorul $\hat{A}^i{}_{,i}$ nu comută cu operatorul Dirac $\hat{D}$ al câmpurilor spinoriale, electrono-pozitronice de exemplu, care sunt, evident, sarcinile ce produc câmpul electromagnetic. Cu alte cuvinte, într-o variantă naivă a teoriei cuantice a câmpului electromagnetic, acesta nu ar putea coexista cu sarcinile sale, deoarece cei doi operatori, $\hat{A}^i{}_{,i}$ şi $\hat{D}$, necomutând, nu pot avea stări proprii comune. Evident, o asemenea concluzie este fizic inacceptabilă.

Analizând contradicţiile enumerate mai sus, constatăm că ele provin din faptul că am presupus valabile în microcosmos unele legi din macrocosmos. De exemplu, după cum tocmai am văzut, atât condiţia Lorentz de fixare a etalonului, cât şi forma $\mathcal{L}_M$ a lagrangeianului, nu pot fi preluate direct în microcosmos. Nu este posibilă însă nici renunţarea completă la acestea, din cauza rolului lor foarte important la scară macroscopică. Aşadar, va trebui să modificăm formalismul clasic, într-o manieră care să permită atât evitarea oricărei contradicţii la nivel cuantic, cât şi reobţinerea tuturor legilor macroscopic-consacrate. Cum trecerea de la cuantic spre clasic se poate face prin intermediul valorilor medii ale observabilelor sistemului în stările fizice ale acestuia, rezultă că fixarea de etalon Lorentz va trebui înlocuită, în microcosmos, cu una mai slabă, aşa-numita *condiţie Fermi-Lorentz*, a cărei medie însă, în macrocosmos, să fie întotdeauna zero pe stările fizice $|\psi\rangle$ ale câmpului. De asemenea, lagrangeianul $\mathcal{L}_M$ va trebui modificat, astfel încât ecuaţia $\Box A_i = 0$ să rezulte direct, fără nici o condiţie asupra componentelor A_i, să asigure un caracter netrivial al relaţiei de comutare Bohr-Heisenberg pentru componenta temporală a impulsului canonic conjugat şi să păstreze, în valoare medie, invarianţa *gauge* $U(1)$ a teoriei, care este răspunzătoare, după cum ştim, de caracterul conser-

vativ al sarcinii electrice. Cum anume se efectuează această modificare s-a descoperit în anul 1932, fiind reprezentată de ceea ce astăzi numim lagrangeianul Fock-Dirac.

A. Lagrangeianul Fock-Dirac

Clasic, ideea s-a bazat pe metoda multiplicatorilor Lagrange. Dacă $A^i{}_{,i} = 0$ este o constrângere, iar densitatea de lagrangeian este binomială în prima derivată a 4-potenţialului, atunci înseamnă că putem adăuga, la $\mathcal{L}_M$, printr-un multiplicator ξ, termenul $(A^i{}_{,i})^2$, obţinând lagrangeianul

$$\mathcal{L}[A,\xi] = \frac{1}{4} F^{ik} F_{ik} + \frac{\xi}{2} \left(A^i{}_{,i}\right)^2 . \tag{3.1}$$

Variaţia după ξ ne oferă condiţia Lorentz, iar cea după A ne conduce la ecuaţia de mişcare

$$F^{ik}{}_{,k} = \xi \eta^{ik} A^l{}_{,lk}$$

adică, în mod concret,

$$\Box A_i = (1-\xi) A^l{}_{,li} . \tag{3.2}$$

Evident, constrângerea (corespunzătoare etalonării Lorentz) anulează membrul drept al ecuaţiei (3.2), conducând la ecuaţia d'Alembert de propagare a 4-potenţialului. Dar aspectul cel mai important, sesizat de Fock şi Dirac, a fost acela că şi alegerea $\xi = 1$ realizează acelaşi lucru. Postulând, la nivel cuantic, valabilitatea densităţii de lagrangeian

$$\mathcal{L}_{FD} = \frac{1}{4} F^{ik} F_{ik} + \frac{1}{2} \left(A^i{}_{,i}\right)^2 \tag{3.3}$$

pentru câmpul electromagnetic, ecuaţia

$$\Box A_i = 0 \tag{3.4}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

rezultă direct din aceasta (ca ecuaţie Euler-Lagrange) indiferent de comportarea funcţiei scalare $A^l{}_{,l}$, deci cu totul independent de valabilitatea condiţiei Lorentz de etalonare în microcosmos. În acest fel, contradicţia implicată de necomutarea operatorilor Lorentz-Dirac,

$$\left[\hat{D}\,,\hat{A}^i{}_{,i}\right] \neq 0$$

este (cel puţin pentru moment) eliminată, deoarece nu mai avem explicit nevoie de ecuaţia

$$\hat{A}^i{}_{,i}|\psi\rangle = 0\,. \tag{3.5}$$

În ceea ce priveşte prima problemă, cea cu valoarea identic nulă a impulsului π^{44} obţinut din $\mathcal{L}_M$, care distruge relaţia de comutare Bohr-Heisenberg pentru componentele temporale ale variabilelor canonic conjugate $\{\pi^{i4}\,,\,A_k\}$, observăm că aceasta este, din start, rezolvată, prin aceea că lagrangeianul Fock-Dirac $\mathcal{L}_{FD}$ conduce la expresia

$$\pi^{44} = -\frac{\partial \mathcal{L}_{FD}}{\partial A_{4,4}} = A^l{}_{,l} \tag{3.6}$$

care, după cum am văzut, pentru $\xi = 1$, nu mai trebuie să fie, în mod necesar, zero.

Înainte de a trece la prezentarea efectivă a metodei covariant-canonice de cuantificare a câmpului electromagnetic, dorim să anticipăm şi chiar să insistăm puţin asupra altor două chestiuni legate de forma şi consecinţele lagrangeianului Fock-Dirac care, dacă sunt înţelese corect, vor simplifica foarte mult calculele ulterioare. Ambele, după cum este de aşteptat, se referă la posibilele contribuţii fizice, observabile, ale termenului suplimentar $\frac{1}{2}\,(A^i{}_{,i}\,)^2$.

Prima chestiune are în vedere că existenţa acestui termen distruge invarianţa de etalon $U(1)$ a teoriei. Supravieţuirea, la scară macroscopică, a acestui termen ar determina, printre altele, violarea legii de conservare a sarcinii electrice, aspect complet inacceptabil, având în vedere verificarea experimentală, extrem de precisă, a acestei legi. Aşa

cum spuneam când aminteam de necesitatea modificării formalismului clasic într-o manieră care să păstreze valabilitatea legilor macroscopice, vom avea nevoie de un analog cuantic al condiţiei Lorentz, care să selecteze stările fizice $|\psi\rangle$ ale câmpului electromagnetic, astfel încât media operatorului Lorentz $\hat{A}^i{}_{,i}$ pe aceste stări să fie zero,

$$\langle\psi|\hat{A}^i{}_{,i}|\psi\rangle \equiv 0\,. \tag{3.7}$$

Ca o paranteză, pentru cititorul mai puţin avizat, subliniem că anularea valorii medii a unui operator într-o stare $|\psi\rangle$ nu înseamnă automat anularea acţiunii operatorului asupra stării respective. Un exemplu imediat este cel al observabilelor coordonată $\hat{x}$, sau impuls $\hat{p}$, în cazul oscilatorului liniar armonic din Mecanica Cuantică. Astfel, deşi $\langle n|\hat{x}|n\rangle = \langle n|\hat{p}|n\rangle = 0$, atât $\hat{x}|n\rangle$, cât şi $\hat{p}|n\rangle$ sunt combinaţii liniare, netriviale, ale stărilor proprii $|n+1\rangle$ şi $|n-1\rangle$. Cu alte cuvinte, este posibil ca relaţia $\langle\psi|\hat{A}^i{}_{,i}|\psi\rangle = 0$ să fie valabilă, fără ca $|\psi\rangle$ să fie o soluţie a ecuaţiei (3.5) care, după cum subliniam, nu mai este valabilă la nivel cuantic. Desigur, dacă $\hat{\Omega}|\psi\rangle = 0$ atunci, întotdeauna, $\langle\psi|\hat{\Omega}|\psi\rangle = 0$, dar nu şi reciproc.

Revenind la problemă, vom arăta puţin mai târziu că, într-adevăr, există o astfel de constrângere cuantică, inspirată de relaţia Lorentz de etalonare, care poartă numele de condiţie Fermi-Lorentz şi care selectează stările fizice ale câmpului Maxwell, astfel încât acesta să fie propagat numai prin intermediul fotonilor transversali (numiţi şi fotoni reali). Aspectul important pentru noi, în această etapă, este acela că toate stările $|\psi\rangle$ selectate de condiţia Fermi-Lorentz conduc nu numai la proprietatea (3.7), dar şi la relaţia mai tare

$$\langle\psi|\left(A^i{}_{,i}\right)^2|\psi\rangle = 0\,. \tag{3.8}$$

Prin urmare, toate stările fizice reale (direct observabile în natură) ale câmpului electromagnetic (liber) sunt local invariante $U(1)$ deoarece, pe aceste stări (singurele observabile), lagrangeianul Fock-Dirac se reduce la lagrangeianul clasic $\mathcal{L}_M$ al câmpului Maxwell.

A doua chestiune este următoarea. Termenul suplimentar $\frac{1}{2}(A^i{}_{,i})^2$ din lagrangeianul Fock-Dirac alterează expresia $U(1)$ *gauge*-invariantă a tensorului conservativ impuls-energie

$$T_{ik}^{(M)} = \left[\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{ik}}\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_M\right)\right]_{g\to\eta} \tag{3.9}$$

în spaţiu-timpul Minkowski, adică, în mod concret,

$$T_{ik}^{(M)} = F_i^{\cdot l}F_{kl} - \frac{1}{4}\eta_{ik}F^{lm}F_{lm}\,, \tag{3.10}$$

pentru câmpul electromagnetic, prin contribuţia tensorial-simetrică de ordin 2,

$$T_{ik}^{(G)} = -\left[A^l{}_{,li}\,A_k + A^l{}_{,lk}\,A_i\right] + \eta_{ik}\left[A^l{}_{,lm}\,A^m + \frac{1}{2}\left(A^l{}_{,l}\right)^2\right] \tag{3.11}$$

local $U(1)$ neinvariantă, care se obţine (după un calcul simplu) din relaţia de definiţie a oricărui tensor conservativ al materiei, în cazul nostru,

$$T_{ik}^{(G)} = \left[\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{ik}}\left(\sqrt{-g}\,\frac{1}{2}(A^l{}_{,l})^2\right)\right]_{g\to\eta}$$

(pe spaţiul Minkowski), indicele G desemnând că invarianţa *gauge* este alterată (în sensul discutat mai sus), tensorul total al energiei fiind, evident, $T_{ik}^{(M)}+T_{ik}^{(G)}$. Întrebarea este aceasta: sunt sau nu sunt afectate observabilele impuls şi energie ale câmpului Maxwell în stările sale reale

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \langle\psi|P_\mu|\psi\rangle = -\int d^3x\,\langle\psi|T_{\mu 4}^{(M)}|\psi\rangle \\ &\text{b)}\quad \langle\psi|H|\psi\rangle = \int d^3x\,\langle\psi|T_{44}^{(M)}|\psi\rangle \end{aligned} \tag{3.12}$$

de prezenţa extra-contribuţiilor Fock-Dirac

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad P_\mu^{(G)} = -\int d^3x\,T_{\mu 4}^{(G)} \\ &\text{b)}\quad H^{(G)} = \int d^3x\,T_{44}^{(G)}\,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

BCU IAŞI CENTRU UNIVERSITY LIBRARY

Logic vorbind, dat fiind răspunsul la prima chestiune, deoarece $\mathcal{L}_{FD}$ se reduce la $\mathcal{L}_M$ în stările fizice ale câmpului electromagnetic, ne vom aştepta ca valorile medii (în stările $|\psi\rangle$) ale operatorilor $P_\mu^{(G)}$ şi $H^{(G)}$ să fie, de asemenea, zero, astfel încât valorile observabile ale impulsului şi energiei câmpului electromagnetic, date de (3.12), să coincidă cu estimările lor clasice. Într-adevăr, după cum vom vedea în subparagraful dedicat condiţiei Fermi-Lorentz şi consecinţelor acesteia, relaţiile Bohr-Heisenberg de comutare, natura stărilor $|\psi\rangle$ şi proprietăţile (3.7, 8) ne vor conduce direct la demonstrarea rezultatelor

$$\langle\psi|P_\mu^{(G)}|\psi\rangle = 0$$

şi

$$\langle\psi|H^{(G)}|\psi\rangle = \textit{termen de zero}$$

(adică termen ce poate fi eliminat prin *ordonare normală*).

B. Expresia operatorului $A_i(x)$. Setul complet ortonormal al modurilor de frecvenţă ale câmpului Maxwell

După cum am văzut, forma (3.3) a lagrangeianului Fock-Dirac conduce la sistemul Euler-Lagrange (3.4), în care cele patru componente A_i ale potenţialului, nu numai că sunt complet decuplate, dar satisfac şi acelaşi tip de ecuaţie, generic reprezentată de

$$\Box A = 0\,. \tag{3.14}$$

Prin analogie cu cazul câmpului scalar de masă nulă, putem căuta soluţia sub forma reprezentării Fourier 4-dimensionale

$$A(x) = \int d^4k\, A(k)\, e^{ikx}\,, \tag{3.15}$$

cu $k = (k^i)_{i=\overline{1,4}} = (\vec{k}, \omega)$ şi $kx = \eta_{ik}k^ix^k = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t$. Înlocuind în (3.14), rezultă ecuaţia

$$\int d^4k\, k^2\, A(k)\, e^{ikx} = \int d^4k\, \left(|\vec{k}|^2 - \omega^2\right) A(k)\, e^{ikx} = 0$$

care, pentru $\omega^2 \neq |\vec{k}|^2$, impune imediat $A(k) = 0$. Pentru obţinerea unei soluţii netriviale, trebuie să avem

$$A(k) \sim \delta(\omega^2 - |\vec{k}|^2) . \tag{3.16}$$

Cum

$$\delta(\omega^2 - |\vec{k}|^2) = \frac{\delta(\omega - |\vec{k}|)}{2|\vec{k}|} + \frac{\delta(\omega + |\vec{k}|)}{2|\vec{k}|} ,$$

rezultă că vor exista două soluţii fundamentale (liniar independente), una de frecvenţă pozitivă $\omega = |\vec{k}| = \omega_{\vec{k}}$, dată de

$$\overset{(+)}{A}(x) = \int d^3k \, \frac{A(\vec{k}, \omega_{\vec{k}})}{2|\vec{k}|} \, e^{ikx} \tag{3.17}$$

şi cealaltă de frecvenţă negativă, $\omega = -\omega_{\vec{k}}$, având expresia

$$\overset{(-)}{A}(x) = \int d^3k \, \frac{A(\vec{k}, -\omega_{\vec{k}})}{2|\vec{k}|} \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \omega_{\vec{k}} t)} . \tag{3.18}$$

Dacă, în aceasta din urmă, îl trecem pe $\vec{k}$ în $-\vec{k}$, vom avea $kx \to -kx$, deci

$$\overset{(-)}{A}(x) = \int d^3k \, \frac{A(-\vec{k}, -\omega_{\vec{k}})}{2|\vec{k}|} \, e^{-ikx} . \tag{3.19}$$

Prin urmare, este posibilă introducerea unei funcţii complexe

$$f_{\vec{k}}(x) = N_{\vec{k}} \, e^{ikx} \tag{3.20}$$

şi a patru componente complexe $\{a_i(\vec{k})\}_{i=\overline{1,4}}$, astfel încât soluţia generală, cu valori în R, a ecuaţiei (3.4) să se exprime sub forma

$$A_i(x) = \int d^3k \, \left[a_i(\vec{k}) \, f_{\vec{k}}(x) + \bar{a}_i(\vec{k}) \, \bar{f}_{\vec{k}}(x) \right] , \tag{3.21}$$

bara reprezentând conjugarea complexă.

BCUIAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

La nivelul celei de a doua cuantificări, componentele $\{a_i(\vec{k})\}_{i=\overline{1,4}}$ devin operatori şi, astfel, forma generală a operatorului de câmp autoadjunct $A_i(x)$ va fi dată de reprezentarea integrală (3-dimensională) în raport cu modurile de frecvenţă (pozitivă şi, respectiv, negativă) $\left\{f_{\vec{k}}(x)\,,\,\bar{f}_{\vec{k}}(x)\right\}_{\vec{k}\in\mathbf{R}^3}$

$$A_i(x) = \int d^3k \left[a_i(\vec{k})\, f_{\vec{k}}(x) + a_i^{\dagger}(\vec{k})\, \bar{f}_{\vec{k}}(x)\right]. \tag{3.22}$$

Prin introducerea produsului scalar

$$(f\,,\,g) = -i \int J^i(f,g)\, dS_i\,, \tag{3.23}$$

cu

$$\text{a)}\quad J^i(f,g) = \eta^{ik}\left[\bar{f} g_{,k} - \bar{f}_{,k}\, g\right]$$

$$\text{b)}\quad dS_i = \frac{1}{3!}\,\varepsilon_{ijkl}\, dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l = I_{\partial_i}\, d\Omega \tag{3.24}$$

(unde I este "produsul pe primul factor" , $d\Omega$ este cuadrivolumul şi $\varepsilon_{1234} = -1$), pe spaţiul liniar $\mathcal{F}$ al funcţiilor complexe definite pe spaţiul Minkowski, obţinem pentru două moduri oarecare de frecvenţă pozitivă, $f_{\vec{k}}$ şi $f_{\vec{k}'}$, expresia

$$\left(f_{\vec{k}}\,,\, f_{\vec{k}'}\right) = -i \int \eta^{il}\left[\bar{f}_{\vec{k}}\, f_{\vec{k}',l} - \bar{f}_{\vec{k},l}\, f_{\vec{k}'}\right] dS_i\,. \tag{3.25}$$

Cum, în spaţiul Minkowski, 3-suprafeţele de $x^4 = t = \textit{constant}$ sunt Cauchy-complete, adică punerea problemei Cauchy este corect formulată, vom evalua produsul scalar (3.25) pe una din acestea, pentru care avem, evident, $dS_\mu = 0\,(\mu = \overline{1,3})$, $dS_4 = \varepsilon_{4123}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = d^3x$, obţinând

$$\left(f_{\vec{k}}\,,\, f_{\vec{k}'}\right) = i \int \left[\bar{f}_{\vec{k}}\, f_{\vec{k}',4} - \bar{f}_{\vec{k},4}\, f_{\vec{k}'}\right] d^3x\,, \tag{3.26}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde rezultă, prin utilizarea expresiei (3.20),

$$\left(f_{\vec{k}}\,,\, f_{\vec{k}'}\right) = (2\pi)^3 \left(\omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}'}\right) \bar{N}_{\vec{k}} N_{\vec{k}'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \,. \tag{3.27}$$

Aşadar, modurile cu vectori de undă diferiţi sunt deja ortogonale, iar normarea fiecăruia dintre ele se face prin alegerea valorii

$$N_{\vec{k}} = \left[(2\pi)^3\, 2\omega_{\vec{k}}\right]^{-1/2} \quad , \text{ cu } \omega_{\vec{k}} = |\vec{k}| \,, \tag{3.28}$$

a aşa-numitei *constante de normare*. Rezultă astfel setul complet ortonormal

$$\left(f_{\vec{k}'}\,,\, f_{\vec{k}}\right) = \delta(\vec{k}' - \vec{k}) \,, \quad (\forall)\, \vec{k}, \vec{k}' \in \mathrm{R}^3 \,, \tag{3.29}$$

al modurilor de frecvenţă pozitivă

$$f_{\vec{k}}(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2(2\pi)^3\, \omega_{\vec{k}}}} \,, \text{ cu } k = (\vec{k}, \omega_{\vec{k}}) \,, \tag{3.30}$$

cele de frecvenţă negativă obţinându-se prin conjugare complexă,

$$\bar{f}_{\vec{k}}(x) = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2(2\pi)^3\, \omega_{\vec{k}}}} \,. \tag{3.31}$$

Din faptul că acestea coincid cu modurile de frecvenţă ale câmpului scalar real nemasiv, iar dezvoltarea (3.22) este practic aceeaşi — excepţie făcând prezenţa indicelui "i", corespunzător naturii vectoriale a 4-potenţialului — cu cea a operatorului de câmp

$$\phi(x) = \int d^3k \left[a(\vec{k})\, f_{\vec{k}}(x) + a^{\dagger}(\vec{k})\, \bar{f}_{\vec{k}}(x)\right]$$

al scalarului real, putem estima că $\left\{a_i(\vec{k})\,,\, a_i^{\dagger}(\vec{k})\right\}_{i=\overline{1,4}}$ vor fi operatori de anihilare şi, respectiv, creare (a cuantei de "orientare" i şi impuls $\vec{k}$, a câmpului electromagnetic) exact precum operatorii $\{a(\vec{k}), a^{\dagger}(\vec{k})\}$

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

anihilează şi, respectiv, creează o cuantă de impuls $\vec{k}$ a câmpului scalar nemasiv. Desigur, va exista o diferenţă de tip tensorial simetric de ordin 2 între algebra

$$\left[a_i(\vec{k'})\,,\, a_k^{\dagger}(\vec{k})\right] = tensor_{ik}\,\delta(\vec{k'}-\vec{k}) \tag{3.32}$$

a operatorilor (de anihilare-creare a cuantelor) câmpului Maxwell, faţă de algebra uzuală

$$\left[a_i(\vec{k'})\,,\, a_k^{\dagger}(\vec{k})\right] = \delta(\vec{k'}-\vec{k})$$

a operatorilor câmpului scalar real, nemasiv. Forma concretă a componentelor "$tensor_{ik}$" va fi obţinută în subparagraful următor.

C. Relaţiile Bohr-Heisenberg de comutare

Din expresia (3.3) a densităţii de lagrangeian Fock-Dirac, rezultă impulsul canonic conjugat

$$\pi^{i4} = F^{i4} - \eta^{i4}A^{l}{}_{,l} \tag{3.33}$$

coordonatei generalizate $A_i(x)$, astfel încât extensiunea de tip Bohr-Heisenberg

$$\left[\pi^{i4}(x')\,,\, A_k(x)\right]_{t'=t} = -\,i\,\delta_k^i\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}) \tag{3.34}$$

în Teoria Cuantică a Câmpurilor, a relaţiei de comutare impuls-coordonată din Mecanica Cuantică, capătă forma concretă (explicitând F în raport cu A şi utilizând tensorul metric η pentru ridicarea sau coborârea indicilor)

$$\left[A^{i}{}_{,4}\,(x') - A_4^i(x') - \eta^{i4}A^{l}{}_{,l}\,(x')\,,\, A_k(x)\right]_{t'=t} = -\,i\,\delta_k^i\,\delta(\vec{x}'-\vec{x})\,. \tag{3.35}$$

În exprimare complet covariantă, aceasta devine

$$\left[A_{i,4}(x') - A_{4,i}(x') - \delta_i^4\,A^{l}{}_{,l}\,(x')\,,\, A_k(x)\right]_{t'=t} = -\,i\,\eta_{ik}\,\delta(\vec{x}'-\vec{x})\,. \tag{3.36}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deoarece, din analogia cu cuantificarea scalarului nemasiv, bănuim deja că $\left\{a_i(\vec{k}), a_i^\dagger(\vec{k})\right\}$ sunt respectiv operatorii de anihilare şi creare, vom impune, pe lângă relaţia (3.32), şi relaţiile de comutare (trivială)

$$\left[a_i(\vec{k}')\,,\, a_k(\vec{k})\right] = \left[a_i^\dagger(\vec{k}')\,,\, a_k^\dagger(\vec{k})\right] = 0\,. \tag{3.32'}$$

Acum, "misiunea" este clară. Utilizând expresia (3.22) a operatorului de câmp, forma (3.30, 31) a modurilor de frecvenţă şi relaţiile de comutare (3.32, 32'), trebuie să explicităm componentele "$tensor_{ik}$", astfel încât relaţia de comutare Bohr-Heisenberg (3.36) să fie identic satisfăcută.

Pentru $i = \mu$, de la 1 la 3, trebuie să avem

$$[A_{\mu,4}(x') - A_{4,\mu}(x')\,,\, A_k(x)]_{t'=t} = -i\,\eta_{\mu k}\,\delta(\vec{x}' - \vec{x})\,, \tag{3.37}$$

ceea ce înseamnă

$$\begin{aligned}
&\left[\int d^3k' \left[-i\,\omega_{\vec{k}'}\,a_\mu(\vec{k}')f_{\vec{k}'}(x') + i\,\omega_{\vec{k}'}\,a_\mu^\dagger(\vec{k}')\bar{f}_{\vec{k}'}(x')\right] -\right.\\
&- \int d^3x' \left[i\,k'_\mu\,a_4(\vec{k}')f_{\vec{k}'}(x') - i\,k'_\mu\,a_4^\dagger(\vec{k}')\bar{f}_{\vec{k}'}(x')\right],\\
&\left.\int d^3k \left[a_k(\vec{k})f_{\vec{k}}(x) + a_k^\dagger(\vec{k})\bar{f}_{\vec{k}}(x)\right]\right]_{t'=t} =\\
&= -i\,\eta_{\mu k}\,\delta(\vec{x}' - \vec{x})\,,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

adică, având în vedere relaţiile de comutare (3.32, 32'),

$$\begin{aligned}
&-i\int d^3k'\,d^3k\,\omega_{\vec{k}'}\,(tensor_{\mu k})\,\delta(\vec{k}' - \vec{k})\,\{f_{\vec{k}'}(x')\bar{f}_{\vec{k}}(x)\}_{t'=t} -\\
&-i\int d^3k'\,d^3k\,\omega_{\vec{k}'}\,(tensor_{\mu k})\,\delta(\vec{k}' - \vec{k})\,\{\bar{f}_{\vec{k}'}(x')f_{\vec{k}}(x)\}_{t'=t} -\\
&-i\int d^3k'\,d^3k\,k'_\mu\,(tensor_{4k})\,\delta(\vec{k}' - \vec{k})\,\{f_{\vec{k}'}(x')\bar{f}_{\vec{k}}(x)\}_{t'=t} -\\
&-i\int d^3k'\,d^3k\,k'_\mu\,(tensor_{4k})\,\delta(\vec{k}' - \vec{k})\,\{\bar{f}_{\vec{k}'}(x')f_{\vec{k}}(x)\}_{t'=t} =\\
&= -i\,\eta_{\mu k}\,\delta(\vec{x}' - \vec{x})\,.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

BCU IAŞI FONDUL CENTRAL UNIVERSITAR LIBRARY

Dar, după cum rezultă din forma (3.30, 31) a modurilor de frecvenţă, avem

$$\text{a)}\quad \{f_{\vec{k}'}(x')\bar{f}_{\vec{k}}(x)\}_{t'=t} = \frac{e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{x}'-\vec{k}\cdot\vec{x})}}{2(2\pi)^3\sqrt{\omega_{\vec{k}'}\omega_{\vec{k}}}}\, e^{-i(\omega_{\vec{k}'}-\omega_{\vec{k}})t}$$

$$\text{b)}\quad \{\bar{f}_{\vec{k}'}(x')f_{\vec{k}}(x)\}_{t'=t} = \frac{e^{-i(\vec{k}'\cdot\vec{x}'-\vec{k}\cdot\vec{x})}}{2(2\pi)^3\sqrt{\omega_{\vec{k}'}\omega_{\vec{k}}}}\, e^{i(\omega_{\vec{k}'}-\omega_{\vec{k}})t}\,, \qquad (3.40)$$

ceea ce conduce, prin înlocuire în (3.39) şi integrare după $\vec{k}'$, la relaţia

$$-i\,tensor_{\mu k}\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}) - i\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{k_\mu}{\omega_{\vec{k}}}(tensor_{4k})\cos[\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})] =$$
$$= -i\,\eta_{\mu k}\,\delta(\vec{x}'-\vec{x})\,. \qquad (3.41)$$

Termenul al doilea (din stânga lui (3.41)) este identic zero, deoarece integrala se evaluează pe tot spaţiul impulsurilor, iar integrandul este o funcţie impară de $\vec{k}$. Obţinem astfel

$$tensor_{\mu k} = \eta_{\mu k}\,,\ (\forall)\ \mu = \overline{1,3}\,;\ k = \overline{1,4}\,, \qquad (3.42)$$

adică

$$tensor_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$$
$$tensor_{\mu 4} = 0\,,\ (\forall)\ \mu,\nu = \overline{1,3}\,. \qquad (3.43)$$

Pentru determinarea componentei "$tensor_{44}$", vom lua $i = 4$ în relaţia Bohr-Heisenberg (3.36). Rezultă

$$\left[A^l{}_{,l}(x')\,,\,A_k(x)\right]_{t'=t} = i\,\eta_{4k}\,\delta(\vec{x}'-\vec{x})\,, \qquad (3.44)$$

adică

$$\left[\int d^3k'\,\left[k'^l a_l(\vec{k}')f_{\vec{k}'}(x') - k'^l a_l^\dagger(\vec{k}')\bar{f}_{\vec{k}'}(x')\right]\,,\right.$$
$$\left.\int d^3k\,\left[a_k(\vec{k})f_{\vec{k}}(x) + a_k^\dagger(\vec{k})\bar{f}_{\vec{k}}(x)\right]\right]_{t'=t} = \eta_{4k}\,\delta(\vec{x}'-\vec{x})\,, \qquad (3.45)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ceea ce revine la evaluarea componentei "$tensor_{44}$", având în vedere componentele (3.42), astfel încât să fie valabilă

$$\int d^3k' d^3k\, k'^l (tensor_{lk}) \delta(\vec{k}' - \vec{k})$$
$$\left[\{f_{\vec{k}'}(x') \bar{f}_{\vec{k}}(x)\}_{t'=t} + \{\bar{f}_{\vec{k}'}(x') f_{\vec{k}}(x)\}_{t'=t}\right] = \eta_{4k}\, \delta(\vec{x}' - \vec{x})\,. \quad (3.46)$$

Integrând după $\vec{k}'$, obţinem

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu}{\omega_{\vec{k}}} (tensor_{\mu k}) \cos[\vec{k} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})] + tensor_{4k}\, \delta(\vec{x}' - \vec{x}) =$$
$$= \eta_{4k}\, \delta(\vec{x}' - \vec{x})\,, \quad (3.47)$$

adică, utilizând componentele (3.42),

$$tensor_{4k}\, \delta(\vec{x}' - \vec{x}) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu}{\omega_{\vec{k}}} \eta_{\mu k} \cos[\vec{k} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})] =$$
$$= \eta_{4k}\, \delta(\vec{x}' - \vec{x})\,. \quad (3.48)$$

Pentru $k = \nu$, de la 1 la 3, rezultă

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\nu}{\omega_{\vec{k}}} \cos[\vec{k} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})] = 0\,, \quad (3.49)$$

ceea ce este adevărat, din cauza caracterului impar al integrandului. Pentru $k = 4$, cum $\eta_{\mu 4} \equiv 0$, rămânem cu

$$tensor_{44} = \eta_{44} = -1\,. \quad (3.50)$$

Pe scurt, din (3.42) sau (3.43) şi (3.50), rezultă clar

$$tensor_{ik} = \eta_{ik}\,, \quad (3.51)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ceea ce demonstrează că satisfacerea relaţiilor de comutare Bohr-Heisenberg (3.36) impune, într-o manieră Lorentz-covariantă, algebra

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \left[a_i(\vec{k}'), a_k(\vec{k})\right] = 0 \\ &\text{b)} \quad \left[a_i^\dagger(\vec{k}'), a_k^\dagger(\vec{k})\right] = 0 \\ &\text{c)} \quad \left[a_i(\vec{k}'), a_k^\dagger(\vec{k})\right] = \eta_{ik}\,\delta(\vec{k}' - \vec{k}) \end{aligned} \tag{3.52}$$

a operatorilor $\{a_i(\vec{k}), a_i^\dagger(\vec{k})\}_{i=\overline{1,4}}$ de anihilare şi, respectiv, de creare a cuantelor câmpului electromagnetic.

Dar despre ce fel de cuante este vorba? Întrebarea are un sens profund, deoarece câmpul, fiind vectorial, are spinul $s = 1$ şi, fiind lipsit de masă, nu poate avea, la nivel observabil, decât două stări de polarizare (în loc de $2s + 1 = 3$ — dacă ar fi fost masiv), care sunt bine cunoscute ca stări transversale ale câmpului electromagnetic liber. Relaţia de comutatori (3.52.c) prevede, însă, în cazul cuantificării canonice covariante, existenţa a patru "stări de orientare" ale cuantelor câmpului. Dacă utilizăm, pentru fiecare din aceste cuante, denumirea de foton, şi orientăm, într-un caz particular, axa *oz* după direcţia vectorului de undă $\vec{k}$, rezultă că vom avea, la nivelul celei de a doua cuantificări a câmpului Maxwell, în formulare $SO(3,1)$-covariantă, pe lângă fotonii transversali (reali) creaţi şi, respectiv, anihilaţi de

$$\left\{a_A^\dagger(\vec{k} \parallel oz), a_A(\vec{k} \parallel oz)\right\}_{A=1,2},$$

încă două tipuri de fotoni, denumiţi *virtuali* datorită caracterului lor macroscopic inobservabil, şi anume, cei longitudinali, asociaţi cu acţiunea operatorilor

$$\{a_3(\vec{k} \parallel oz), a_3^\dagger(\vec{k} \parallel oz)\}$$

şi cei temporali anihilaţi şi, respectiv, creaţi de

$$\{a_4(\vec{k} \parallel oz), a_4^\dagger(\vec{k} \parallel oz)\}.$$

Aceştia vor trebui eliminaţi, la nivel observabil, utilizând o constrângere cuantică, fizico-matematic riguroasă, care să selecteze stările fizice ale câmpului electromagnetic liber.

D. Condiţia Fermi-Lorentz

În spiritul relativităţii einsteiniene, cel al independenţei de reper, trebuie mai întâi să trecem, de la cazul particular $oz \parallel \vec{k}$, la cazul general, când vectorul de undă are o orientare oarecare, descrisă de înclinaţia θ faţă de $oz = ox^3$ şi azimutul φ (în planul xoy) faţă de $ox = ox^1$. Utilitatea coordonatelor sferice este evidentă, astfel încât vom lua versorul radial

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \tag{3.53}$$

şi cei doi versori transversali (şi, respectiv, perpendiculari) $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ în lungul variaţiei lui θ şi, respectiv, a unghiului azimutal φ. În termenii unei descrieri spaţio-temporale, vom trece aşadar de la forma carteziană

$$ds^2 = \eta_{ik}\, dx^i\, dx^k \tag{3.54}$$

a metricii Minkowski, la forma ei sferic-simetrică

$$ds^2 = \eta_{ab}\omega^a\omega^b\,,\ \eta_{ab} = \mathrm{diag}(1,\,1,\,1,\,-1)\,, \tag{3.55}$$

pentru care 1-formele $\{\omega^a\}_{a=\overline{1,4}}$ ale bazei duale pseudo-ortonormale au expresiile

$$\begin{aligned} \omega^1 &= r\,d\theta \\ \omega^2 &= r\,\sin\theta\,d\varphi \\ \omega^3 &= dr \\ \omega^4 &= dt\,. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Din relaţia de definiţie a dualităţii

$$\langle \omega^a\,,\, \vec{e}_b \rangle = \delta^a_b \tag{3.57}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

dintre baza secţiunilor fibratului cotangent $T^*(M)$ şi cea a secţiunilor fibratului tangent $T(M)$, rezultă tetradul pseudo-ortonormal

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \vec{e}_3 &= \frac{\partial}{\partial r} \\ \vec{e}_4 &= \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \tag{3.58}$$

care explicitează, în coordonate sferice, cei trei versori $\{\vec{e}_\mu\}_{\mu=\overline{1,3}} = \{\vec{e}_A, \vec{e}_3\}_{A=1,2}$ menţionaţi anterior. În raport cu bazele carteziene (reciproc duale) $\{dx^i\}_{i=\overline{1,4}}$, $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{i=\overline{1,4}}$, avem reprezentările

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \omega^a = \omega^a_i\, dx^i \\ &\text{b)}\quad \vec{e}_a = e^i_a \frac{\partial}{\partial x^i}, \end{aligned} \tag{3.59}$$

în care elementele ω^a_i şi e^i_a ale celor două matrice de trecere sau, mai corect, de schimbare a bazei, satisfac relaţiile fundamentale

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \eta_{ab}\,\omega^a_i\,\omega^b_k = \eta_{ik} \\ &\text{b)}\quad \eta_{ik}\,e^i_a\,e^k_b = \eta_{ab} \\ &\text{c)}\quad \omega^a_i\,e^i_b = \delta^a_b, \end{aligned} \tag{3.60}$$

după cum rezultă din invarianţa (3.54, 55) a metricii la schimbarea bazei, din definiţia

$$\eta_{ab} = \eta(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b \tag{3.61}$$

a tensorului metric fundamental (în raport cu tetradul $\{\vec{e}_a\}_{a=\overline{1,4}}$) şi din contracţia (3.57). Cu ajutorul proprietăţilor (3.60), se pot stabili

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

imediat relaţiile de corespondenţă $\omega_i^a \leftrightarrow e_b^k$, şi anume

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \omega_i^a = \eta^{ab}\,\eta_{ik}\,e_b^k \\ &\text{b)} \quad e_a^i = \eta_{ab}\,\eta^{ik}\,\omega_k^b\,, \end{aligned} \tag{3.62}$$

care conduc atât la aşa-numita relaţie de completitudine

$$e_a^i\,\omega_k^a = \delta_k^i\,, \tag{3.63}$$

ca dual㠹 a relaţiei (3.60.c), cât şi la inversele transformărilor (3.59), adică

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad dx^i = e_a^i\,\omega^a \\ &\text{b)} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \omega_i^a\,\vec{e}_a\,. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Elementele e_a^i ale matricei e asociate aplicaţiei cotangente (3.64.a) se determină din forma (finită)

$$\begin{aligned} x^1 &= r\sin\theta\cos\varphi \\ x^2 &= r\sin\theta\sin\varphi \\ x^3 &= r\cos\theta \\ x^4 &= t \end{aligned} \tag{3.65}$$

a transformării de coordonate, prin diferenţiere (după θ, φ, r, t) şi identificare după 1-formele bazei duale pseudo-ortonormale $\{\omega^a\}_{a=\overline{1,4}}$ date de (3.56). Concret, avem

$$\begin{aligned} dx^1 &= \cos\theta\cos\varphi\,\omega^1 - \sin\varphi\,\omega^2 + \sin\theta\cos\varphi\,\omega^3 \\ dx^2 &= \cos\theta\sin\varphi\,\omega^1 + \cos\varphi\,\omega^2 + \sin\theta\sin\varphi\,\omega^3 \\ dx^3 &= -\sin\theta\,\omega^1 + \cos\theta\,\omega^3 \\ dx^4 &= \omega^4\,, \end{aligned} \tag{3.66}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde rezultă expresiile vectorilor $\vec{e}_a$ în raport cu baza carteziană $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{i=\overline{1,4}}$, şi anume

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta, 0)\\
\vec{e}_2 &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0, 0)\\
\vec{e}_3 &= (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta, 0)\\
\vec{e}_4 &= (0, 0, 0, 1)\,.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Pentru 1-formele ω^a, în reprezentarea (3.59.a), obţinem, din (3.67) şi (3.62.a), expresiile

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta, 0)\\
\omega^2 &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0, 0)\\
\omega^3 &= (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta, 0)\\
\omega^4 &= (0, 0, 0, 1)\,,
\end{aligned} \tag{3.68}$$

care coincid, în formulare matriceală (1×4), cu cele din (3.67), datorită caracterului ortogonal al matricei

$$\begin{pmatrix}
\cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0\\
\cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & 0\\
-\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

din aplicaţia cotangentă (3.66).

Ce se întâmplă cu componentele operatorului de câmp $A(x)$? Privit ca obiect geometric, el este o 1-formă în spaţiul Minkowski M_4, deci

$$A_i\,dx^i = A_a\,\omega^a\,. \tag{3.69}$$

Descompunând această relaţie, în acord cu reprezentarea spectrală (3.22), în părţi de frecvenţă pozitivă şi, respectiv, negativă, rezultă că vom avea un set de operatori de anihilare-creare $\{c_a(\vec{k})\,,\ c_a^\dagger(\vec{k})\}_{a=\overline{1,4}}$, astfel încât

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$
\begin{aligned}
a_i(\vec{k})\, dx^i &= c_a(\vec{k})\, \omega^a \qquad \text{(pentru frecvenţele pozitive)} \\
a_i^\dagger(\vec{k})\, dx^i &= c_a^\dagger(\vec{k})\, \omega^a \qquad \text{(pentru frecvenţele negative).}
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

Din (3.59.a) rezultă

$$
\begin{aligned}
a_i(\vec{k}) &= \omega_i^a\, c_a(\vec{k}) \\
a_i^\dagger(\vec{k}) &= \omega_i^a\, c_a^\dagger(\vec{k})\,,
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

iar din (3.64.a) obţinem transformările inverse

$$
\begin{aligned}
c_a(\vec{k}) &= e_a^i\, a_i(\vec{k}) \\
c_a^\dagger(\vec{k}) &= e_a^i\, a_i^\dagger(\vec{k})\,.
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

Coroborate cu relaţiile de comutare (3.52), acestea conduc la

$$
\begin{aligned}
\left[c_a(\vec{k'})\,,\, c_b(\vec{k})\right] &= e_a^i\, e_b^k \left[a_i(\vec{k'})\,,\, a_k(\vec{k})\right] = 0 \\
\left[c_a^\dagger(\vec{k'})\,,\, c_b^\dagger(\vec{k})\right] &= e_a^i\, e_b^k \left[a_i^\dagger(\vec{k'})\,,\, a_k^\dagger(\vec{k})\right] = 0 \\
\left[c_a(\vec{k'})\,,\, c_b^\dagger(\vec{k})\right] &= e_a^i\, e_b^k \left[a_i(\vec{k'})\,,\, a_k^\dagger(\vec{k})\right] = \\
&= \eta_{ik}\, e_a^i\, e_b^k\, \delta(\vec{k'} - \vec{k}) = \eta_{ab}\, \delta(\vec{k'} - \vec{k})\,,
\end{aligned}
$$

de unde rezultă că relaţiile Bohr-Heisenberg, fundamentale cuantificării canonice, sunt echivalente, în formulare $SO(3,1)$-covariantă, cu satisfacerea algebrei

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \left[c_a(\vec{k'})\,,\, c_b(\vec{k})\right] = 0 \\
&\text{b)} \quad \left[c_a^\dagger(\vec{k'})\,,\, c_b^\dagger(\vec{k})\right] = 0 \\
&\text{c)} \quad \left[c_a(\vec{k'})\,,\, c_b^\dagger(\vec{k})\right] = \eta_{ab}\, \delta(\vec{k'} - \vec{k})
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de către operatorii $\{c, c^\dagger\}$, corespunzători anihilării şi, respectiv, creării fotonilor transversali ($a = 1, 2$), longitudinali ($a = 3$) şi temporali ($a = 4$). Demonstrarea acţiunii operatorilor $\left\{c_\mu(\vec{k})\,,\, c_\mu^\dagger(\vec{k})\right\}_{\mu\overline{1,3}}$, ca operatori de anihilare-creare este foarte asemănătoare celei din cazul cuantificării scalarului real şi nu o vom mai repeta aici. Este suficient să reţinem rezultatele:

(i) Există o stare *ket*, Lorentz invariantă, simbolic notată cu $|0\rangle$, care este anihilată (suprimată complet) de toţi operatorii $c_a(\vec{k})$ şi/sau $a_i(\vec{k})$, adică

$$c_a(\vec{k})|0\rangle = 0\ ,\ a_i(\vec{k})|0\rangle = 0\,, \tag{3.74}$$

oricare ar fi vectorul de undă $\vec{k}$ din $\mathbf{R}^3$. Evident, duala ei, adică starea *bra* $\langle 0|$, se obţine din (3.74), prin conjugare hermitică,

$$\langle 0|c_a^\dagger(\vec{k}) = 0\ ,\ \langle 0|a_i^\dagger(\vec{k}) = 0\,. \tag{3.74'}$$

(ii) Toate stările *ket* multifotonice, de gen spaţial, transversale şi/sau longitudinale, de tipul $|n_1(\vec{k})\,, n_2(\vec{k})\,, n_3(\vec{k})\,, 0\rangle$, se obţin din starea de vid, prin acţiunea repetată de n_1-ori, n_2-ori şi n_3-ori, a operatorilor $c_1^\dagger(\vec{k})\,, c_2^\dagger(\vec{k})\,, c_3^\dagger(\vec{k})$, adică până la termeni factoriali de simetrizare,

$$|n_1(\vec{k})\,, n_2(\vec{k})\,, n_3(\vec{k})\,, 0\rangle = \left(c_3^\dagger(\vec{k})\right)^{n_3}\left(c_2^\dagger(\vec{k})\right)^{n_2}\left(c_1^\dagger(\vec{k})\right)^{n_1}|0\rangle\,, \tag{3.75}$$

unde am omis factorul de normare.

(iii) Fiecare operator $c_\mu(\vec{k})$, respectiv $c_\mu^\dagger(\vec{k})$, acţionează la dreapta asupra unei stări multifotonice de gen spaţial, notată simplifi-

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cator prin $|\ldots n_\mu(\vec{k})\ldots\rangle$, după relaţia

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad c_\mu(\vec{k})|\ldots n_\mu(\vec{k})\ldots\rangle = \sqrt{n_\mu(\vec{k})}\,|\ldots n_\mu(\vec{k})-1\ldots\rangle \\ &\text{b)}\quad c_\mu^\dagger(\vec{k})|\ldots n_\mu(\vec{k})\ldots\rangle = \sqrt{n_\mu(\vec{k})+1}\,|\ldots n_\mu(\vec{k})+1\ldots\rangle\,. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Acţiunea la stânga se obţine imediat, prin intermediul conjugării hermitice, ca

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \langle\ldots n_\mu(\vec{k})\ldots|c_\mu^\dagger(\vec{k}) = \sqrt{n_\mu(\vec{k})}\,\langle\ldots n_\mu(\vec{k})-1\ldots| \\ &\text{b)}\quad \langle\ldots n_\mu(\vec{k})\ldots|c_\mu(\vec{k}) = \sqrt{n_\mu(\vec{k})+1}\,\langle\ldots n_\mu(\vec{k})+1\ldots|\,. \end{aligned} \tag{3.76'}$$

(iv) Setul complet al vectorilor de stare multifotonică, de gen spaţial, $|\ldots n_\mu(\vec{k})\ldots\rangle$ formează o bază ortonormală

$$\begin{aligned} &\langle 0,\, n_3'(\vec{k}'),\, n_2',\, (\vec{k}')n_1'(\vec{k}')\,|\,n_1(\vec{k}),\, n_2(\vec{k}),\, n_3(\vec{k}),\, 0\rangle = \\ &= \delta_{n_1'n_1}\delta_{n_2'n_2}\delta_{n_3'n_3}\,\delta(\vec{k}'-\vec{k}) \end{aligned} \tag{3.77}$$

pe subspaţiul Fock lipsit de fotoni temporali.

Aşa cum spuneam, toate aceste rezultate, (i)-(iv), se obţin prin diverse artificii-ingenioase, dar nu foarte complicate, din relaţia de comutare

$$\left[c_\mu(\vec{k}'),\, c_\nu^\dagger(\vec{k})\right] = \delta_{\mu\nu}\,\delta(\vec{k}'-\vec{k}) \tag{3.78}$$

şi existenţa stării de vid $|0\rangle$, satisfăcând proprietăţile (3.74, 74') şi

$$\langle 0|0\rangle = 1\,. \tag{3.79}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ceea ce ne interesează acum sunt stările fotonice de gen temporal $|0, 0, 0, n_4(\vec{k})\rangle$, notate prescurtat $|n_4(\vec{k})\rangle$, precum şi acţiunea operatorilor $\{c_4(\vec{k}), c_4^\dagger(\vec{k})\}$ asupra acestora. Aici, vom avea o surpriză ... Pentru $a = b = 4$, relaţia de comutare (3.75.c) se scrie

$$c_4(\vec{k}')c_4^\dagger(\vec{k}) - c_4^\dagger(\vec{k})c_4(\vec{k}') = -\delta(\vec{k}' - \vec{k}) . \tag{3.80}$$

Aplicând-o stării de vid, obţinem (utilizând (3.74)),

$$c_4(\vec{k}')c_4^\dagger(\vec{k})|0\rangle = -\delta(\vec{k}' - \vec{k})|0\rangle . \tag{3.81}$$

De aici, putem trage imediat două concluzii. Prima, că media pe starea de vid a operatorului $c_4(\vec{k}')c_4^\dagger(\vec{k})$ este

$$\langle 0|c_4(\vec{k}')c_4^\dagger(\vec{k})|0\rangle = -\delta(\vec{k}' - \vec{k}) . \tag{3.82}$$

A doua, că dacă mai aplicăm o dată lui (3.81), la stânga, operatorul $c_4^\dagger(\vec{k})$, obţinem

$$\left(c_4^\dagger(\vec{k})c_4(\vec{k}')\right)\left[c_4^\dagger(\vec{k})|0\rangle\right] = -\delta(\vec{k}' - \vec{k})\, c_4^\dagger|0\rangle , \tag{3.83}$$

adică starea $c_4^\dagger|0\rangle$ este un vector propriu al operatorului $c_4^\dagger c_4$ corespunzător valorii proprii -1. Dacă, pentru moment, facem abstracţie de semnul "$-$", rezultă că $c_4^\dagger|0\rangle$ este o stare cu un singur foton temporal adică, până la un factor β_0, în principiu complex, putem scrie

$$c_4^\dagger(\vec{k})|0\rangle = \beta_0|1_4(\vec{k})\rangle . \tag{3.84}$$

Conjugata hermitică are expresia

$$\langle 0|c_4(\vec{k}) = \bar{\beta}_0\langle 1_4(\vec{k})| , \tag{3.84'}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

astfel încât media pe starea de vid (3.82) ne conduce la relaţia

$$|\beta_0|^2\langle 1_4(\vec{k}')|1_4(\vec{k})\rangle = -\delta(\vec{k}'-\vec{k})\,. \tag{3.85}$$

Fixând $|\beta_0|^2 = 1$, rezultă proprietatea fizică puţin obişnuită, mai bine zis anomală, şi anume că stările unifotonice temporale, satisfăcând pseudo-ortonormarea

$$\langle 1_4(\vec{k}')|1_4(\vec{k})\rangle = -\delta(\vec{k}'-\vec{k}) \tag{3.86}$$

deşi sunt ortogonale pentru valori diferite ale vectorului de undă, sunt stări de normă negativă. Din cauza acestui aspect atât de curios (deopotrivă fizic şi matematic), ele au primit denumirea de stări fantomă (*ghost-states*). Cu alte cuvinte, cuantificarea canonică în formulare Lorentz-covariantă conduce la existenţa câmpurilor fantomă, care apar din subspaţiul Fock al stărilor fotonice temporale. Cum orice teorie cuantică trebuie să se bazeze, la nivel observabil, numai pe stări de normă pozitivă, rezultă, încă o dată, că vom avea nevoie de o condiţie suplimentară şi de un algoritm al aplicării ei, care să "curăţe" teoria, la nivelul macroscopic al prevederilor ei, de aceste fantome. De altfel, din punct de vedere istoric, exact acest aspect al existenţei stărilor de normă negativă şi a necesităţii unui algoritm riguros de eliminare a lor (la nivel observabil) a ţinut pe loc cuantificarea covariant-canonică a câmpului Maxwell. În 1950, Bleuler şi Gupta, lucrând în euclidian-complex (adică $x^\mu = x^\mu$, dar $x^4 = ict$), au avut ideea introducerii unei aşa-numite *metrici indefinite* (tradiţional notată tot cu η) pe spaţiul liniar abstract al stărilor Fock multifotonice (deopotrivă spaţiale şi temporale). Cu ajutorul acesteia, au dezvoltat un formalism consistent — care de atunci le poartă numele — de lucru cu operatori hermitici sau antihermitici, atât pe subspaţiile cu stări de normă pozitivă, cât şi pe cele incluzând stări de normă negativă, pentru evaluarea corectă a valorilor medii (observabile) şi eliminarea fotonilor virtuali. Cititorilor interesaţi într-o foarte mare măsură de cunoaşterea detaliată a formalismului Bleuler-Gupta în exprimarea sa consacrată (adică în euclidian

complex), le recomandăm o serie de lucrări şi tratate, cum ar fi [7, 33, 44, 31, 53].

În expunerea de faţă, deoarece lucrăm în convenţia de signatură +2 a spaţiu-timpului Minkowski, tratat ca un spaţiu-timp hiperbolic şi nu euclidian-complex, vom dezvolta o metodă inspirată din [43], care, punând accent pe prezenţa tensorului metric fundamental η în relaţiile de comutare ale operatorilor de anihilare-creare, ocoleşte aplicarea directă a formalismului Bleuler-Gupta, conducând, însă, la nivel observabil, la aceleaşi rezultate.

Prin urmare, să revenim la relaţia (3.80), în care vom simplifica şi mai mult scrierea, renunţând la indicele 4 şi la specificarea vectorului de undă şi vom regulariza funcţionala δ-Dirac la 1, pentru $\vec{k}' = \vec{k}$. Obţinem, astfel, relaţia de comutare

$$cc^\dagger - c^\dagger c = -1 \tag{3.87}$$

şi ne interesează atât construirea unei baze pseudo-ortonormale $\{|n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\}$ pe spaţiul Fock generat de acţiunea repetată a operatorului $c^\dagger$ asupra stării $|0\rangle$, cât şi exprimarea concretă a acţiunii operatorilor $\{c, c^\dagger\}$, atât la dreapta, cât şi la stânga, asupra vectorilor $|n\rangle$ şi, respectiv, $\langle n|$. Relaţiile (3.81 - 84') şi (3.86) se transpun, simplu, sub forma

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad cc^\dagger|0\rangle = -|0\rangle \\
&\text{b)}\quad \langle 0|cc^\dagger|0\rangle = -1 \\
&\text{c)}\quad (c^\dagger c)[c^\dagger|0\rangle] = -c^\dagger|0\rangle \\
&\text{d)}\quad c^\dagger|0\rangle = e^{i\chi}|1\rangle \\
&\text{e)}\quad \langle 0|c = e^{-i\chi}\langle 1| \\
&\text{f)}\quad \langle 1|1\rangle = -1\,,
\end{aligned} \tag{3.88}$$

unde am introdus un factor de fază $\chi \in \mathbf{R}$, deoarece $\beta_0 = e^{i\chi}$ are, evident, modulul egal cu 1. Din (3.88.d), prin înlocuire în (3.88.a),

BCU IASI / CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

rezultă şi

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad c|1\rangle = e^{i(\pi-\chi)}|0\rangle \\ &\text{b)}\quad \langle 1|c^\dagger = e^{-i(\pi-\chi)}\langle 0|\,. \end{aligned} \tag{3.89}$$

Aplicând comutatorul (3.87) stării fotonic-temporale $|1\rangle$, obţinem, utilizând (3.89.a) şi (3.88.d),

$$cc^\dagger|1\rangle = -2|1\rangle\,, \tag{3.90}$$

precum şi

$$\langle 1|cc^\dagger|1\rangle = 2\,, \tag{3.91}$$

dacă avem în vedere norma negativă (3.88.f). Acţionând, din nou, la stânga cu $c^\dagger$ în relaţia (3.90), rezultă că $c^\dagger|1\rangle$ este un vector propriu al operatorului $c^\dagger c$, corespunzător valorii proprii -2,

$$c^\dagger c[c^\dagger|1\rangle] = -2\,(c^\dagger|1\rangle)\,, \tag{3.92}$$

adică putem scrie

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad c^\dagger|1\rangle = |\beta_1|\,e^{i\chi}|2\rangle \\ &\text{b)}\quad \langle 1|c = |\beta_1|\,e^{-i\chi}\langle 2|\,. \end{aligned} \tag{3.93}$$

Luând în considerare aceste relaţii în media (3.91) pe starea unifotonică temporală a operatorului $cc^\dagger$, obţinem

$$|\beta_1|^2\langle 2|2\rangle = 2\,, \tag{3.94}$$

de unde rezultă că starea bifotonică temporală $|2\rangle$ este de normă pozitivă şi

$$|\beta_1| = \sqrt{2}\,, \tag{3.95}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică (3.93) devine

$$\text{a)}\quad c^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}\,e^{ix}|2\rangle$$
$$\text{b)}\quad \langle 1|c = \sqrt{2}\,e^{-ix}\langle 2| \,. \tag{3.96}$$

Coroborând (3.96.a) cu relaţia (3.90), ajungem la expresia acţiunii operatorilor $\{c, c^\dagger\}$ la dreapta şi, respectiv, la stânga asupra unei stări bifotonice (de gen temporal)

$$\text{a)}\quad c|2\rangle = \sqrt{2}\,e^{i(\pi-x)}|1\rangle$$
$$\text{b)}\quad \langle 2|c^\dagger = \sqrt{2}\,e^{-i(\pi-x)}\langle 1| \,. \tag{3.97}$$

Generalizând, în sens inductiv, toate aceste relaţii, putem conchide că setul stărilor multifotonic-temporale $\{|n\rangle\}_{n\in\mathbf{N}}$ este pseudo-ortonormat, în acord cu relaţia

$$\langle n'|n\rangle = (-1)^n\delta_{n'n} \,, \tag{3.98}$$

iar acţiunea asupra lor a operatorilor $\{c, c^\dagger\}$ va fi de forma

$$\text{a)}\quad c|n\rangle = \alpha_n e^{i(\pi-x)}|n-1\rangle$$
$$\text{b)}\quad c^\dagger|n\rangle = \beta_n e^{ix}|n+1\rangle$$
$$\text{c)}\quad \langle n|c^\dagger = \alpha_n e^{-i(\pi-x)}\langle n-1|$$
$$\text{d)}\quad \langle n|c = \beta_n e^{-ix}\langle n+1| \,, \tag{3.99}$$

cu şirurile $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{\beta_n\}_{n\in\mathbf{R}}$ din $\mathbf{R}_+$, având, în plus, întotdeauna satisfăcută ecuaţia de vectori şi valori proprii

$$(c^\dagger c)\,|n\rangle = -n\,|n\rangle \,. \tag{3.100}$$

Media pe stare n a acestei ecuaţii, împreună cu regulile de acţiune (3.99.a, c) şi ortonormarea (3.98), ne oferă imediat elementele şirului $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, adică

$$\begin{aligned}\langle n|c^\dagger c|n\rangle &= \alpha_n^2\langle n-1|n-1\rangle = \alpha_n^2(-1)^{n-1} = -n\langle n|n\rangle = \\ &= -n(-1)^n \,,\end{aligned} \tag{3.101}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

deci

$$\alpha_n = \sqrt{n}\,,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.102}$$

Din media pe starea n a comutatorului (3.87), avem

$$\langle n|cc^\dagger|n\rangle - \langle n|c^\dagger c|n\rangle = \langle n|cc^\dagger|n\rangle + n(-1)^n = -(-1)^n\,, \tag{3.103}$$

adică

$$\langle n|cc^\dagger|n\rangle = -(n+1)(-1)^n\,, \tag{3.104}$$

şi, utilizând regulile de acţiune (3.99.b, d), găsim forma elementelor β_n, $n \in \mathbf{N}$, şi anume

$$\beta_n^2(-1)^{n+1} = -(n+1)(-1)^n\,, \tag{3.105}$$

adică

$$\beta_n = \sqrt{n+1}\,. \tag{3.106}$$

Factorul de fază χ îl vom fixa astfel încât expresiile (3.99) ale acţiunii operatorilor $\{c, c^\dagger\}$, având în vedere formele (3.102), (3.106) ale coeficienţilor $\{\alpha_n\,,\ \beta_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, să difere cât mai puţin faţă de acţiunile obişnuite, corespunzătoare, ale unor operatori de anihilare-creare ce au comutatorul egal cu $+1$. Rezultă că o alegere inspirată este

$$\chi = \frac{\pi}{2}\,,$$

ceea ce conduce la forma explicită

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad c|n\rangle = i\sqrt{n}\,|n-1\rangle\\
&\text{b)}\quad c^\dagger|n\rangle = i\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\\
&\text{c)}\quad \langle n|c^\dagger = -i\sqrt{n}\,\langle n-1|\\
&\text{d)}\quad \langle n|c = -i\sqrt{n+1}\,\langle n+1|
\end{aligned} \tag{3.107}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a relaţiilor (3.99). Deci, revenind la specificarea indicelui 4 şi a vectorului de undă $\vec{k}$, obţinem extensiunea relaţiilor (3.76) la nivelul operatorilor $\left\{c_4(\vec{k}),\, c_4^\dagger(\vec{k})\right\}$, şi anume

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad c_4(\vec{k})|\vec{0},\, n_4(\vec{k})\rangle = i\sqrt{n_4(\vec{k})}\,|\vec{0},\, n_4(\vec{k})-1\rangle\\
&\text{b)}\quad c_4^\dagger(\vec{k})|\vec{0},\, n_4(\vec{k})\rangle = i\sqrt{n_4(\vec{k})+1}\,|\vec{0},\, n_4(\vec{k})+1\rangle\\
&\text{c)}\quad \langle n_4(\vec{k}),\, \vec{0}|\, c_4^\dagger(\vec{k}) = -i\sqrt{n_4(\vec{k})}\,\langle n_4(\vec{k})-1,\, \vec{0}|\\
&\text{d)}\quad \langle n_4(\vec{k}),\, \vec{0}|\, c_4(\vec{k}) = -i\sqrt{n_4(\vec{k})+1}\,\langle n_4(\vec{k})+1,\, \vec{0}|\,,
\end{aligned} \tag{3.108}$$

stările multifotonice (de gen temporal) $\{|\vec{0},\, n_4(\vec{k})\rangle\}$ satisfăcând relaţia de pseudo-ortonormare

$$\langle n_4'(\vec{k}'),\, \vec{0}|\vec{0},\, n_4(\vec{k})\rangle = (-1)^{n_4}\,\delta_{n_4' n_4}\,\delta(\vec{k}'-\vec{k}) \tag{3.109}$$

obţinută din (3.98), prin reexplicitarea tuturor elementelor omise în notaţia simplificatoare.

Să trecem acum, în sfârşit, la formularea şi apoi analiza consecinţelor condiţiei Fermi-Lorentz. După cum menţionam la începutul paragrafului, transpunerea directă în microcosmos, sub forma (3.5), a condiţiei Lorentz nu este operantă. Ea va servi, totuşi, ca sursă de inspiraţie pentru formularea unei condiţii cuantice, matematic mai slabă, de selectare a stărilor fizice $|\psi\rangle$ ale câmpului, astfel încât media observabilelor pe aceste stări să fie consistentă cu rezultatele macroscopice cunoscute, iar contribuţia fotonilor virtuali să poată fi eliminată în mod riguros.

Ideea este următoarea: deşi, pentru moment, nu ştim toate stările $|\psi\rangle$, ştim totuşi că starea de vid $|0\rangle$ este, în mod natural, o stare fizică a sistemului. Dacă utilizăm reprezentarea spectrală (3.22) a operatorului de câmp $A_i(x)$ şi calculăm operatorul Lorentz $A^i{}_{,i}(x)$, obţinem expresia

$$A^i{}_{,i}(x) = \overset{(+)}{A}{}^i{}_{,i}(x) + \overset{(-)}{A}{}^i{}_{,i}(x)\,, \tag{3.110}$$

cu

$$\text{a)} \quad \overset{(+)}{A}{}^{i}{}_{,i}(x) = i \int d^3k\, k^i a_i(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x)$$

$$\text{b)} \quad \overset{(-)}{A}{}^{i}{}_{,i}(x) = -i \int d^3k\, k^i a_i^\dagger(\vec{k}) \bar{f}_{\vec{k}}(x)\,. \qquad (3.111)$$

Aplicând-o stării de vid, observăm imediat că abaterea de la zero este dată de contribuţia părţii de frecvenţe negative, deoarece $a_i^\dagger(\vec{k}) = \omega_i^a c_a^\dagger(\vec{k})$ este o combinaţie liniară a operatorilor de creare $\{c_a^\dagger(\vec{k})\}_{a=\overline{1,4}}$ ce vor conduce, aplicaţi lui $|0\rangle$, la stărilor unifotonice $|1_a(\vec{k})\rangle$. În consecinţă, constrângerea cuantică, matematic consistentă, cea mai apropiată, ca formă, de condiţia Lorentz (3.5), pentru starea de vid, este

$$\overset{(+)}{A}{}^{i}{}_{,i}|0\rangle = 0\,. \qquad (3.112)$$

Generalizând, vom defini stările fizice $|\psi\rangle$ ale sistemului ca fiind acele stări cuantice, multifotonice, ce sunt complet anihilate,

$$\overset{(+)}{A}{}^{i}{}_{,i}|\psi\rangle = 0\,, \qquad (3.113)$$

de partea de frecvenţe pozitive a operatorului Lorentz $\hat{A}^i{}_{,i}$. Aceasta este condiţia Fermi-Lorentz. Prin conjugare hermitică, obţinem formularea ei duală

$$\langle\psi| \overset{(-)}{A}{}^{i}{}_{,i} = 0 \qquad (3.113')$$

şi, coroborat cu (3.111.a, b), găsim expresiile

$$\text{a)} \quad k^i a_i(\vec{k})|\psi\rangle = 0$$

$$\text{b)} \quad \langle\psi|a_i^\dagger(\vec{k})k^i = 0\,, \qquad (3.114)$$

ca reprezentări, în spaţiul impulsurilor, ale condiţiei Fermi-Lorentz.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

O primă consecinţă imediată este valabilitatea, în macrocosmos, a fixării Lorentz de etalon $U(1)$. Într-adevăr, din (3.113) şi (3.113'), avem

$$\langle\psi|\overset{(+)}{A}{}^{i}{}_{,i}|\psi\rangle = 0$$
$$\langle\psi|\overset{(-)}{A}{}^{i}{}_{,i}|\psi\rangle = 0\,,$$

adică

$$\langle\psi|\overset{(+)}{A}{}^{i}{}_{,i} + \overset{(-)}{A}{}^{i}{}_{,i}|\psi\rangle = 0\,,$$

deci

$$\langle\psi|A^{i}{}_{,i}|\psi\rangle = \left[A^{i}{}_{,i}\right]_{clasic} = 0\,.$$

A doua consecinţă, mai puţin banală în sensul demonstrării ei, este valabilitatea relaţiei (3.8),

$$\langle\psi|\left(A^{i}{}_{,i}(x)\right)^{2}|\psi\rangle = 0\,,$$

care reduce practic, la scară macroscopică, lagrangeianul Fock-Dirac la lagrangeianul Maxwell, restabilind simetria locală $U(1)$. Într-adevăr, din

$$\langle\psi|A^{i}{}_{,i} = \langle\psi|\left(\overset{(+)}{A}{}^{i}{}_{,i} + \overset{(-)}{A}{}^{i}{}_{,i}\right) \overset{(113')}{=} \langle\psi|\overset{(+)}{A}{}^{i}{}_{,i}$$

şi

$$A^{l}{}_{,l}|\psi\rangle = \left(\overset{(+)}{A}{}^{l}{}_{,l} + \overset{(-)}{A}{}^{l}{}_{,l}\right)|\psi\rangle \overset{(113)}{=} \overset{(-)}{A}{}^{l}{}_{,l}|\psi\rangle$$

rezultă

$$\langle\psi|\left(A^{i}{}_{,i}\right)^{2}|\psi\rangle = \langle\psi|A^{i}{}_{,i}\,A^{l}{}_{,l}|\psi\rangle = \langle\psi|\overset{(+)}{A}{}^{i}{}_{,i}\overset{(-)}{A}{}^{l}{}_{,l}|\psi\rangle\,, \qquad (3.115)$$

adică, utilizând descompunerile spectrale (3.111),

$$\langle\psi|\left(A^{i}{}_{,i}\right)^{2}|\psi\rangle = \int d^3k'd^3k\,k'^{i}k^{l}\langle\psi|a_i(\vec{k}')a_l^{\dagger}(\vec{k})|\psi\rangle f_{\vec{k}'}(x)\bar{f}_{\vec{k}}(x)\,. \qquad (3.116)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dar, în acord cu relaţia de comutare (3.52.c), avem

$$\langle\psi|a_i(\vec{k}')a_l^\dagger(\vec{k})|\psi\rangle = \eta_{il}\,\delta(\vec{k}'-\vec{k}) + \langle\psi|a_l^\dagger(\vec{k})\,a_i(\vec{k}')|\psi\rangle\,, \qquad (3.117)$$

fiindcă $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, astfel încât, prin înlocuire în (3.116), obţinem relaţia

$$\langle\psi|\left(A^i{}_{,i}\right)^2|\psi\rangle = \int d^3k'd^3k\,\delta(\vec{k}'-\vec{k})\eta_{il}\,k'^i k^l f_{\vec{k}'}(x)\bar{f}_{\vec{k}}(x) +$$
$$+\int d^3k'd^3k\left(\langle\psi|a_l^\dagger(\vec{k})k^l\right)\left(k'^i a_i(\vec{k}')|\psi\rangle\right)f_{\vec{k}'}(x)\bar{f}_{\vec{k}}(x)\,. \qquad (3.118)$$

În baza reprezentării (3.114) a condiţiei Fermi-Lorentz în spaţiul impulsurilor, a doua integrală din membrul drept al relaţiei (3.118) se anulează imediat, iar în ceea ce priveşte primul termen, filtrând după $\vec{k}'$ la $\vec{k}$ datorită funcţionalei Dirac $\delta(\vec{k}'-\vec{k})$, obţinem ceea ce era de demonstrat

$$\langle\psi|\left(A^i{}_{,i}\right)^2|\psi\rangle = \frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\eta_{il}\,k^i k^l}{\omega_{\vec{k}}} = 0\,, \qquad (3.119)$$

dat fiind că

$$|f_{\vec{k}}(x)|^2 = \frac{(2\pi)^{-3}}{2\omega_{\vec{k}}}\,,$$

iar

$$\eta_{il}\,k^i k^l = k^2 = |\vec{k}|^2 - \omega_{\vec{k}}^2 \equiv 0\,,$$

ca expresie a condiţiei *on-shell*, în spaţiul impulsurilor, satisfăcute de cuantele câmpului electromagnetic.

Inspectând expresia (3.11) a contribuţiei termenului Fock-Dirac $\frac{1}{2}\left(A^l{}_{,l}\right)^2$ la tensorul conservativ impuls-energie

$$T_{ik} = T_{ik}^{(M)} + T_{ik}^{(G)}\,,$$

rezultă direct, în baza proprietăţii (3.8), alias (3.119), că

$$\langle\psi|T_{ik}^{(G)}|\psi\rangle = -\langle\psi|A^l{}_{,li}\,A_k + A^l{}_{,lk}\,A_i|\psi\rangle + \eta_{ik}\langle\psi|A^l{}_{,lm}\,A^m|\psi\rangle\,. \qquad (3.120)$$

BCU ASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Mai mult decât atât, dacă evaluăm ultimul termen, avem

$$\langle\psi|A^l{}_{,lm}\,A^m|\psi\rangle = -\int d^3k'\,d^3k\,k'^l k'^m$$
$$\langle\psi|\left[a_l(\vec{k}')f_{\vec{k}'}(x)+a_l^\dagger(\vec{k}')\bar{f}_{\vec{k}'}(x)\right]\left[a_m(\vec{k})f_{\vec{k}}(x)+a_m^\dagger(\vec{k})\bar{f}_{\vec{k}}(x)\right]|\psi\rangle \tag{3.121}$$

şi cum

$$\langle\psi|a_l^\dagger(\vec{k}')k'^l = 0\,, \tag{3.122}$$

ca expresie a condiţiei Fermi-Lorentz (3.114.b), rămânem cu

$$\langle\psi|A^l{}_{,lm}\,A^m|\psi\rangle = -\int d^3k'd^3k\,k'^l k'^m\langle\psi|a_l(\vec{k}')a_m(\vec{k})|\psi\rangle f_{\vec{k}'}(x)f_{\vec{k}}(x) -$$
$$-\int d^3k'd^3k\,k'^l k'^m\langle\psi|a_l(\vec{k}')a_m^\dagger(\vec{k})|\psi\rangle f_{\vec{k}'}(x)\bar{f}_{\vec{k}}(x)\,. \tag{3.123}$$

Deoarece $a_l(\vec{k}')$ şi $a_m(\vec{k})$ sunt comutabili (vezi relaţia (3.52.a)), putem scrie

$$k'^l k'^m\langle\psi|a_l(\vec{k}')a_m(\vec{k})|\psi\rangle = \left(\langle\psi|a_m(\vec{k})k'^m\right)\left(k'^l a_l(\vec{k}')|\psi\rangle\right) = 0 \tag{3.124}$$

din forma (3.114.a) a constrângerii Fermi-Lorentz. Ca urmare, aplicând şi relaţia de comutare (3.52.c), obţinem pentru (3.123) expresia

$$\langle\psi|A^l{}_{,lm}\,A^m|\psi\rangle = -\int d^3k'd^3k\,\eta_{lm}k'^l k'^m\,\delta(\vec{k}'-\vec{k})f_{\vec{k}'}(x)\bar{f}_{\vec{k}}(x) -$$
$$-\int d^3k'd^3k\left(\langle\psi|a_m^\dagger(\vec{k})k'^m\right)\left(k'^l a_l(\vec{k}')|\psi\rangle\right)f_{\vec{k}'}(x)\bar{f}_{\vec{k}}(x)\,, \tag{3.125}$$

în care ultimul termen se anulează din nou, deoarece

$$k'^l a_l(\vec{k}')|\psi\rangle = 0\,, \tag{3.126}$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar în primul termen, filtrând după $\vec{k}'$, ajungem exact la integrala prezentă în relaţia (3.119), care, după cum am văzut, se anulează. Aşadar,

$$\eta_{ik}\,\langle\psi|A^l{}_{,lm}\,A^m|\psi\rangle = 0\,, \tag{3.127}$$

deci media pe o stare fizică $|\psi\rangle$ a contribuţiei tensorial simetrice $T^{(G)}_{ik}$ se reduce la forma

$$\langle\psi|T^{(G)}_{ik}|\psi\rangle = -\langle\psi|A^l{}_{,li}\,A_k + A^l{}_{,lk}\,A_i|\psi\rangle\,, \tag{3.128}$$

cu ajutorul căreia vom calcula concret valorile medii ale operatorilor "extra-impuls" şi "extra-energie", $P^{(G)}_\mu$ şi, respectiv $H^{(G)}$, definiţi de relaţiile (3.13.a, b). Pentru extra-contribuţia Fock-Dirac

$$\langle\psi|P^{(G)}_\mu|\psi\rangle = -\int d^3x\,\langle\psi|T^{(G)}_{\mu 4}|\psi\rangle \tag{3.129}$$

la impulsul (3.12.a) al câmpului, obţinem imediat, efectuând derivările de rigoare în reprezentarea spectrală (3.22),

$$\begin{aligned}\langle\psi|P^{(G)}_\mu|\psi\rangle = -\int d^3x d^3k' d^3k\, k'^l k'_\mu \langle\psi|\Big[a_l(\vec{k}')f_{\vec{k}'}(x) + a^\dagger_l(\vec{k}')\bar{f}_{\vec{k}'}(x)\Big] \\ \Big[a_4(\vec{k})f_{\vec{k}}(x) + a^\dagger_4(\vec{k})\bar{f}_{\vec{k}}(x)\Big]|\psi\rangle + \\ + \int d^3x d^3k' d^3k\, k'^l \omega_{\vec{k}'}\langle\psi|\Big[a_l(\vec{k}')f_{\vec{k}'}(x) + a^\dagger_l(\vec{k}')\bar{f}_{\vec{k}'}(x)\Big] \\ \Big[a_\mu(\vec{k})f_{\vec{k}}(x) + a^\dagger_\mu(\vec{k})\bar{f}_{\vec{k}}(x)\Big]|\psi\rangle\,,\end{aligned}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

care, în baza condiţiei (3.122), se reduce la forma

$$\begin{aligned}\langle\psi|P_\mu^{(G)}|\psi\rangle &= \\ &= -\int d^3x\, d^3k'\, d^3k\, k''^l\, k'_\mu\, \langle\psi|a_l(\vec{k}')a_4(\vec{k})|\psi\rangle f_{\vec{k}'}(x) f_{\vec{k}}(x) + \\ &+ \int d^3x\, d^3k'\, d^3k\, k''^l\, \omega_{\vec{k}'}\, \langle\psi|a_l(\vec{k}')a_\mu(\vec{k})|\psi\rangle f_{\vec{k}'}(x) f_{\vec{k}}(x) - \\ &- \int d^3x\, d^3k'\, d^3k\, k''^l\, k'_\mu\, \langle\psi|a_l(\vec{k}')a_4^\dagger(\vec{k})|\psi\rangle f_{\vec{k}'}(x) \bar{f}_{\vec{k}}(x) + \\ &+ \int d^3x\, d^3k'\, d^3k\, k''^l\, \omega_{\vec{k}'}\, \langle\psi|a_l(\vec{k}')a_\mu^\dagger(\vec{k})|\psi\rangle f_{\vec{k}'}(x) \bar{f}_{\vec{k}}(x)\,. \end{aligned} \tag{3.130}$$

Am ales special primii doi termeni ca fiind cei în "$a \cdot a$" deoarece, după cum rezultă din (3.52.a) şi forma (3.126) a condiţiei Fermi-Lorentz, aceştia se anulează fără nici un fel de alte explicaţii. Ultimii doi termeni necesită însă puţin mai multă atenţie. Aplicând relaţia de comutare (3.52.c), obţinem

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \langle\psi|a_l(\vec{k}')a_4^\dagger(\vec{k})|\psi\rangle = \eta_{l4}\,\delta(\vec{k}'-\vec{k}) + \langle\psi|a_4^\dagger(\vec{k})a_l(\vec{k}')|\psi\rangle \\ &\text{b)}\quad \langle\psi|a_l(\vec{k}')a_\mu^\dagger(\vec{k})|\psi\rangle = \eta_{l\mu}\,\delta(\vec{k}'-\vec{k}) + \langle\psi|a_\mu^\dagger(\vec{k})a_l(\vec{k}')|\psi\rangle\,. \end{aligned} \tag{3.131}$$

Prin contracţie cu k''^l şi utilizarea condiţiei (3.126), ajungem la expresiile

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \langle\psi|k''^l a_l(\vec{k}')a_4^\dagger(\vec{k})|\psi\rangle = -\omega_{\vec{k}'}\delta(\vec{k}'-\vec{k}) \\ &\text{b)}\quad \langle\psi|k''^l a_l(\vec{k}')a_\mu^\dagger(\vec{k})|\psi\rangle = k'_\mu\delta(\vec{k}'-\vec{k})\,, \end{aligned} \tag{3.132}$$

care, înlocuite în (3.130), o transformă în

$$\langle\psi|P_\mu^{(G)}|\psi\rangle = 2\int d^3x\, d^3k'\, d^3k\, k'_\mu\omega_{\vec{k}'}\,\delta(\vec{k}'-\vec{k}) f_{\vec{k}'}(x)\bar{f}_{\vec{k}}(x)\,. \tag{3.133}$$

Neefectuând integrala după $\vec{x}$, dar efectuând-o pe cea după $\vec{k}'$, obţinem

$$\langle\psi|P_\mu^{(G)}|\psi\rangle = \int d^3\dot{x}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,k_\mu \equiv 0\,, \tag{3.134}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

deoarece integrala pe spaţiul impulsurilor, având integrandul impar, se anulează identic. Dacă există cumva dubii asupra întregului rezultat prezis de (3.134), dat fiind că $\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \to \infty$, deci am avea $\infty \cdot 0$, adică nedeterminare, reamintim că, în astfel de cazuri, indeterminarea se ridică prin regularizarea volumului spaţial, considerând un domeniu compact oarecare, $\mathrm{D}(V)$, de volum arbitrar, dar finit, $V < \infty$, estimarea lui (3.134) făcând-se prin intermediul formulei

$$\langle\psi|P_\mu^{(G)}|\psi\rangle = \lim_{V\to\infty}\left\{\int_{\mathrm{D}(V)} d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, k_\mu\right\} = \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, k_\mu\right] \lim_{V\to\infty} V, \tag{3.135}$$

care, deoarece $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, k_\mu \equiv 0$ pentru orice $V < \infty$, conduce evident la

$$\langle\psi|P_\mu^{(G)}|\psi\rangle = 0\,. \tag{3.136}$$

Pentru extra-contribuţia Fock-Dirac

$$\langle\psi|H^{(G)}|\psi\rangle = \int d^3x \langle\psi|T_{44}^{(G)}|\psi\rangle \tag{3.137}$$

la hamiltonianul efectiv (3.12.b) al câmpului, avem, utilizând expresia (3.128),

$$\langle\psi|H^{(G)}|\psi\rangle = -2\int d^3x \langle\psi|A^l{}_{,l4}\, A_4|\psi\rangle\,. \tag{3.138}$$

Din (3.22) şi forma (3.30, 31) a modurilor ortonormale de frecvenţă, rezultă

$$\langle\psi|H^{(G)}|\psi\rangle = -2\int d^3x\, d^3k'\, d^3k\, k'^l\, \omega_{\vec{k}'}$$
$$\langle\psi|\left[a_l(\vec{k}')f_{\vec{k}'}(x) + a_l^\dagger(\vec{k}')\bar{f}_{\vec{k}'}(x)\right]\left[a_4(\vec{k})f_{\vec{k}}(x) + a_4^\dagger(\vec{k})\bar{f}_{\vec{k}}(x)\right]|\psi\rangle\,, \tag{3.139}$$

expresie care se reduce la forma simplă

$$\langle\psi|H^{(G)}|\psi\rangle = -2\int d^3x d^3k' d^3k\, k'^l \omega_{\vec{k}'} \langle\psi|a_l(\vec{k}')\, a_4^\dagger(\vec{k})|\psi\rangle f_{\vec{k}'}(x)\bar{f}_{\vec{k}}(x), \tag{3.140}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

dacă avem în vedere condiţia (3.122), comutarea operatorilor $a_l(\vec{k}')$ şi $a_4(\vec{k})$ şi condiţia (3.126). Utilizând şi rezultatul (3.132.a), relaţia (3.140) devine

$$\langle\psi|H^{(G)}|\psi\rangle = 2\int d^3x\, d^3k'\, d^3k\, \omega_{\vec{k}'}^2\, \delta(\vec{k}'-\vec{k}) f_{\vec{k}'}(x) f_{\vec{k}}(x)\,,$$

adică, integrând după $\vec{k}'$,

$$\langle\psi|H^{(G)}|\psi\rangle = \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,|\vec{k}|\,, \tag{3.141}$$

deoarece $\omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|$. Deşi, de această dată, rezultatul prezis de (3.141) este infinit, el are, până la coeficientul $\frac{1}{2}$, exact forma energiei de zero a câmpului scalar real lipsit de masă (de repaus). După cum am văzut, pe spaţiu-timp plat cum este cel Minkowski, acest tip divergent de energie se elimină prin aplicarea ordonării normale, când toţi operatorii de creare sunt la stânga celor de anihilare. Pe scurt, în sensul acţiunii la dreapta asupra unei stări oarecare, *întâi anihilăm şi pe urmă creăm*. Aşadar, ordinea $a_l(\vec{k}')\,a_4^\dagger(\vec{k})$ a celor doi operatori din (3.14) trebuie schimbată în $a_4^\dagger(\vec{k})a_l(\vec{k}')$, pentru a respecta ordonarea normală N, sau $::$, cum mai este adesea notată. Astfel, (3.140) devine

$$\begin{aligned}&\langle\psi| : H^{(G)} : |\psi\rangle \;= \\ &= -2\int d^3x d^3k'\, d^3k\, \omega_{\vec{k}'}\left(\langle\psi|a_4^\dagger(\vec{k})\right)\left(k'' a_l(\vec{k}')|\psi\rangle\right) f_{\vec{k}'}(x)\bar{f}_{\vec{k}}(x)\end{aligned} \tag{3.142}$$

şi rezultă, în mod clar,

$$\langle\psi| : H^{(G)} : |\psi\rangle = 0 \tag{3.143}$$

în virtutea reprezentării de impuls (3.114.a) a condiţiei Fermi-Lorentz. Prin urmare, ca aspect ce ne va interesa cu precădere în subparagraful următor, atât componentele $\langle\psi|P_\mu|\psi\rangle$ ale impulsului, cât şi energia

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\langle\psi|H|\psi\rangle$ a câmpului electromagnetic în formalism covariant de cuantificare canonică, vor fi date numai de expresiile (3.12.a, b) luate sub semnul ordonării normale, adică

$$\text{a)}\quad \langle\psi|P_\mu|\psi\rangle = -\int d^3x\, \langle\psi| : T^{(M)}_{\mu 4} : |\psi\rangle$$
$$\text{b)}\quad \langle\psi|H|\psi\rangle = \int d^3x\, \langle\psi| : T^{(M)}_{44} : |\psi\rangle\,, \qquad (3.144)$$

deoarece extra-contribuţiile Fock-Dirac $\langle\psi|P^{(G)}_\mu|\psi\rangle$ şi $\langle\psi|H^{(G)}|\psi\rangle$, care aparent distrug $U(1)$ *gauge*-invarianţa, sunt de fapt zero, după cum tocmai am arătat.

În încheierea acestui subparagraf, mai avem de abordat două probleme care, odată rezolvate, vor elimina complet contribuţiile fotonilor virtuali la evoluţia clasic-observabilă a câmpului electromagnetic liber.

Prima se referă la valoarea medie $\langle\psi|\hat{N}(\vec{k})|\psi\rangle$ a operatorului număr de fotoni

$$\hat{N}(\vec{k}) = \eta^{ik}\, a^\dagger_i(\vec{k}) a_k(\vec{k}) \qquad (3.145)$$

într-o stare fizică $|\psi\rangle$ a câmpului. Este sau nu este această valoare afectată de existenţa fotonilor virtuali ? Cum, din punct de vedere clasic, ei nu sunt observabili, răspunsul va fi negativ. Teoria cuantică, dacă este consistentă, va trebui (riguros) să arate de ce. Pentru aceasta, să exprimăm, mai întâi, operatorul (3.145) în raport cu operatorii $\{c_a(\vec{k}),\, c^\dagger_a(\vec{k})\}_{a=\overline{1,4}}$ de anihilare-creare a fotonilor polarizaţi transversal ($a = 1, 2$), longitudinal ($a = 3$) şi temporal ($a = 4$). Din relaţiile (3.71), obţinem

$$\hat{N}(\vec{k}) = \eta^{ik}\, a^\dagger_i(\vec{k}) a_k(\vec{k}) = \eta^{ik}\omega^a_i\omega^b_k c^\dagger_a(\vec{k}) c_b(\vec{k})\,, \qquad (3.146)$$

astfel încât, utilizând (3.62.a), ajungem la

$$\hat{N}(\vec{k}) = \eta^{ac}\eta^{bd}\eta_{lm}\, e^l_c e^m_d\, c^\dagger_a(\vec{k}) c_b(\vec{k})$$

BCU IAŞI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

şi, aplicând proprietatea fundamentală (3.60.b), rezultă imediat

$$\hat{N}(\vec{k}) = \eta^{ab} c_a^\dagger(\vec{k}) c_b(\vec{k}) . \tag{3.147}$$

Explicitând sumarea după stările de polarizare $a, b = \overline{1,4}$ şi luând valoarea medie pe o stare fizică $|\psi\rangle$, obţinem

$$\langle\psi|\hat{N}(\vec{k})|\psi\rangle = \sum_{A=1}^{2}\langle\psi|c_A^\dagger(\vec{k})c_A(\vec{k})|\psi\rangle + \langle\psi|\left\{c_3^\dagger(\vec{k})c_3(\vec{k}) - c_4^\dagger(\vec{k})c_4(\vec{k})\right\}|\psi\rangle, \tag{3.148}$$

expresie în care primul termen din dreapta reprezintă numărul total de fotoni reali (polarizaţi transversal pe direcţia vectorului de undă $\vec{k}$), iar al doilea termen exprimă contribuţia fotonilor virtuali (longitudinali şi, respectiv, temporali). Dacă metoda de cuantificare formulată până acum este viabilă, atunci trebuie să putem demonstra că acest ultim termen se anulează. Din (3.71.a), avem

$$k^i a_i(\vec{k}) = k^i \omega_i^a c_a(\vec{k}) = k^a c_a(\vec{k}) . \tag{3.149}$$

Datorită alegerii particulare a tetradului $\{\vec{e}_a\}_{a=\overline{1,4}}$, cu $\vec{k} = \omega_{\vec{k}}\vec{e}_3$ şi $|\vec{k}| = \omega_{\vec{k}}$ pe direcţia lui $\vec{e}_4$, adică $\omega_{\vec{k}} = k^4$, avem (în raport cu acestea)

$$(k^a) = \left(0, 0, \omega_{\vec{k}}, \omega_{\vec{k}}\right), \tag{3.150}$$

deci reprezentările de impuls (3.114) ale condiţiei Fermi-Lorentz se vor scrie

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \left[c_3(\vec{k}) + c_4(\vec{k})\right]|\psi\rangle = 0 \\ &\text{b)} \quad \langle\psi|\left[c_3^\dagger(\vec{k}) + c_4^\dagger(\vec{k})\right] = 0 . \end{aligned} \tag{3.151}$$

Multiplicând (3.151.a) la stânga cu $c_3^\dagger(\vec{k})$ şi luând valoarea medie pe ψ, obţinem

$$\langle\psi|c_3^\dagger(\vec{k})\, c_3(\vec{k})|\psi\rangle = -\langle\psi|c_3^\dagger(\vec{k})\, c_4(\vec{k})|\psi\rangle \tag{3.152}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi, corespunzător, multiplicând la dreapta (3.151.b) cu $c_4(\vec{k})|\psi\rangle$, avem

$$\langle\psi|c_4^\dagger(\vec{k})\,c_4(\vec{k})|\psi\rangle = -\langle\psi|c_3^\dagger(\vec{k})\,c_4(\vec{k})|\psi\rangle\,, \tag{3.153}$$

de unde rezultă, în acord cu forma celui de al doilea termen din (3.148),

$$\langle\psi|c_3^\dagger(\vec{k})\,c_3(\vec{k}) - c_4^\dagger(\vec{k})\,c_4(\vec{k})|\psi\rangle \equiv 0\,. \tag{3.154}$$

Deci, aşa cum trebuia arătat, valoarea medie a operatorului număr de fotoni ai câmpului într-o stare fizică a acestuia este dată numai de contribuţia fotonilor reali, de polarizare transversală,

$$\langle\psi|\hat{N}(\vec{k})|\psi\rangle = \sum_{A=1}^{2} N_A(\vec{k})\,, \tag{3.155}$$

cu

$$N_A(\vec{k}) = \langle\psi|c_A^\dagger(\vec{k})c_A(\vec{k})|\psi\rangle\,. \tag{3.156}$$

A doua problemă (şi ultima din cadrul acestui subparagraf) se referă la dependenţa normei $\| \psi \| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$ a unei stări fizice oarecare (soluţie însă a ecuaţiei Fermi-Lorentz (3.151.a)) de numărul total al fotonilor virtuali (atât longitudinali, cât şi temporali) care contribuie la formarea stării fizice respective. Dacă ar exista o astfel de dependenţă, atunci ar însemna că toate încercările noastre de a elimina fotonii virtuali din rezultatele clasic-observabile au fost în zadar, deoarece aceştia ar rămâne prezenţi implicit, ori de câte ori am evalua valori medii ce conduc la expresii de tipul scalar, $\langle\psi|\psi\rangle$. Prin urmare, mai avem de arătat că $\| \psi \|^2$ este complet independentă de numărul fotonilor virtuali ce contribuie la formarea stării fizice $|\psi\rangle$. Lăsând la o parte fotonii transversali, să ne concentrăm asupra următoarei reprezentări simplificatoare

$$|\psi\rangle = \sum_{n_3,n_4} C_{n_3,n_4}|n_3,\, n_4\rangle \tag{3.157}$$

a unei stări fizice $|\psi\rangle$, care evidenţiază explicit conţinutul ei în fotoni longitudinali (n_3) şi, respectiv, temporali (n_4). Coeficienţii complecşi C_{n_3,n_4} sunt, de fapt, funcţii de n_3 şi n_4, astfel încât $|\psi\rangle$ să fie o soluţie a ecuaţiei Fermi-Lorentz

$$(c_3 + c_4)\,|\psi\rangle = 0\,, \tag{3.158}$$

formulată în sistemul prescurtat de notaţii pe care l-am utilizat când am discutat stările multifotonice de gen temporal şi acţiunea operatorilor $\{c_4\,,\, c_4^{\dagger}\}$ asupra lor. Dacă notăm cu n numărul fotonilor virtuali, alcătuit din contribuţia a n_3 fotoni longitudinali şi n_4 temporali, adică

$$n = n_3 + n_4\,, \tag{3.159}$$

atunci (3.157) se poate scrie ca

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_4=0}^{n} C_{n-n_4,n_4}|n-n_4\,,\, n_4\rangle = \sum_{n=0} C_n\,|n\rangle\,, \tag{3.160}$$

punând în evidenţă faptul că orice stare cu n fotoni virtuali admite reprezentarea

$$C_n\,|n\rangle = \sum_{n_4=0}^{n} C_{n-n_4,n_4}|n-n_4\,,\, n_4\rangle\,. \tag{3.161}$$

Atunci vom avea

$$\langle\psi|\psi\rangle_{fv} = \sum_{n',n} \bar{C}_{n'}\, C_n \langle n'|n\rangle\,, \tag{3.162}$$

adică

$$\langle\psi|\psi\rangle_{fv} = \sum_{n'} \sum_{n} \sum_{n'_4=0}^{n'} \sum_{n_4=0}^{n} \bar{C}_{n'-n'_4,n'_4}\, C_{n-n_4,n_4}\, \langle n'_4\,,\, n'-n'_4|n-n_4\,,\, n_4\rangle\,, \tag{3.163}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde notaţia fv subliniază că ne interesează numai contribuţia fotonilor virtuali la valoarea lui $\| \psi \|^2$. Din proprietatea de ortonormare (3.77), scrisă simplificat numai pentru fotonii longitudinali

$$\langle 0, n_3' | n_3, 0 \rangle = \delta_{n_3' n_3}$$

şi cea de pseudo-ortonormare (3.109), formulată, de asemenea, în sistem prescurtat de notare

$$\langle n_4', 0 | 0, n_4 \rangle = (-1)^{n_4} \delta_{n_4' n_4} ,$$

rezultă imediat proprietatea

$$\langle n_4' , n' - n_4' | n - n_4 , n_4 \rangle = (-1)^{n_4} \delta_{n_4' n_4} \delta_{n' - n_4', n - n_4} , \qquad (3.164)$$

astfel încât, prin înlocuirea în (3.163) şi efectuarea sumărilor după n_4' şi n', obţinem

$$\langle \psi | \psi \rangle_{fv} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_4=0}^{n} (-1)^{n_4} |C_{n-n_4, n_4}|^2 , \qquad (3.165)$$

totul revenind, într-o primă etapă, la estimarea pătratului modulului coeficienţilor C_{n-n_4, n_4}. Impunând stării $|\psi\rangle$, dată de (3.160), condiţia Fermi-Lorentz (3.158) şi având în vedere că

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad c_3 | n - n_4 , n_4 \rangle = \sqrt{n - n_4} \, | n - n_4 - 1 , n_4 \rangle \\ &\text{b)} \quad c_4 | n - n_4 , n_4 \rangle = i \sqrt{n_4} \, | n - n_4 , n_4 - 1 \rangle , \end{aligned} \qquad (3.166)$$

după cum rezultă din (3.76.a), pentru $\mu = 3$, şi (3.108.a), obţinem ecuaţia

$$\sum_{n} \sum_{n_4}^{n} \left[\sqrt{n - n_4} \, C_{n-n_4, n_4} | n - n_4 - 1 , n_4 \rangle \right] +$$
$$\sum_{n} \sum_{n_4}^{n} \left[i \sqrt{n_4} \, C_{n-n_4, n_4} | n - n_4 , n_4 - 1 \rangle \right] = 0 \qquad (3.167)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică, detaliind limitele de sumare,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\sqrt{n}\,C_{n,0}+iC_{n-1,1}\right]|n-1,0\rangle\right\}+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{n_4=1}^{n}\sqrt{n-n_4}\,C_{n-n_4,n_4}|n-1-n_4,n_4\rangle+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{n_4=2}^{n}i\sqrt{n_4}\,C_{n-n_4,n_4}|n-n_4,n_4-1\rangle=0. \quad (3.168)$$

Cum stările $\{|n-n_4,n_4\rangle\}_{0\le n_4\le n}^{0\le n<\infty}$ sunt liniar independente, rezultă că (3.168) poate fi satisfăcută dacă şi numai dacă

$$\sqrt{n}\,C_{n,0}+iC_{n-1,1}=0 \;\Leftrightarrow\; C_{n-1,1}=i\sqrt{n}\,C_{n,0} \text{ pentru } n=1,2,3,\ldots \quad (3.169)$$

şi

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{n_4=1}^{n}\sqrt{n-n_4}\,C_{n-n_4,n_4}|n-1-n_4,n_4\rangle+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{n_4=2}^{n}i\sqrt{n_4}\,C_{n-n_4,n_4}|n-n_4,n_4-1\rangle=0. \quad (3.170)$$

Trecând pe $n-1$ în n în primul termen (de sumare multiplă) din (3.170) şi pe n_4-1 în n_4 şi apoi $n-1$ în n în al doilea termen (de sumare multiplă, din (3.170)), obţinem forma liniar omogenă

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n_4=1}^{n}\left\{\left[\sqrt{n+1-n_4}\,C_{n+1-n_4,n_4}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+i\sqrt{n_4+1}\,C_{n-n_4,n_4+1}\right]|n-n_4,n_4\rangle\right\}=0 \quad (3.171)$$

a ecuaţiei (3.170), în dezvoltare după baza pseudo-ortonormală

$$\{|n-n_4,n_4\rangle\}_{0\le n_4\le n}^{0\le n<\infty},$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

care este satisfăcută dacă şi numai dacă amplitudinile $C_{\ldots,\ldots}$ sunt soluţii ale sistemului recurent

$$C_{n-n_4,n_4+1} = i\left[\frac{n+1-n_4}{n_4+1}\right]^{1/2} C_{n+1-n_4,n_4} \tag{3.172}$$

valabil chiar de la $0 \leq n_4 \leq n$ şi $0 \leq n$. Această subliniere este importantă, deoarece nu numai că include marja de valori din (3.171) ale lui n_4 şi n, dar permite şi includerea ecuaţiei (3.169) în sistemul (3.172). Într-adevăr, pentru $n_4 = 0$ şi $n+1$ trecut în n, (3.172) se reduce la (3.169). Prin urmare, este suficient să ne concentrăm asupra amplitudinilor C_{n-n_4,n_4} în raport cu $C_{n,0}$ din (3.172) cu $n+1 \to n$ şi $n_4+1 \to n_4$, adică

$$C_{n-n_4,n_4} = i\left[\frac{n+1-n_4}{n_4}\right]^{1/2} C_{n+1-n_4,n_4-1}\,,\ 1 \leq n_4 \leq n,\ n = 1,2,3,\ldots \tag{3.173}$$

Luând, pe rând, pentru n_4, valorile 1, 2, ..., n_4, obţinem

$$\begin{aligned} C_{n-1,1} &= i\sqrt{n}\,C_{n,0} \\ C_{n-2,2} &= i\sqrt{\frac{n-1}{2}}\,C_{n-1,1} \\ C_{n-3,3} &= i\sqrt{\frac{n-2}{3}}\,C_{n-2,2} \\ &\vdots \\ C_{n-n_4,n_4} &= i\sqrt{\frac{n+1-n_4}{n_4}}\,C_{n+1-n_4,n_4-1}\,, \end{aligned} \tag{3.174}$$

de unde, înmulţind membru cu membru aceste relaţii, rezultă, după simplificări, soluţia

$$C_{n-n_4,n_4} = i^{n_4}\sqrt{C_n^{n_4}}\,C_{n,0}\,, \tag{3.175}$$

cu

$$C_n^{n_4} = \frac{n!}{n_4!(n-n_4)!},$$

menţiune efectuată pentru evitarea oricărei confuzii de notaţie. Cu acest rezultat, avem posibilitatea ca, pe lângă evaluarea directă a normei $\| \psi \|$ dată de (3.165), să obţinem explicit şi forma stărilor virtual-multifotonice $\{|n\rangle\}_{n=0,1,3,...}$. Într-adevăr, din (3.161) şi (3.165), identificând amplitudinile $\mathcal{C}_n$ cu amplitudinile $\mathcal{C}_{n,0}$, rezultă pentru orice stare cu n fotoni virtuali expresia

$$|n\rangle = \sum_{n_4=0}^{n} i^{n_4} \sqrt{C_n^{n_4}}\, |n-n_4, n_4\rangle \tag{3.176}$$

şi, respectiv, pentru starea *bra*,

$$\langle n| = \textstyle\sum_{n_4=0}^{n} (-i)^{n_4} \sqrt{C_n^{n_4}}\, \langle n_4, n-n_4| \,. \tag{3.176'}$$

Cu titlu de exemplu, avem pentru primele patru stări $\{|n\rangle, \langle n|\}_{n=\overline{0,3}}$ expresiile concrete

$$\begin{aligned}
|0\rangle &= |0,0\rangle \\
\langle 0| &= \langle 0,0| \\
|1\rangle &= |1,0\rangle + i\,|0,1\rangle \\
\langle 1| &= \langle 0,1| - i\,\langle 1,0| \\
|2\rangle &= |2,0\rangle + i\sqrt{2}\,|1,1\rangle - |0,2\rangle \\
\langle 2| &= \langle 0,2| - i\sqrt{2}\,\langle 1,1| - \langle 2,0| \\
|3\rangle &= |3,0\rangle + i\sqrt{3}\,|2,1\rangle - \sqrt{3}\,|1,2\rangle - i\,|0,3\rangle \\
\langle 3| &= \langle 0,3| - i\sqrt{3}\,\langle 1,2| - \sqrt{3}\,\langle 2,1| + i\,\langle 3,0| \,.
\end{aligned}$$

Revenind la norma (3.165) a stării fizice $|\psi\rangle$, de formă explicită

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \mathcal{C}_{n_0} \sum_{n_4=0}^{n} i^{n_4} \sqrt{C_n^{n_4}}\, |n-n_4, n_4\rangle \right\}, \tag{3.177}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

obţinem, evidenţiind contribuţia termenului cu $n = n_4 = 0$ (deci lipsit, de fapt, de fotoni virtuali),

$$\langle\psi|\psi\rangle_{fv} = |\mathcal{C}_{00}|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{|\mathcal{C}_{n_0}|^2 \sum_{n_4=0}^{n}(-1)^{n_4} C_n^{n_4}\right\} . \tag{3.178}$$

Evaluarea sumei după n_4, din al doilea termen, se face imediat dacă avem în vedere formula binomului lui Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k ,$$

pentru $b = -a$ şi $a = 1$. Rezultă, atunci,

$$\sum_{n_4=0}^{n}(-1)^{n_4} C_n^{n_4} = (1-1)^n \equiv 0 , \tag{3.179}$$

deci, cu $|\mathcal{C}_{00}| = 1$ (din care lipsesc fotonii virtuali), obţinem pentru (3.178) rezultatul

$$\langle\psi|\psi\rangle_{fv} = 1 = \langle\psi|\psi\rangle , \tag{3.180}$$

ce demonstrează clar că norma oricărei stări fizice $|\psi\rangle$, generic reprezentată (simplificator) prin (3.177), este complet independentă de numărul fotonilor virtuali aflaţi în stările $\{|n-n_4\,,\,n_4\rangle\}_{0\le n_4\le n}^{n=0,1,2,\ldots}$.

În concluzie, deşi toate cele patru tipuri de fotoni, transversali ($a = 1,2$), longitudinali ($a = 3$) şi temporali ($a = 4$), sunt absolut necesare formulării $SO(3,1)$-covariante a cuantificării câmpului electromagnetic liber, contribuţia fotonilor virtuali este eliminată riguros, prin selectarea stărilor fizice, în acord cu satisfacerea condiţiei Fermi-Lorentz şi prin proprietatea de normă negativă a "fantomelor".

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

E. Componentele observabile ale impulsului

Într-o stare fizică a câmpului electromagnetic cuantificat, acestea sunt date de formula (3.144.a), cu componentele $T_{\mu 4}^{(M)}$ extrase din (3.10), adică

$$\langle P_\mu \rangle = -\int d^3x \, \langle \psi | : F_{\mu\nu} F_{4\nu} : | \psi \rangle \,, \tag{3.181}$$

sumarea efectuându-se după $\nu = \overline{1,3}$, iar $\langle P_\mu \rangle$ fiind o notaţie prescurtată pentru $\langle \psi | P_\mu | \psi \rangle$. Deoarece perechea ":" reprezintă ordonarea normală, avem nevoie, mai întâi, de expresiile părţilor de frecvenţă pozitivă şi, respectiv, negativă ale operatorului tensor al câmpului electromagnetic

$$F_{ik} = A_{k,i} - A_{i,k} \,.$$

Din (3.22), rezultă imediat

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \overset{(+)}{F}_{ik}(x) = \int d^3k \, H_{ik}(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x) \\ &\text{b)} \quad H_{ik}(x) = i \left[k_i \, a_k(\vec{k}) - k_k \, a_i(\vec{k}) \right] \end{aligned} \tag{3.182}$$

pentru partea de frecvenţe pozitive şi

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \overset{(-)}{F}_{ik}(x) = \int d^3k \, H_{ik}^\dagger(\vec{k}) \bar{f}_{\vec{k}}(x) \\ &\text{b)} \quad H_{ik}^\dagger(x) = -i \left[k_i \, a_k^\dagger(\vec{k}) - k_k \, a_i^\dagger(\vec{k}) \right] \end{aligned} \tag{3.183}$$

pentru cea de frecvenţe negative, astfel încât

$$: F_{\mu\nu} F_{4\nu} : = \overset{(+)}{F}_{\mu\nu} \overset{(+)}{F}_{4\nu} + \overset{(-)}{F}_{\mu\nu} \overset{(-)}{F}_{4\nu} + \overset{(-)}{F}_{4\nu} \overset{(+)}{F}_{\mu\nu} + \overset{(-)}{F}_{\mu\nu} \overset{(+)}{F}_{4\nu} \,,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică

$$
\begin{aligned}
:F_{\mu\nu}F_{4\nu}: \;=\; & \int d^3k'd^3k\, H_{\mu\nu}(\vec{k}')H_{4\nu}(\vec{k})f_{\vec{k}'}f_{\vec{k}} + \\
+ \; & \int d^3k'd^3k\, H^{\dagger}_{\mu\nu}(\vec{k}')H^{\dagger}_{4\nu}(\vec{k})\bar{f}_{\vec{k}'}\bar{f}_{\vec{k}} + \\
+ \; & \int d^3k'd^3k\, H^{\dagger}_{4\nu}(\vec{k}')H_{\mu\nu}(\vec{k})\bar{f}_{\vec{k}'}f_{\vec{k}} + \\
+ \; & \int d^3k'd^3k\, H^{\dagger}_{\mu\nu}(\vec{k}')H_{4\nu}(\vec{k})\bar{f}_{\vec{k}'}f_{\vec{k}} \,. \qquad (3.184)
\end{aligned}
$$

Prin înlocuire în (3.181), se poate scrie, pentru sistematizarea calculelor,

$$\langle P_\mu\rangle = \langle P_\mu\rangle_E + \langle P_\mu\rangle_D \,, \qquad (3.185)$$

cu partea extradiagonală

$$\langle P_\mu\rangle_E = \langle P_\mu\rangle^{(1)}_E + \langle P_\mu\rangle^{(2)}_E \qquad (3.186)$$

alcătuită din

$$
\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \langle P_\mu\rangle^{(1)}_E = -\int d^3x d^3k' d^3k\, \langle\psi|H_{\mu\nu}(\vec{k}')H_{4\nu}(\vec{k})|\psi\rangle f_{\vec{k}'}(x)f_{\vec{k}}(x) \\
&\text{b)}\quad \langle P_\mu\rangle^{(2)}_E = -\int d^3x d^3k' d^3k\, \langle\psi|H^{\dagger}_{\mu\nu}(\vec{k}')H^{\dagger}_{4\nu}(\vec{k})|\psi\rangle \bar{f}_{\vec{k}'}(x)\bar{f}_{\vec{k}}(x) \,,
\end{aligned}
\qquad (3.187)
$$

iar cea diagonală dată de expresia

$$
\begin{aligned}
\langle P_\mu\rangle_D \;=\; & -\int d^3x\, d^3k'\, d^3k\, \langle\psi|H^{\dagger}_{4\nu}(\vec{k})H_{\mu\nu}(\vec{k}) + \\
& + H^{\dagger}_{\mu\nu}(\vec{k}')H_{4\nu}(\vec{k})|\psi\rangle \bar{f}_{\vec{k}'}(x)f_{\vec{k}}(x) \,. \qquad (3.188)
\end{aligned}
$$

Pentru evaluarea părţii extradiagonale (3.186), este suficient să calculăm $\langle P_\mu\rangle^{(1)}_E$, deoarece $\langle P_\mu\rangle^{(2)}_E$ rezultă prin conjugarea hermitică a acesteia. Utilizând (3.182.b) în (3.187.a) avem

$$
\begin{aligned}
\langle P_\mu\rangle^{(1)}_E = & -\int \frac{d^3k'd^3k}{2\omega_{\vec{k}}}\,\delta(\vec{k}'+\vec{k})\, e^{-2i\omega_{\vec{k}}t} \\
& \langle\psi|\left[k'_\mu a_\nu(\vec{k}') - k'_\nu a_\mu(\vec{k}')\right]\left[\omega_{\vec{k}}a_\nu(\vec{k}) + k_\nu a_4(\vec{k})\right]|\psi\rangle \,, \qquad (3.189)
\end{aligned}
$$

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

dat fiind că

$$\int d^3x\, f_{\vec{k}'}(x) f_{\vec{k}}(x) = \frac{\delta(\vec{k}' + \vec{k})}{2\omega_{\vec{k}}} e^{-2i\omega_{\vec{k}}t} .$$

Integrând după $\vec{k}'$ şi explicitând produsul celor două paranteze pătrate, obţinem expresia

$$\langle P_\mu \rangle_E^{(1)} = \int \frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}} e^{-2i\omega_{\vec{k}}t} \langle \psi | k_\mu \omega_{\vec{k}} a_\nu(-\vec{k}) a_\nu(\vec{k}) + \\ + k_\mu k_\nu a_\nu(-\vec{k}) a_4(\vec{k}) - k_\nu \omega_{\vec{k}} a_\mu(-\vec{k}) a_\nu(\vec{k}) - \omega_{\vec{k}}^2 a_\mu(-\vec{k}) a_4(\vec{k}) | \psi \rangle , \tag{3.190}$$

în care vom aplica repetat atât condiţia Fermi-Lorentz

$$k_\nu a_\nu(\vec{k}) | \psi \rangle = -\omega_{\vec{k}} a_4(\vec{k}) | \psi \rangle , \tag{3.191}$$

cât şi forma ei obţinută prin trecerea lui $\vec{k}$ în $-\vec{k}$

$$k_\nu a_\nu(-\vec{k}) | \psi \rangle = \omega_{\vec{k}} a_4(-\vec{k}) | \psi \rangle . \tag{3.191'}$$

Astfel, al doilea termen devine

$$\langle \psi | k_\mu k_\nu a_\nu(-\vec{k}) a_4(\vec{k}) | \psi \rangle = \left(\langle \psi | k_\mu a_4(\vec{k}) \right) \left(k_\nu a_\nu(-\vec{k}) | \psi \rangle \right) ,$$

adică

$$\langle \psi | k_\mu k_\nu a_\nu(-\vec{k}) a_4(\vec{k}) | \psi \rangle = \langle \psi | k_\mu \omega_{\vec{k}} a_4(-\vec{k}) a_4(\vec{k}) | \psi \rangle , \tag{3.192}$$

iar cel de-al treilea termen capătă forma

$$- \langle \psi | k_\nu \omega_{\vec{k}} a_\mu(-\vec{k}) a_\nu(\vec{k}) | \psi \rangle = \langle \psi | \omega_{\vec{k}}^2 a_\mu(-\vec{k}) a_4(\vec{k}) | \psi \rangle , \tag{3.193}$$

care reduce cel de al patrulea termen. În consecinţă, (3.190) se scrie simplu

$$\langle P_\mu \rangle_E^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^3k\, k_\mu \langle \psi | a_\nu(-\vec{k}) a_\nu(\vec{k}) + a_4(-\vec{k}) a_4(\vec{k}) | \psi \rangle e^{-2i\omega_{\vec{k}}t} . \tag{3.194}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cum $a_\nu(-\vec{k})a_\nu(\vec{k}) + a_4(-\vec{k})a_4(\vec{k})$ este simetrică la trecerea lui $\vec{k}$ în $-\vec{k}$, tot integrandul din (3.194) va fi impar în $\vec{k}$, rezultând

$$\langle P_\mu \rangle_E^{(1)} \equiv 0\,, \tag{3.195}$$

ceea ce conduce, prin conjugare, la

$$\langle P_\mu \rangle_E^{(2)} \equiv 0\,, \tag{3.195'}$$

deci, pentru întreaga parte extradiagonală a impulsului observabil, se obţine

$$\langle P_\mu \rangle_E \equiv 0\,. \tag{3.196}$$

Singurele contribuţii provin din partea diagonală (3.188), pe care o aducem la forma

$$\begin{aligned}\langle P_\mu \rangle_D &= \\ &= \int \frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}} \langle\psi| \left[\omega_{\vec{k}} a_\nu^\dagger(\vec{k}) + k_\nu a_4^\dagger(\vec{k})\right] \left[k_\mu a_\nu(\vec{k}) - k_\nu a_\mu^\dagger(\vec{k})\right] |\psi\rangle + \\ &+ \int \frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}} \langle\psi| \left[k_\mu a_\nu^\dagger(\vec{k}) - k_\nu a_\mu^\dagger(\vec{k})\right] \left[\omega_{\vec{k}} a_\nu^\dagger(\vec{k}) + k_\nu a_4^\dagger(\vec{k})\right] |\psi\rangle\,,\end{aligned} \tag{3.197}$$

utilizând

$$\int d^3x\, \bar{f}_{\vec{k}'}(x) f_{\vec{k}}(x) = \frac{\delta(\vec{k}' - \vec{k})}{2\omega_{\vec{k}}}\,,$$

relaţiile de definiţie (3.182.b), (3.183.b) şi filtrarea prin δ-Dirac de la $\vec{k}'$ la $\vec{k}$. Dezvoltând produsele şi sumând apoi cele două integrale, obţinem, detaliat

$$\begin{aligned}\langle P_\mu \rangle_D = \int \frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}} \Big\{ &\langle\psi| 2k_\mu \omega_{\vec{k}}\, a_\nu^\dagger(\vec{k}) a_\nu(\vec{k}) - \omega_{\vec{k}}\, k_\nu a_\nu^\dagger(\vec{k}) a_\mu(\vec{k}) + \\ &+ k_\mu k_\nu a_4^\dagger(\vec{k}) a_\nu(\vec{k}) - \omega_{\vec{k}}^2\, a_4^\dagger(\vec{k}) a_\mu(\vec{k}) + k_\mu k_\nu a_\nu^\dagger(\vec{k}) a_4(\vec{k}) - \\ &- \omega_{\vec{k}} k_\nu a_\mu^\dagger(\vec{k}) a_\nu(\vec{k}) - \omega_{\vec{k}}^2\, a_\mu^\dagger(\vec{k}) a_4(\vec{k}) |\psi\rangle \Big\}\,.\end{aligned} \tag{3.198}$$

BCU KSIL CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În al doilea şi al cincilea termen, aplicăm duala condiţiei Fermi-Lorentz

$$\langle\psi|k_\nu a_\nu^\dagger(\vec{k}) = -\omega_{\vec{k}}\langle\psi|a_4^\dagger(\vec{k}) , \tag{3.199}$$

iar în al treilea şi al şaselea, chiar condiţia Fermi-Lorentz sub forma (3.191). Păstrând ordinea termenilor, obţinem pentru (3.198) expresia

$$\langle P_\mu\rangle_D = \int \frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}} \Big\{ \langle\psi|\, 2k_\mu\omega_{\vec{k}} a_\nu^\dagger(\vec{k})a_\nu(\vec{k}) + \omega_{\vec{k}}^2 a_4^\dagger(\vec{k})a_\mu(\vec{k}) -$$
$$- k_\mu\omega_{\vec{k}} a_4^\dagger(\vec{k})a_4(\vec{k}) - \omega_{\vec{k}}^2 a_4^\dagger(\vec{k})a_\mu(\vec{k}) -$$
$$- k_\mu\omega_{\vec{k}} a_4^\dagger(\vec{k})a_4(\vec{k}) + \omega_{\vec{k}}^2 a_\mu^\dagger(\vec{k})a_4(\vec{k}) - \omega_{\vec{k}}^2 a_\mu^\dagger(\vec{k})a_4(\vec{k})|\psi\rangle \Big\} ,$$

în care observăm reducerea celui de al doilea cu al patrulea termen şi, respectiv, a penultimului cu ultimul termen. Simplificând şi dublul pulsaţiei ($2\omega_{\vec{k}}$), rezultă

$$\langle P_\mu\rangle_D = \int d^3k\, k_\mu \langle\psi|\eta^{ik} a_i^\dagger(\vec{k})a_k(\vec{k})|\psi\rangle . \tag{3.200}$$

Din (3.146) şi (3.147) avem că

$$\eta^{ik} a_i^\dagger(\vec{k})a_k(\vec{k}) = \eta^{ab} c_a^\dagger(\vec{k})c_b(\vec{k}) = \hat{N}(\vec{k}) ,$$

iar din (3.155) am văzut că media operatorului număr de fotoni, într-o stare fizică a câmpului, este dată numai de suma numărului de fotoni transversali $\{N_A(\vec{k})\}_{A=1,2}$ definit de (3.156). Aşadar, împreună cu (3.185) şi (3.196), obţinem, din relaţia (3.200), că impulsul observabil macroscopic al câmpului Maxwell cuantificat are expresia

$$\langle P_\mu\rangle = \sum_{A=1}^{2} \int d^3k\, k_\mu N_A(\vec{k}) , \tag{3.201}$$

ceea ce demonstrează clar atât natura transversală a polarizării câmpului, cât şi, mai ales, faptul că fiecare foton real participă cu o cuantă de impuls $\hbar\vec{k}$.

BCU "SI" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

F. Energia câmpului în stările fizice ale acestuia

Din (3.144.b) şi componenta $T_{44}^{(M)}$ extrasă din (3.10) obţinem, ca primă expresie,

$$\langle H\rangle = \int d^3x \langle\psi| : F_{4\nu}F_{4\nu} + \frac{1}{4}F^{lm}F_{lm} : |\psi\rangle \,, \tag{3.202}$$

unde am folosit notaţia prescurtată $\langle H\rangle$ pentru $\langle\psi|H|\psi\rangle$. Aplicând ordonarea normală, identificăm partea extradiagonală

$$\langle H\rangle_E = \langle H\rangle_E^{(1)} + \langle H\rangle_E^{(2)} \,, \tag{3.203}$$

cu

$$\text{a)}\quad \langle H\rangle_E^{(1)} = \int d^3x \langle\psi| \overset{(+)}{F}_{4\nu}\overset{(+)}{F}_{4\nu} + \frac{1}{4}\overset{(+)}{F}{}^{lm}\overset{(+)}{F}_{lm}|\psi\rangle$$

$$\text{b)}\quad \langle H\rangle_E^{(2)} = \int d^3x \langle\psi| \overset{(-)}{F}_{4\nu}\overset{(-)}{F}_{4\nu} + \frac{1}{4}\overset{(-)}{F}{}^{lm}\overset{(-)}{F}_{lm}|\psi\rangle \tag{3.204}$$

şi, respectiv, pe cea diagonală

$$\langle H\rangle_D = 2\int d^3x \langle\psi| \overset{(-)}{F}_{4\nu}\overset{(+)}{F}_{4\nu} + \frac{1}{4}\overset{(-)}{F}{}^{lm}\overset{(+)}{F}_{lm}|\psi\rangle \,, \tag{3.205}$$

astfel încât

$$\langle H\rangle = \langle H\rangle_D + \langle H\rangle_E \,. \tag{3.206}$$

Ca şi în cazul impulsului, vom începe cu evaluarea părţii extradiagonale $\langle H\rangle_E^{(1)}$, $\langle H\rangle_E^{(2)}$ rezultând simplu prin conjugarea acesteia. Utilizând rezultatele din ecuaţia (3.182), avem

$$\langle H\rangle_E^{(1)} = -\int d^3x\, d^3k'\, d^3k$$
$$\langle\psi|\left[-\omega_{\vec{k}'}a_\nu(\vec{k}') - k'_\nu a_4(\vec{k}')\right]\left[-\omega_{\vec{k}}a_\nu(\vec{k}) - k_\nu a_4(\vec{k})\right]f_{\vec{k}'}(x)f_{\vec{k}}(x) +$$
$$+\frac{1}{4}\left[k'^l a^m(\vec{k}') - k'^m a^l(\vec{k}')\right]\left[k_l a_m(\vec{k}) - k_m a_l(\vec{k})\right]f_{\vec{k}'}(x)f_{\vec{k}}(x)|\psi\rangle \,,$$

BCU CASA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ LIBRARY

adică

$$\langle H\rangle_E^{(1)} = -\int \frac{d^3k'd^3k}{2\omega_{\vec{k}}} e^{-2i\omega_{\vec{k}}t}\,\delta(\vec{k}'+\vec{k})$$
$$\langle\psi|\left\{\left[\omega_{\vec{k}'}a_\nu(\vec{k}') + k'_\nu a_4(\vec{k}')\right]\left[\omega_{\vec{k}}a_\nu(\vec{k}) + k_\nu a_4(\vec{k})\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\left[k'^l a^m(\vec{k}') - k'^m a^l(\vec{k}')\right]\left[k_l a_m(\vec{k}) - k_m a_l(\vec{k})\right]\right\}|\psi\rangle\,. \quad (3.207)$$

Integrând după $\vec{k}'$, dezvoltând produsele şi reducând termenii asemenea, ajungem la expresia

$$\langle H\rangle_E^{(1)} = -\int \frac{d^3k}{4\omega_{\vec{k}}} e^{-2i\omega_{\vec{k}}t}\,\langle\psi|\omega_{\vec{k}}a_4(\vec{k})\left(k_\nu a_\nu(-\vec{k})\right) -$$
$$-\omega_{\vec{k}}a_4(-\vec{k})\left(k_\nu a_\nu(\vec{k})\right) + k_\rho k_\sigma a_\rho(\vec{k})a_\sigma(-\vec{k}) - \omega_{\vec{k}}^2 a_4(\vec{k})a_4(-\vec{k})|\psi\rangle\,, \quad (3.208)$$

în care vom aplica, pentru primii trei termeni, formele (3.191, 191′) ale ecuaţiei Fermi-Lorentz. Rezultă

$$\langle H\rangle_E^{(1)} = -\frac{1}{4}\int d^3k\,\omega_{\vec{k}}\,e^{-2i\omega_{\vec{k}}t}\,\langle\psi|a_4(\vec{k})a_4(-\vec{k}) + a_4(-\vec{k})a_4(\vec{k}) -$$
$$- a_4(-\vec{k})a_4(\vec{k}) - a_4(\vec{k})a_4(-\vec{k})|\psi\rangle\,, \quad (3.209)$$

adică

$$\langle H\rangle_E^{(1)} \equiv 0\,,\quad \langle H\rangle_E^{(1)} = \overline{\langle H\rangle_E^{(2)}} \equiv 0\,, \quad (3.210)$$

deci, pentru întreaga parte extradiagonală a energiei (observabile), avem

$$\langle H\rangle_E \equiv 0\,. \quad (3.211)$$

Calculul părţii diagonale se simplifică simţitor, dacă evaluăm, mai

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

întâi, al doilea termen din (3.205), adică

$$\frac{1}{2}\int d^3x\,\langle\psi|\overset{(-)}{F}{}^{lm}\overset{(+)}{F}_{lm}|\psi\rangle = \frac{1}{2}\int d^3x d^3k' d^3k$$
$$\langle\psi|\left[k'_l a^\dagger_m(\vec{k}') - k'_m a^\dagger_l(\vec{k})\right]\left[k^l a^m(\vec{k}) - k^m a^l(\vec{k})\right]|\psi\rangle \bar{f}_{\vec{k}'}(x) f_{\vec{k}}(x)\,. \tag{3.212}$$

Cum

$$\int d^3x\,\bar{f}_{\vec{k}'}(x) f_{\vec{k}}(x) = \frac{\delta(\vec{k}'-\vec{k})}{2\omega_{\vec{k}}}\,,$$

rezultă imediat, pentru (3.212), prin filtrarea lui $\vec{k}'$ la $\vec{k}$ şi aplicarea condiţiei *on-shell* $k^2 = 0$, forma

$$\frac{1}{2}\int d^3x\,\langle\psi|\overset{(-)}{F}{}^{lm}\overset{(+)}{F}_{lm}|\psi\rangle = -\int \frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}}\langle\psi|a^\dagger_l(\vec{k})k^l k^m a_m(\vec{k})|\psi\rangle\,, \tag{3.213}$$

care se reduce la

$$\frac{1}{2}\int d^3x\,\langle\psi|\overset{(-)}{F}{}^{lm}\overset{(+)}{F}_{lm}|\psi\rangle \equiv 0\,, \tag{3.214}$$

prin luarea în considerare a condiţiei Fermi-Lorentz, satisfăcută de stările fizice $|\psi\rangle$. Prin urmare, evaluarea energiei observabile a câmpului electromagnetic liber, cuantificat covariant-canonic, revine la calculul integralei din membrul drept al relaţiei

$$\langle H\rangle = 2\int d^3x\,\langle\psi|\overset{(-)}{F}_{4\nu}\overset{(+)}{F}_{4\nu}|\psi\rangle\,, \tag{3.215}$$

care înseamnă, practic,

$$\langle H\rangle = \int \frac{d^3k}{\omega_{\vec{k}}}\langle\psi|\left[\omega_{\vec{k}} a^\dagger_\nu(\vec{k}) + k_\nu a^\dagger_4(\vec{k})\right]\left[\omega_{\vec{k}} a_\nu(\vec{k}) + k_\nu a_4(\vec{k})\right]|\psi\rangle \tag{3.216}$$

BCU IAŞI CERA UNIVERSITY LIBRARY

prin înlocuirea expresiilor (3.182, 183) şi integrarea după $\vec{x}$ şi $\vec{k}'$. Dezvoltând produsul celor două paranteze, simplificând prin $\omega_{\vec{k}}$ şi aplicând condiţia Fermi-Lorentz, obţinem

$$\langle H\rangle = \int d^3k\,\omega_{\vec{k}}\langle\psi|\eta^{ik}a_i^\dagger(\vec{k})a_k(\vec{k})|\psi\rangle =$$
$$= \int d^3k\,\omega_{\vec{k}}\langle\psi|\eta^{ab}c_a^\dagger(\vec{k})c_b(\vec{k})|\psi\rangle = \int d^3k\,\omega_{\vec{k}}\langle\psi|\hat{N}(\vec{k})|\psi\rangle \quad (3.217)$$

şi cum, din (3.155), avem

$$\langle\psi|\hat{N}(\vec{k})|\psi\rangle = \sum_{A=1}^{2} N_A(\vec{k}) \text{ cu } N_A(\vec{k}) = \langle\psi|c_A^\dagger(\vec{k})c_A(\vec{k})|\psi\rangle\,,$$

rezultă, în final, expresia

$$\langle H\rangle = \sum_{A=1}^{2}\int d^3k\,\omega_{\vec{k}}N_A(\vec{k})\,, \quad (3.218)$$

evidenţiind participarea exclusivă, la energia câmpului liber, a fotonilor transversali, fiecare transportând o cuantă Planck $\hbar\omega_{\vec{k}}$.

G. Elicitatea cuantelor câmpului electromagnetic

În cazul cuantificării covariante, spre deosebire de cel al cuantificării în *gauge* transversal, alegerea $A^4 = -A_4 = 0$ nu mai este posibilă, ceea ce conduce la apariţia de termeni suplimentari în expresia densităţii de spin a câmpului. Astfel, va trebuie să fim atenţi la felul în care aceşti termeni contribuie la păstrarea caracterului conservativ al tensorului densităţii de spin, fără a afecta însă valorile observabile ale elicităţii câmpului. Această noţiune, de elicitate, este singura ce poate fi definită corect, în sensul respectării principiilor relativităţii einsteiniene în studiul spinului particulelor nemasive. Motivul este acela că o particulă cu masă de repaus nulă se va propaga întotdeauna, în vid, cu viteza luminii, neputând fi surprinsă nicăieri în repaus faţă de

un referenţial cartezian în raport cu a cărui axă oz definim proiecţiile S_z ale spinului. Tot ce putem defini este proiecţia $h = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \cdot \vec{s}$ a spinului pe direcţia de mişcare a particulei, adică *elicitatea* acesteia.

În cadrul teoriei U_4 a gravitaţiei într-un univers curb şi torsionat de spinul surselor sale materiale, tensorul densităţii geometrice de spin al unui câmp fizic de lagrangeian $\mathcal{L}$ este definit de relaţia (I.1.51), adică

$$\sigma_G^{ikl} = \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta K}\right]^{[ik]l} , \tag{3.219}$$

unde $\frac{\delta}{\delta K}$ reprezintă derivata funcţională după tensorul K al contorsiunii (întotdeauna antisimetrică în primii doi indici), iar notaţia $[ik]$ prescurtează operaţia de antisimetrizare $ik - ki$. Coeficienţii Γ ai conexiunii U_4 (metrice, dar nesimetrice) sunt reprezentaţi, simplu, prin formula

$$\Gamma_{ikl} = \overset{0}{\Gamma}_{ikl} + K_{ikl} , \tag{3.220}$$

unde $\overset{0}{\Gamma}_{ikl}$ sunt simbolurile lui Christoffel ale conexiunii Levi-Civita, iar K_{ikl} sunt componentele contorsiunii. Prin urmare, derivata $SO(3,1)$-*gauge* covariantă a 4-potenţialului va fi dată de

$$A_{r;s} = A_{r,s} - A_q \Gamma^q_{\cdot rs} = A_{r,s} - A^q \Gamma_{qrs} ,$$

adică

$$A_{r;s} = A_{r,s} - A^q \overset{0}{\Gamma}_{qrs} - A^q K_{qrs} , \tag{3.221}$$

ceea ce conduce la forma

$$F_{rs} = A_{[s,r]} + A^q K_{qrs} - A^q K_{qsr} \tag{3.222}$$

a tensorului Maxwell "în sens U_4" şi, astfel, obţinem

$$\frac{\delta F_{rs}}{\delta K_{ikl}} = A^q \delta^i_q \delta^k_r \delta^l_s - A^q \delta^i_q \delta^k_s \delta^l_r = A^i \left[\delta^k_r \delta^l_s - \delta^k_s \delta^l_r\right] . \tag{3.223}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru lagrangeianul câmpului electromagnetic

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{4} F^{rs} F_{rs}$$

obţinem, prin derivare funcţională după K,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta K_{ikl}} = \frac{1}{2} F^{rs} \frac{\delta F_{rs}}{\delta K_{ikl}} = \frac{1}{2} A^i F^{rs} \left[\delta^k_r \delta^l_s - \delta^k_s \delta^l_r \right] ,$$

adică

$$\left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta K} \right]^{ikl} = A^i F^{kl} . \tag{3.224}$$

Antisimetrizând, în acord cu definiţia (3.219), rezultă expresia tensorului densităţii geometrice de spin a câmpului Maxwell

$$\sigma^{ikl}_G = A^i F^{kl} - A^k F^{il} . \tag{3.225}$$

Problema de principiu cu această expresie este absenţa caracterului conservativ al tensorului σ_G, adică

$$\sigma^{ikl}_{G,l} = A^i{}_{,l} F^{kl} - A^k{}_{,l} F^{il} \neq 0 . \tag{3.226}$$

Prin urmare, în formulare Lorentz-covariantă, el nu poate servi direct ca tensor al densităţii (fizice) de spin a câmpului electromagnetic. Va trebui să substragem nişte termeni, astfel încât

$$\sigma = \sigma_G - \text{"termeni substraşi"}$$

să fie o mărime conservativă, tensorială de ordin 3 şi antisimetrică în primii doi indici, simultan cu satisfacerea de către A a ecuaţiei de propagare $\Box A = 0$. Procedeul este următorul: adunând şi scăzând $A_l{}^i$ la $A^i{}_{,l}$ şi respectiv $A_l{}^k$ la $A^k{}_{,l}$ obţinem, din (3.226),

$$\begin{aligned} \sigma^{ikl}_{G,l} &= F_l{}^i F^{kl} + A_l{}^i F^{kl} - F_l{}^k F^{il} - A_l{}^k F^{il} = \\ &= A_l{}^i (A^{l,k} - A^{k,l}) - A_l{}^k (A^{l,i} - A^{i,l}) , \end{aligned}$$

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

adică

$$\sigma^{ikl}_{G,l} = \left[A^i A^{l,k} - A^k A^{l,i}\right]_{,l} , \tag{3.227}$$

dat fiind că, la nivel (semi)clasic, $A^l{}_{,l} = 0$. În consecinţă, dacă substragem din $\sigma^{ikl}_{G,l}$ termenul $A^i A^{l,k} - A^k A^{l,i}$, atunci obţinem componentele tensorului densităţii de spin

$$\sigma^{ikl} = A^i F^{kl} - A^k F^{il} - A^i A^{l,k} + A^k A^{l,i} ,$$

adică, explicit,

$$\sigma^{ikl} = A^k A^{i,l} - A^i A^{k,l} . \tag{3.228}$$

Caracterul său conservativ este evident, deoarece

$$\sigma^{ikl}_{,l} = A^k \Box A^i - A^i \Box A^k = 0$$

se bazează în mod direct (şi numai) pe ecuaţia de propagare

$$\Box A^r = 0 , \; r = \overline{1,4} ,$$

a componentelor 4-potenţialului câmpului electromagnetic.

În paragraful anterior, cel dedicat cuantificării în *gauge* transversal, am utilizat, de fapt, componentele $\sigma_G^{\alpha\beta 4}$ ale densităţii geometrice de spin, pentru calculul componentelor S_μ ale 3-vectorului de spin. Se ridică întrebarea dacă am procedat greşit sau nu. Din fericire, răspunsul este nu. În calibrare $A^4 = 0$, $\sigma_G^{\alpha\beta 4}$ date de (3.225), adică

$$\sigma_G^{\alpha\beta 4} = -A^\alpha A^{\beta,4} + A^\beta A^{\alpha,4} , \tag{3.229}$$

sunt în perfectă concordanţă cu componentele

$$\sigma^{\alpha\beta 4} = A^\beta A^{\alpha,4} - A^\alpha A^{\beta,4} \tag{3.229'}$$

ale densităţii fizice (conservative) de spin, date de (3.228). Prin urmare, deşi am lucrat necovariant şi cu un obiect σ_G neconservativ, evaluarea

BCU ASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3-vectorului de spin $\vec{S}$ a fost corectă, din cauza coincidenţei componentelor (3.229), când $A^4 = -A_4 = 0$, cu cele "bune" (3.229′) *ab initio* valabile şi în cazul general $A^4 \neq 0$. Pentru componentele $\sigma^{\mu 44}$, însă, rolul covarianţei Lorentz este esenţial. În timp ce în etalon de radiaţie

$$\sigma^{\mu 44} = \sigma_G^{\mu 44} \equiv 0 \,,$$

în formulare covariantă

$$\sigma^{\mu 44} = A^4 A^{\mu,4} - A^\mu A^{4,4} \tag{3.230}$$

fiind, în principiu, diferită de zero, ceea ce conduce la componente netriviale, de tip $S^{\mu 4}$, ale operatorului de spin. Precum spuneam, sunt necesare calcule detaliate pentru a investiga dacă toate componentele suplimentare (faţă de cazul cuantificării necovariante în *gauge* transversal) aduc contribuţii la nivel observabil.

Să începem prin a explicita componentele

$$S^{ik} = \int d^3x \, \sigma^{ik4} \tag{3.231}$$

ale operatorului de spin. Pentru cele de gen spaţial avem

$$S^{\mu\nu} = \int d^3x \, [A^\mu A^\nu{}_{,4} - A^\nu A^\mu{}_{,4}] \,, \tag{3.232}$$

adică, înlocuind forma (3.22) a operatorului de câmp şi având în vedere că, pentru partea spaţială, co- şi contravarianţa coincid, obţinem

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu} &= i \int d^3x d^3k' d^3k \omega_{\vec{k}} \left[a_\mu(\vec{k}') a_\nu(\vec{k}) - a_\nu(\vec{k}') a_\mu(\vec{k}) \right] f_{\vec{k}'}(x) f_{\vec{k}}(x) + \\ &+ i \int d^3x d^3k' d^3k \omega_{\vec{k}} \left[a_\mu^\dagger(\vec{k}') a_\nu^\dagger(\vec{k}) - a_\nu^\dagger(\vec{k}') a_\mu^\dagger(\vec{k}) \right] \bar{f}_{\vec{k}'}(x) \bar{f}_{\vec{k}}(x) - \\ &- i \int d^3x d^3k' d^3k (\omega_{\vec{k}'} + \omega_{\vec{k}}) \left[a_\mu^\dagger(\vec{k}') a_\nu(\vec{k}) - a_\nu^\dagger(\vec{k}') a_\mu(\vec{k}) \right] \bar{f}_{\vec{k}'}(x) f_{\vec{k}}(x) \,. \end{aligned} \tag{3.233}$$

BCU ISTORIE CENTRALĂ UNIVERSITY LIBRARY

Efectuând integrala pe spaţiul fizic $\mathbb{R}^3$ şi filtrând $\vec{k}'$ la $-\vec{k}$ în primii doi termeni şi $\vec{k}'$ la $\vec{k}$ în ultimul, rezultă

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu} &= -\frac{i}{2}\int d^3k\, e^{-2i\omega_{\vec{k}}t}\left[a_\mu(-\vec{k}),\, a_\nu(\vec{k})\right] + \\ &+ \frac{i}{2}\int d^3k\, e^{2i\omega_{\vec{k}}t}\left[a_\mu^\dagger(-\vec{k}),\, a_\nu^\dagger(\vec{k})\right] - \\ &- i\int d^3k\left(a_\mu^\dagger(\vec{k})a_\nu(\vec{k}) - a_\nu^\dagger(\vec{k})a_\mu(\vec{k})\right) \end{aligned} \tag{3.234}$$

şi, cum

$$\left[a_\mu(\vec{k}'),\, a_\nu(\vec{k})\right] = 0 = \left[a_\mu^\dagger(\vec{k}'),\, a_\nu^\dagger(\vec{k})\right],$$

rămânem cu expresia simplă

$$S^{\mu\nu} = -i\int d^3k\left(a_\mu^\dagger(\vec{k})a_\nu(\vec{k}) - a_\nu^\dagger(\vec{k})a_\mu(\vec{k})\right). \tag{3.235}$$

Pentru componentele mixte de tip $\mu 4$ obţinem, din (3.231) şi (3.230),

$$S^{\mu 4} = \int d^3x\left[A_4 A_{\mu,4} - A_\mu A_{4,4}\right], \tag{3.236}$$

ceea ce revine, prin utilizarea reprezentării spectrale (3.22) a componentelor operatorului 4-potenţial, la forma detaliată

$$\begin{aligned} S^{\mu 4} &= -i\int d^3x d^3k' d^3k \omega_{\vec{k}}\left[a_4(\vec{k}')a_\mu(\vec{k}) - a_\mu(\vec{k}')a_4(\vec{k})\right] f_{\vec{k}'}(x) f_{\vec{k}}(x) + \\ &+ i\int d^3x d^3k' d^3k \omega_{\vec{k}}\left[a_4^\dagger(\vec{k}')a_\mu^\dagger(\vec{k}) - a_\mu^\dagger(\vec{k}')a_4^\dagger(\vec{k})\right] \bar{f}_{\vec{k}'}(x)\bar{f}_{\vec{k}}(x) + \\ &+ i\int d^3x d^3k' d^3k(\omega_{\vec{k}'} + \omega_{\vec{k}})\left[a_\mu^\dagger(\vec{k}')a_4(\vec{k}) - a_4^\dagger(\vec{k}')a_\mu(\vec{k})\right] \bar{f}_{\vec{k}'}(x) f_{\vec{k}}(x) \end{aligned} \tag{3.237}$$

care se reduce imediat la expresia

$$S^{\mu 4} = i\int d^3k\left[a_\mu^\dagger(\vec{k})a_4(\vec{k}) - a_4^\dagger(\vec{k})a_\mu(\vec{k})\right], \tag{3.238}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

prin aplicarea aceluiaşi procedeu de integrare ca în cazul obţinerii componentelor $\mu\nu$ şi a relaţiilor de comutare

$$\left[a_4(\vec{k}'), a_\mu(\vec{k})\right] = 0 = \left[a_4^\dagger(\vec{k}'), a_\mu^\dagger(\vec{k})\right] .$$

Prin urmare, în absenţa oricăror consideraţii asupra stărilor cuantice ale câmpului, componentele (3.235) şi (3.238) au caracter algebric esenţial, în sensul că sunt singurele componente diferite de zero ale operatorului de spin S exprimat ca integrală primă a tensorului densităţii de spin σ. Deoarece, ca şi F, S este un bivector, adică un tensor antisimetric de ordinul doi pe spaţiul Minkowski, el se descompune în doi 3-vectori, unul axial, de componente

$$S_\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\mu\nu}S^{\mu\nu} \tag{3.239}$$

şi celălalt polar, de componente

$$\underline{S}_\alpha = S_{\alpha 4} . \tag{3.240}$$

Problema care se pune este următoarea. Din teoria reprezentărilor unitare ale grupului Poincaré [43, 60], ştim că o particulă cu masa de repaus nulă are întotdeauna două stări de elicitate $h = \pm s$, oricare ar fi spinul $s > 0$, întreg sau semi-întreg, al acesteia. Pentru foton, care are de asemenea $m = 0$, conduc operatorii 3-vectoriali (3.239) şi (3.240) la confirmarea acestei proprietăţi? În vederea formulării unui răspuns, să observăm, mai întâi, că prin utilizarea, în relaţiile (3.239, 240), a expresiilor (3.235) şi (3.238), cei doi operatori, axial şi, respectiv, polar, se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad \vec{S} = -i\int d^3k\, \vec{a}^\dagger(\vec{k}) \times \vec{a}(\vec{k}) \\ &\text{b)}\quad \underline{\vec{S}} = -i\int d^3k \left[\vec{a}^\dagger(\vec{k})a_4(\vec{k}) - a_4^\dagger(\vec{k})\vec{a}(\vec{k})\right] , \end{aligned} \tag{3.241}$$

BCU IAŞI - FONDUL UNIVERSITAR LIBRARY

care permite definirea densităţilor lor spectrale

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \vec{s}(\vec{k}) = -i\,\vec{a}^{\dagger}(\vec{k}) \times \vec{a}(\vec{k}) \\ &\text{b)} \quad \underline{\vec{s}}(\vec{k}) = -i\left[\vec{a}^{\dagger}(\vec{k})a_4(\vec{k}) - a_4^{\dagger}(\vec{k})\vec{a}(\vec{k})\right], \end{aligned} \tag{3.242}$$

cu ajutorul cărora vom calcula elicitatea. Demersul se simplifică simţitor dacă avem în vedere că, în baza celor discutate la condiţia Fermi-Lorentz şi a formalismului de eliminare a fotonilor virtuali, în orice stare fizică $|\Psi\rangle$, fotonii transversali descrişi de *ket*-ul $|\Phi\rangle$ sunt factorizaţi faţă de cei virtuali, descrişi de vectorul de stare $|\psi\rangle$, soluţie a constrângerii (cuantice) Fermi-Lorentz, adică

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\Phi\rangle|\psi\rangle \\ \langle\Psi| &= \langle\psi|\langle\Phi|\,. \end{aligned} \tag{3.243}$$

Aplicând această factorizare în exprimarea contribuţiei

$$\underline{h} = \langle\Psi|\omega_{\vec{k}}^{-1}\,\vec{k}\cdot\underline{\vec{s}}(\vec{k})|\Psi\rangle \tag{3.244}$$

la elicitate a densităţii spectrale $\underline{\vec{s}}(\vec{k})$ a operatorului polar $\underline{\vec{S}}$, obţinem că

$$\underline{h} = -\frac{i}{\omega_{\vec{k}}}\langle\Phi|\langle\psi|\vec{k}\cdot\vec{a}^{\dagger}(\vec{k})a_4(\vec{k}) - a_4^{\dagger}(\vec{k})\vec{a}(\vec{k})\cdot\vec{k}|\psi\rangle|\Phi\rangle$$

şi cum

$$\begin{aligned} \langle\psi|\left(\vec{k}\cdot\vec{a}^{\dagger}(\vec{k})\right) &= -\omega_{\vec{k}}\,\langle\psi|a_4^{\dagger}(\vec{k}) \\ \left(\vec{k}\cdot\vec{a}(\vec{k})\right)|\psi\rangle &= -\omega_{\vec{k}}\,a_4(\vec{k})|\psi\rangle\,, \end{aligned}$$

rezultă imediat

$$\underline{h} = i\,\langle\Psi|a_4^{\dagger}(\vec{k})a_4(\vec{k}) - a_4^{\dagger}(\vec{k})a_4(\vec{k})|\Psi\rangle$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică, în mod evident,

$$\underline{h} \equiv 0 \,. \tag{3.245}$$

Astfel, elicitatea va fi complet determinată numai de contribuţia densităţii spectrale $\vec{s}(\vec{k})$ a operatorului vectorial axial $\vec{S}$ al spinului. Din (3.242.a) şi din faptul că, în reperul $\{e_\mu\}_{\mu=\overline{1,3}}$ adaptat direcţiei $\vec{e}_3 = \frac{\vec{k}}{\omega_{\vec{k}}}$ a vectorului de undă, avem

$$\begin{aligned} \vec{a}(\vec{k}) &= c_\mu(\vec{k})\,\vec{e}_\mu \\ \vec{a}^\dagger(\vec{k}) &= c_\mu^\dagger(\vec{k})\,\vec{e}_\mu \end{aligned} \tag{3.246}$$

(cu sumare după $\mu = \overline{1,3}$), rezultă

$$\begin{aligned} \vec{k}\cdot\vec{s}(\vec{k}) &= -i\left[\vec{k}\cdot\left(\vec{a}^\dagger(\vec{k})\times\vec{a}(\vec{k})\right)\right] = -i\,\omega_{\vec{k}}\,\vec{e}_3\cdot\left(\vec{c}^\dagger(\vec{k})\times\vec{c}(\vec{k})\right) = \\ &= -i\,\omega_{\vec{k}}\,(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_\rho)\,\varepsilon_{\rho\mu\nu}\,c_\mu^\dagger(\vec{k})c_\nu(\vec{k})\,, \end{aligned}$$

adică

$$\omega_{\vec{k}}^{-1}\vec{k}\cdot\vec{s}(\vec{k}) = -i\,\varepsilon_{3\mu\nu}\,c_\mu^\dagger(\vec{k})c_\nu(\vec{k}) = -i\left[c_1^\dagger(\vec{k})c_2(\vec{k}) - c_2^\dagger(\vec{k})c_1(\vec{k})\right] \tag{3.247}$$

şi, astfel, obţinem pentru elicitate, ca "expresie de primă estimare", relaţia

$$h = \langle\Psi|\frac{\vec{k}}{\omega_{\vec{k}}}\cdot\vec{s}(\vec{k})|\Psi\rangle = -i\,\langle\Psi|c_1^\dagger(\vec{k})c_2(\vec{k}) - c_2^\dagger(\vec{k})c_1(\vec{k})|\Psi\rangle\,. \tag{3.248}$$

Datorită factorizării (3.243) şi a faptului că $\left\{c_A(\vec{k}),\, c_A^\dagger(\vec{k})\right\}_{A=1,2}$ acţionează numai asupra stărilor transversale $|\Phi\rangle$, $\langle\Phi|$, iar $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, expresia (3.248) capătă forma

$$h = -i\,\langle\Phi|c_1^\dagger(\vec{k})c_2(\vec{k}) - c_2^\dagger(\vec{k})c_1(\vec{k})|\Phi\rangle\,, \tag{3.249}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

în care singurul inconvenient serios este caracterul ei nediagonal. Dar cu această situaţie ne-am întâlnit deja în paragraful anterior, când am calculat spinul câmpului de radiaţie. În consecinţă, vom aplica şi aici exact acelaşi procedeu de diagonalizare, prin efectuarea rotaţiilor *null*

$$\begin{aligned} c_1(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[C_1(\vec{k}) + C_2(\vec{k})\right] \\ c_1^\dagger(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[C_1^\dagger(\vec{k}) + C_2^\dagger(\vec{k})\right] \\ c_2(\vec{k}) &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left[C_1(\vec{k}) - C_2(\vec{k})\right] \\ c_2^\dagger(\vec{k}) &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\left[C_1^\dagger(\vec{k}) - C_2^\dagger(\vec{k})\right], \end{aligned} \tag{3.250}$$

în expresia (3.249) a elicităţii. Rezultă imediat forma extrem de sugestivă

$$h = \langle\Phi|C_1^\dagger(\vec{k})C_1(\vec{k})|\Phi\rangle - \langle\Phi|C_2^\dagger(\vec{k})C_2(\vec{k})|\Phi\rangle\,. \tag{3.251}$$

Operatorii

$$\begin{aligned} C_1(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[c_1(\vec{k}) - i\,c_2(\vec{k})\right] \\ C_1^\dagger(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[c_1^\dagger(\vec{k}) + i\,c_2^\dagger(\vec{k})\right] \\ C_2(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[c_1(\vec{k}) + i\,c_2(\vec{k})\right] \\ C_2^\dagger(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[c_1^\dagger(\vec{k}) - i\,c_2^\dagger(\vec{k})\right] \end{aligned} \tag{3.252}$$

satisfac, după cum se poate verifica uşor, relaţiile de comutare

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \left[C_A(\vec{k}'), C_B(\vec{k})\right] = 0 \\ &\text{b)} \quad \left[C_A^\dagger(\vec{k}'), C_B(\vec{k})\right] = 0 \\ &\text{c)} \quad \left[C_A(\vec{k}'), C_B^\dagger(\vec{k})\right] = \delta_{AB}\,\delta(\vec{k}' - \vec{k}) \end{aligned} \tag{3.253}$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi proprietatea de invarianţă a operatorului număr total de fotoni reali

$$\sum_{A=1}^{2} \hat{N}_A(\vec{k}) = \delta^{AB} c_A^\dagger(\vec{k}) c_B(\vec{k}) = \delta^{AB} C_A^\dagger(\vec{k}) C_B(\vec{k}) \,. \tag{3.254}$$

Trecând, pentru prescurtarea scrierii, la notaţia simplificată în care omitem specificarea vectorului de undă, aceste aspecte (relaţiile de comutare (3.253) şi invarianţa (3.254)) ne permit să concluzionăm că operatorii $\{C_A\}_{A=1,2}$ sunt de anihilare, iar $\left\{C_A^\dagger\right\}_{A=1,2}$ de creare, ei acţionând asupra vectorilor bazei ortonormale $\{n_A\}_{A=1,2}$,

$$\begin{aligned} \langle n_1'|n_1\rangle &= \delta_{n_1' n_1} \\ \langle n_2'|n_2\rangle &= \delta_{n_2' n_2} \\ \langle n_1|n_2\rangle &= \langle n_2|n_1\rangle = 0 \,, \end{aligned} \tag{3.255}$$

după relaţiile de acum bine cunoscute

$$\text{a)} \begin{cases} C_1|n_1\rangle = \sqrt{n_1}\,|n_1 - 1\rangle \\ \langle n_1|C_1^\dagger = \sqrt{n_1}\,\langle n_1 - 1| \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} C_1^\dagger|n_1\rangle = \sqrt{n_1 + 1}\,|n_1 + 1\rangle \\ \langle n_1|C_1 = \sqrt{n_1 + 1}\,\langle n_1 + 1| \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} C_2|n_2\rangle = \sqrt{n_2}\,|n_2 - 1\rangle \\ \langle n_2|C_2^\dagger = \sqrt{n_2}\,\langle n_2 - 1| \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} C_2^\dagger|n_2\rangle = \sqrt{n_2 + 1}\,|n_2 + 1\rangle \\ \langle n_2|C_2 = \sqrt{n_2 + 1}\,\langle n_2 + 1| \,. \end{cases} \tag{3.256}$$

Aici, vectorii $|n_1\rangle$, $|n_2\rangle$ sunt respectiv, stările proprii ale operatorilor de număr $C_1^\dagger C_1$, $C_2^\dagger C_2$, pentru valorile proprii $n_1 = 0, 1, 2, \ldots$ şi, respectiv, $n_2 = 0, 1, 2, \ldots$, adică

$$\begin{aligned} C_1^\dagger C_1|n_1\rangle &= n_1|n_1\rangle \\ C_2^\dagger C_2|n_2\rangle &= n_2|n_2\rangle \,. \end{aligned} \tag{3.257}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Baza ortonormală "mai largă" $\{|n_1, n_2\rangle\}$ unde $n_1 = 0, 1, 2, \ldots$ şi $n_2 = 0, 1, 2, \ldots$ a spaţiului Fock, căruia îi aparţin stările $|\Phi\rangle$ (cu fotoni reali), se obţine prin produsul tensorial al celor două baze $\{|n_A\rangle\}_{A=1,2}$ şi, astfel, orice stare real-multifotonică $|\Phi\rangle$ se va putea reprezenta neambiguu prin relaţia

$$|\Phi\rangle = \sum_{n_1,n_2} C_{n_1,n_2}|n_1, n_2\rangle\,, \tag{3.258}$$

în care $|C_{n_1,n_2}|^2$ exprimă probabilitatea de a avea n_1 fotoni reali de tip 1 şi n_2 de tip 2. Dar, fizic, la modul concret în contextul acestei discuţii, ce înseamnă *fotoni reali de tip* $A = 1, 2$? Aici intervine caracterul extrem de sugestiv al formei (3.251) a elicităţii h. Pentru o stare cu un singur foton de tip 1 şi nici unul de al doilea tip, avem

$$|\Phi\rangle = |1, 0\rangle = |1_+\rangle \tag{3.259}$$

şi, cum

$$\langle 0, 1|C_2^\dagger C_2|1, 0\rangle = 0\,, \tag{3.260}$$

deoarece $n_2 = 0$ în (3.257), obţinem, din (3.251),

$$h_+ = \langle 1_+|C_1^\dagger C_1|1_+\rangle = \langle 0, 1|C_1^\dagger C_1|1, 0\rangle = \langle 0|0\rangle\langle 1|C_1^\dagger C_1|1\rangle\,, \tag{3.261}$$

adică, în mod clar,

$$h_+ = 1\,. \tag{3.262}$$

Aceasta înseamnă că un foton de tip 1 este, de fapt, un foton de elicitate pozitivă (de dreapta sau *dextrogir*), având spinul $s = 1$ aliniat direcţiei de propagare în sensul vectorului de undă $\vec{k}$. În mod cu totul analog, într-o stare

$$|\Phi\rangle = |0, 1\rangle = |1_-\rangle\,, \tag{3.263}$$

conţinând un singur foton de tip 2 (şi nici unul de tip 1), avem

$$\langle 1, 0|C_1^\dagger C_1|0, 1\rangle = 0 \tag{3.264}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi, astfel, tot din (3.251), rezultă

$$h_- = -\langle 1_-|C_2^\dagger C_2|1_-\rangle = -\langle 1,0|C_2^\dagger C_2|0,1\rangle = -\langle 1|C_2^\dagger C_2|1\rangle\langle 0|0\rangle\,, \tag{3.265}$$

adică

$$h_- = -1\,. \tag{3.266}$$

Deci un foton de tip 2 este de elicitate negativă (de stânga sau *levogir*), având spinul $s = 1$ în lungul direcţiei de propagare, dar în sens contrar vectorului de undă $\vec{k}$.

Pe scurt, am demonstrat, în formulare Lorentz-covariantă, că propagarea câmpului electromagnetic (cuantificat) se face exclusiv prin fotoni reali, care au numai două stări de elicitate $h_\pm = \pm 1$. Este important de observat (şi de reţinut) că starea de elicitate nulă, $h_0 = 0$, lipseşte. Dacă ar fi existat, atunci am fi avut $2s + 1 = 3$ stări de elicitate $(-1, 0, 1)$, ceea ce ar fi însemnat că fotonii au masă de repaus [3] şi se pot afla în stări cu spinul ortogonal pe direcţia vectorului de undă. Nici una din aceste proprietăţi *would be* (cum sunt ele definite de către teoreticieni) nu este confirmată experimental.

În fine, prin intermediul densităţilor spectrale (3.242) şi a relaţiilor (3.246), mai avem de calculat valorile medii $\langle\Psi|\vec{S}|\Psi\rangle$, $\langle\Psi|\underline{\vec{S}}|\Psi\rangle$ ale operatorilor 3-vectoriali axial şi, respectiv, polar, în stările fizice

$$|\Psi\rangle = |\Phi\rangle|\psi\rangle$$

ale câmpului. Pentru aceasta, ne va fi de un real folos următoarea propoziţie.

Propoziţie Într-o stare

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0} C_{n_0}|n\rangle\,,\ \text{cu}\ C_{00} = 1\,,$$

soluţie a condiţiei Fermi-Lorentz, cu

$$|n\rangle = \sum_{n_4=0}^{n} i^{n_4}\sqrt{C_n^{n_4}}\,|n - n_4\,,\, n_4\rangle\,,$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

drept stare cu $n = n_3 + n_4$ fotoni virtuali, valorile medii ale operatorilor c_3 , $c_3^\dagger$, c_4 , $c_4^\dagger$ sunt date de relaţiile

$$\begin{aligned} \langle\psi|c_3|\psi\rangle &= \mathcal{C}_{10} \\ \langle\psi|c_3^\dagger|\psi\rangle &= \bar{\mathcal{C}}_{10} \\ \langle\psi|c_4|\psi\rangle &= -\mathcal{C}_{10} \\ \langle\psi|c_4^\dagger|\psi\rangle &= -\bar{\mathcal{C}}_{10} . \end{aligned} \tag{3.267}$$

Demonstraţie Este suficient să arătăm că

$$\langle\psi|c_3|\psi\rangle = \mathcal{C}_{10} , \tag{3.268}$$

deoarece $\langle\psi|c_3^\dagger|\psi\rangle$ va rezulta din aceasta, prin conjugare hermitică, iar $\langle\psi|c_4|\psi\rangle$ şi conjugata ei se obţin direct, din media pe $|\psi\rangle$ a condiţiei Fermi-Lorentz, adică

$$\langle\psi|c_4|\psi\rangle = -\langle\psi|c_3|\psi\rangle \ , \ \langle\psi|c_4^\dagger|\psi\rangle = -\langle\psi|c_3^\dagger|\psi\rangle .$$

Avem

$$\langle\psi|c_3|\psi\rangle = \sum_{n'=0}\sum_{n=1} \bar{\mathcal{C}}_{n'0}\mathcal{C}_{n0} \sum_{n'_4=0}^{n'}\sum_{n_4=0}^{n-1} (-i)^{n'_4}(i)^{n_4}\sqrt{C_{n'}^{n'_4}C_n^{n_4}}$$
$$\langle n'_4 , n'-n'_4|c_3|n-n_4 , n_4\rangle \tag{3.269}$$

şi, cum

$$\langle n'_4 , n'-n'_4|c_3|n-n_4 , n_4\rangle = \sqrt{n-n_4}\,\langle n'_4 , n'-n'_4|n-n_4-1 , n_4\rangle ,$$

adică

$$\langle n'_4 , n'-n'_4|c_3|n-n_4 , n_4\rangle = \sqrt{n-n_4}\,(-1)^{n_4}\,\delta_{n'_4 n_4}\,\delta_{n'-n'_4 , n-1-n_4} , \tag{3.270}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

rezultă, prin înlocuire în (3.269) şi efectuarea sumării după n'_4 şi n',

$$\langle\psi|c_3|\psi\rangle = \sum_{n=1} \bar{C}_{n-1,0}\, C_{n,0} \sum_{n_4=0}^{n-1} (-1)^{n_4} \sqrt{(n-n_4)\, C_n^{n_4}\, C_{n-1}^{n_4}}\,. \tag{3.271}$$

Dar,

$$\sqrt{(n-n_4)\, C_n^{n_4}\, C_{n-1}^{n_4}} = \sqrt{n}\, C_{n-1}^{n_4} \tag{3.272}$$

şi, astfel, înlocuind (3.272) în (3.271) şi trecându-l pe n în $n+1$, obţinem

$$\langle\psi|c_3|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\, \bar{C}_{n,0}\, C_{n+1,0} \sum_{n_4=0}^{n} (-1)^{n_4}\, C_n^{n_4}\,. \tag{3.273}$$

Cum, însă, pentru $n \geq 1$ (din N) am văzut că avem

$$\sum_{n_4=0}^{n} (-1)^{n_4}\, C_n^{n_4} \equiv 0\,,$$

vom rămâne, din (3.273), numai cu contribuţia primului termen al sumei (cel cu $n = n_4 = 0$), adică

$$\langle\psi|c_3|\psi\rangle = \bar{C}_{0,0}\, C_{1,0} \tag{3.274}$$

şi, fiindcă $C_{0,0} = 1$, am demonstrat, practic, rezultatul (3.268) şi o dată cu el, restul rezultatelor din (3.267).

Pentru valoarea medie a părţii polare $\vec{S}$ a operatorului de spin, avem

$$\langle\Psi|\vec{S}|\Psi\rangle = \int d^3k\, \langle\Psi|\vec{s}(\vec{k})|\Psi\rangle\,, \tag{3.275}$$

cu

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\vec{s}(\vec{k})|\Psi\rangle &= -i\,\langle\Psi|\vec{a}^{\dagger}(\vec{k})a_4(\vec{k}) - a_4^{\dagger}(\vec{k})\vec{a}(\vec{k})|\Psi\rangle = \\ &= -i\,\langle\Psi|c_\mu^{\dagger}(\vec{k})c_4(\vec{k}) - c_4^{\dagger}(\vec{k})c_\mu(\vec{k})|\Psi\rangle\,\vec{e}_\mu \end{aligned} \tag{3.276}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

exprimat din (3.242.b) şi (3.246) în reperul $\{\vec{e}_A\}_{a=\overline{1,4}}$, adaptat vectorului de undă $\vec{k}$. Dezvoltând sumarea după $\mu = \overline{1,3}$, obţinem

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\underline{\vec{s}}(\vec{k})|\Psi\rangle &= -i\Big\{\langle\Psi|c_A^\dagger(\vec{k})c_4(\vec{k}) - c_4^\dagger(\vec{k})c_A(\vec{k})|\Psi\rangle\,\vec{e}_A + \\ &+ \langle\Psi|c_3^\dagger(\vec{k})c_4(\vec{k}) - c_4^\dagger(\vec{k})c_3(\vec{k})|\Psi\rangle\,\vec{e}_3\Big\}, \qquad (3.277)\end{aligned}$$

astfel încât, punând $|\Psi\rangle = |\Phi\rangle|\psi\rangle$ în ultimul termen, operatorii de anihilare-creare a fotonilor virtuali neacţionând asupra stărilor $|\Phi\rangle$ cu fotoni reali, rezultă

$$\langle\Psi|c_3^\dagger(\vec{k})c_4(\vec{k}) - c_4^\dagger(\vec{k})c_3(\vec{k})|\Psi\rangle = \langle\Phi|\Phi\rangle\langle\psi|c_3^\dagger(\vec{k})c_4(\vec{k}) - c_4^\dagger(\vec{k})c_3(\vec{k})|\psi\rangle\,. \qquad (3.278)$$

Dar, din cele două forme

$$\begin{aligned}(c_3 + c_4)|\psi\rangle &= 0\,,\\ \langle\psi|(c_3^\dagger + c_4^\dagger) &= 0\end{aligned}$$

ale condiţiei Fermi-Lorentz de selectare a stării fizice virtual-multifotonice $|\psi\rangle$, rezultă

$$\begin{aligned}\langle\psi|c_3^\dagger c_3|\psi\rangle + \langle\psi|c_3^\dagger c_4|\psi\rangle = 0 \;&\Rightarrow\; \langle\psi|c_3^\dagger c_4|\psi\rangle = -\langle\psi|c_3^\dagger c_3|\psi\rangle\\ \langle\psi|c_3^\dagger c_3|\psi\rangle + \langle\psi|c_4^\dagger c_3|\psi\rangle = 0 \;&\Rightarrow\; \langle\psi|c_4^\dagger c_3|\psi\rangle = -\langle\psi|c_3^\dagger c_3|\psi\rangle\,,\end{aligned}$$

deci, prin luarea diferenţei, obţinem

$$\langle\psi|c_3^\dagger c_4 - c_4^\dagger c_3|\psi\rangle \equiv 0\,, \qquad (3.279)$$

adică (pentru (3.278)) avem şi

$$\langle\Psi|c_3^\dagger(\vec{k})c_4(\vec{k}) - c_4^\dagger(\vec{k})c_3(\vec{k})|\Psi\rangle \equiv 0 \qquad (3.280)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi rămânem, din (3.277), numai cu partea transversală (vectorului de undă)

$$\langle\Psi|\underline{\vec{s}}(\vec{k})|\Psi\rangle = -i\,\langle\Psi|c_A^\dagger(\vec{k})c_4(\vec{k}) - c_4^\dagger(\vec{k})c_A(\vec{k})|\Psi\rangle\,\vec{e}_A\,. \qquad (3.281)$$

Datorită formei factorizate

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\Phi\rangle|\psi\rangle \\ \langle\Psi| &= \langle\psi|\langle\Phi| \end{aligned}$$

a stării fizice $|\Psi\rangle$ şi a dualei ei $\langle\Psi|$, expresia (3.281) devine

$$\begin{aligned} \langle\Psi|\underline{\vec{s}}(\vec{k})|\Psi\rangle &= -i\Big\{\langle\Phi|c_A^\dagger(\vec{k})|\Phi\rangle\langle\psi|c_4(\vec{k})|\psi\rangle - \\ &- \langle\psi|c_4^\dagger(\vec{k})|\psi\rangle\langle\Phi|c_A(\vec{k})|\Phi\rangle\Big\}\,\vec{e}_A\,, \qquad (3.282) \end{aligned}$$

astfel încât, utilizând rezultatele (3.267), obţinem

$$\langle\Psi|\underline{\vec{s}}(\vec{k})|\Psi\rangle = i\left\{C_{10}\langle\Phi|c_A^\dagger(\vec{k})|\Phi\rangle - \vec{C}_{10}\langle\Phi|c_A(\vec{k})|\Phi\rangle\right\}\vec{e}_A\,. \qquad (3.283)$$

Din forma simplă a transformărilor (3.250) este clar că valorile medii ale operatorilor $\left\{c_A\,,\,c_A^\dagger\right\}_{A=1,2}$ vor fi date de combinaţiile liniare ale mediilor operatorilor de anihilare-creare $\left\{C_A\,,\,C_A^\dagger\right\}_{A=1,2}$ a stărilor proprii $|\Phi\rangle = |n_1\,,\,n_2\rangle$, de elicitate definită $h = n_1 - n_2$, comune operatorilor de număr $C_1^\dagger C_1\,,\,C_2^\dagger C_2$. Cum, însă,

$$\begin{aligned} C_1|n_1\,,\,n_2\rangle &= \sqrt{n_1}\,|n_1-1\,,\,n_2\rangle \\ C_2|n_1\,,\,n_2\rangle &= \sqrt{n_2}\,|n_1\,,\,n_2-1\rangle \\ C_1^\dagger|n_1\,,\,n_2\rangle &= \sqrt{n_1+1}\,|n_1+1\,,\,n_2\rangle \\ C_2^\dagger|n_1\,,\,n_2\rangle &= \sqrt{n_2+1}\,|n_1\,,\,n_2+1\rangle\,, \qquad (3.284) \end{aligned}$$

BCU IASI / CONTROL UJ / UNIVERSITY LIBRARY

rezultă imediat, având în vedere şi caracterul ortonormal al stărilor $|n_1, n_2\rangle$,

$$\langle n_2', n_1'|n_1', n_2'\rangle = \delta_{n_1' n_1}\delta_{n_2' n_2},$$

că

$$\langle n_2, n_1|C_A|n_1, n_2\rangle = \langle n_2, n_1|C_A^\dagger|n_1, n_2\rangle = 0, \tag{3.285}$$

adică, prin medierea rotaţiei *null* (3.250),

$$\langle\Phi|c_A(\vec{k})|\Phi\rangle = \langle\Phi|c_A^\dagger(\vec{k})|\Phi\rangle = 0. \tag{3.286}$$

Obţinem, astfel,

$$\langle\Psi|\underline{\vec{s}}(\vec{k})|\Psi\rangle = 0, \tag{3.287}$$

deci, prin înlocuire în (3.275),

$$\langle\Psi|\underline{\vec{S}}|\Psi\rangle = 0, \tag{3.288}$$

rezultând inobservabilitatea părţii polare a operatorului de spin. În consecinţă, urmărind ce anume este observabil, accentul va cădea pe estimarea valorii medii

$$\langle\Psi|\vec{S}|\Psi\rangle = \int d^3k\,\langle\Psi|\vec{s}(\vec{k})|\Psi\rangle \tag{3.289}$$

a vector-operatorului axial $\vec{S}$. Utilizând expresia (3.242.a) a densităţii spectrale $\vec{s}(\vec{k})$ şi relaţia (3.246), avem

$$\langle\Psi|\vec{s}(\vec{k})|\Psi\rangle = -i\,\langle\Psi|\vec{a}^\dagger(\vec{k})\times\vec{a}(\vec{k})|\Psi\rangle = -i\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\langle\Psi|c_\alpha^\dagger(\vec{k})\,c_\beta(\vec{k})|\Psi\rangle\vec{e}_\mu, \tag{3.290}$$

ceea ce revine, prin descompunere în parte transversală (după $\vec{e}_A$) şi longitudinală (după $\vec{e}_3$), la forma

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\vec{s}(\vec{k})|\Psi\rangle = &- i\varepsilon_{AB3}\langle\Psi|c_B^\dagger(\vec{k})\,c_3(\vec{k}) - c_3^\dagger(\vec{k})c_B(\vec{k})|\Psi\rangle\vec{e}_A - \\ &- i\varepsilon_{3AB}\langle\Psi|c_A^\dagger(\vec{k})\,c_B(\vec{k})|\Psi\rangle\vec{e}_3.\end{aligned} \tag{3.291}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Anularea părţii transversale este evidentă, deoarece

$$\langle\Psi|c_B^\dagger(\vec{k})\,c_3(\vec{k}) - c_3^\dagger(\vec{k})c_B(\vec{k})|\Psi\rangle = \overset{(267)}{=} C_{10}\langle\Phi|c_B^\dagger(\vec{k})|\Phi\rangle - \overline{C}_{10}\langle\Phi|c_B(\vec{k})|\Phi\rangle \overset{(286)}{=} 0\,, \tag{3.292}$$

iar pentru cea longitudinală avem

$$\begin{aligned} -i\varepsilon_{3AB}\langle\Psi|c_A^\dagger(\vec{k})\,c_B(\vec{k})|\Psi\rangle &= -i\,\langle\Phi|c_1^\dagger(\vec{k})c_2(\vec{k}) - c_2^\dagger(\vec{k})c_1(\vec{k})|\Phi\rangle = \\ &= \langle\Phi|C_1^\dagger(\vec{k})C_1(\vec{k}) - C_2^\dagger(\vec{k})C_2(\vec{k})|\Phi\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.293}$$

datorită factorizării $|\Psi\rangle = |\Phi\rangle|\psi\rangle$, normei $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ şi diagonalizării introduse de rotaţia *null* (3.250). Cu acestea, expresia (3.291) devine

$$\langle\Psi|\vec{s}(\vec{k})|\Psi\rangle = \Big[\langle\Phi|C_1^\dagger(\vec{k})C_1(\vec{k})|\Phi\rangle - \langle\Phi|C_2^\dagger(\vec{k})C_2(\vec{k})|\Phi\rangle\Big]\,\vec{e}_3\,, \tag{3.294}$$

conducând, prin înlocuire în (3.289), la forma

$$\langle\vec{S}\rangle = \int d^3k\,\frac{\vec{k}}{\omega_{\vec{k}}}\,\Big[\mathcal{N}_1(\vec{k}) - \mathcal{N}_2(\vec{k})\Big]\,, \tag{3.295}$$

cu

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(\vec{k}) &= \langle\Psi|C_1^\dagger(\vec{k})C_1(\vec{k})|\Psi\rangle \\ \mathcal{N}_2(\vec{k}) &= \langle\Psi|C_2^\dagger(\vec{k})C_2(\vec{k})|\Psi\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.296}$$

a valorii medii $\langle\Psi|\vec{S}|\Psi\rangle$ a operatorului de spin al câmpului electromagnetic în cuantificare covariantă.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

H. Propagatorul fotonic Lorentz-covariant

Generalizând definiţia

$$\Delta_F(x,x') = i\,\overbrace{\phi(x)\phi}(x')$$

a propagatorului Feynman al câmpului scalar real la cazul câmpului electromagnetic, descris, în cuantificare covariantă, de 4-vector-operatorul hermitic $A(x)$, de componente $A_i(x)$ de forma (3.22), introducem propagatorul fotonic prin relaţia de definiţie

$$D_{ik}(x,x') = i\,\overbrace{A_i(x)A_k}(x')\,, \tag{3.297}$$

unde

$$\begin{aligned}\overbrace{A_i(x)A_k}(x') &= \langle 0|\mathrm{T}\,[A_i(x)A_k(x')]\,|0\rangle \doteq \\ &= \theta(t-t')\langle 0|A_i(x)A_k(x')|0\rangle + \theta(t'-t)\langle 0|A_k(x')A_i(x)|0\rangle\end{aligned} \tag{3.298}$$

reprezintă contracţia cronologică pe starea de vid. Cum partea de frecvenţe pozitive $\overset{(+)}{A}_l(x)$ a operatorului de câmp $A_l(x)$ anihilează la dreapta starea de vid, adică

$$\overset{(+)}{A}_l(x)|0\rangle = 0\,,$$

iar cea de frecvenţe negative $\overset{(-)}{A}_l(x)$ o anihilează la stânga, adică

$$\langle 0|\overset{(-)}{A}_l(x) = 0\,,$$

rezultă imediat, pentru cele două contracţii de vid din membrul drept

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

al relaţiei (3.298), expresiile

$$\text{a)}\ \langle 0|A_i(x)A_k(x')|0\rangle = \langle 0|\overset{(+)}{A}_i(x)\overset{(-)}{A}_k(x')|0\rangle = \int d^3k d^3k' \langle 0|a_i(\vec{k})a_k^\dagger(\vec{k}')|0\rangle f_{\vec{k}}(x)\bar{f}_{\vec{k}'}(x')$$

$$\text{b)}\ \langle 0|A_k(x')A_i(x)|0\rangle = \langle 0|\overset{(+)}{A}_k(x')\overset{(-)}{A}_i(x)|0\rangle = \int d^3k' d^3k \langle 0|a_k(\vec{k}')a_i^\dagger(\vec{k})|0\rangle f_{\vec{k}'}(x')\bar{f}_{\vec{k}}(x)\,. \tag{3.299}$$

Prin considerarea mediei pe vid a comutatorului

$$\left[a_i(\vec{k}),\, a_k^\dagger(\vec{k}')\right] = \eta_{ik}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')\,,$$

obţinem

$$\langle 0|a_i(\vec{k})a_k^\dagger(\vec{k}')|0\rangle = \eta_{ik}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}') = \langle 0|a_k(\vec{k}')a_i^\dagger(\vec{k})|0\rangle\,, \tag{3.300}$$

astfel încât, înlocuind în (3.299.a,b) şi integrând după k', avem

$$\text{a)}\ \langle 0|A_i(x)A_k(x')|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{ik(x-x')}}{2\omega_{\vec{k}}}\eta_{ik}\,,$$

$$\text{b)}\ \langle 0|A_k(x')A_i(x)|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ik(x-x')}}{2\omega_{\vec{k}}}\eta_{ik}\,, \tag{3.301}$$

unde 4-vectorul k are componentele *on-shell* $(\vec{k}, \omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|)$.

De aici încolo totul se simplifică deoarece, înlocuind expresiile (3.301) în contracţia cronologică (3.298), obţinem

$$\overbrace{A_i(x)A_k}(x') = \eta_{ik}\left[\theta(t-t')\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{ik(x-x')}}{2\omega_{\vec{k}}} + \theta(t'-t)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ik(x-x')}}{2\omega_{\vec{k}}}\right] \tag{3.302}$$

BCU IAŞI / CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

şi recunoaştem suma din paranteza pătrată ca fiind exact $-i\Delta_F^0(x,x')$, unde

$$\Delta_F^0(x,x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-x')}}{k^2 - i\varepsilon} \tag{3.303}$$

este propagatorul Feynman al scalarului real nemasiv.

Din (3.303), (3.302) şi (3.297), rezultă forma Lorentz-covariantă a propagatorului fotonic

$$D_{ik}(x,x') = \eta_{ik}\,\Delta_F^0(x,x') \tag{3.304}$$

şi imaginea sa Fourier,

$$D_{ik}(k) = \frac{\eta_{ik}}{k^2 - i\varepsilon}, \tag{3.305}$$

în spaţiul cuadriimpulsurilor $k = (\vec{k}, \omega)$ neconstrânse *on shell*.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Capitolul 6

CUANTIFICAREA CÂMPURILOR LIBERE PRIN METODA INTEGRALEI FUNCŢIONALE

6.1 Utilizarea metodei integralei de drum în cuantificarea câmpurilor scalare şi spinoriale libere

A. Conceptul de integrală de drum în Mecanica Cuantică

Metoda de cuantificare cu ajutorul integralei de drum (*path integral*) a fost dezvoltată de Feynman (1948), [22, 23, 24], ca o alternativă la

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

metoda cuantificării canonice. Utilizată cu succes în Mecanica Cuantică şi Electrodinamica Cuantică, ea s-a dovedit foarte eficientă în cuantificarea sistemelor cu constrângeri, cum ar fi, de exemplu, câmpurile de etalonare. Metoda oferă o imagine intuitivă a dinamicii câmpurilor libere şi în interacţiune, având la bază expresia amplitudinii de tranziţie a sistemului între toate stările permise, exprimată în funcţie de mărimi clasice. Deşi trecerea de la operatori la mărimi clasice simplifică mult manipularea expresiilor obţinute, totuşi, după cum vom vedea în cele ce urmează, aceasta se va face cu preţul introducerii unui tip special de integrală, infinit dimensională, care ne va furniza funcţiile Green conexe.

Pentru introducerea conceptului de integrală funcţională, vom considera cel mai simplu exemplu din Mecanica Cuantică nerelativistă, şi anume un sistem cuantic fără legături, cu un singur grad de libertate. Asociem coordonatei generalizate şi impulsului canonic conjugat, operatorii $\hat{q}$ şi, respectiv, $\hat{p}$, acţionând în spaţiul Hilbert de configuraţie. O stare $|\psi(t)\rangle$ a sistemului considerat este soluţia ecuaţiei Schrödinger dependentă de timp [32],

$$\hat{H}(\hat{p},\,\hat{q})\,|\psi(t)\rangle = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle\,, \tag{1.1}$$

unde $\hat{H}(\hat{p},\,\hat{q})$ este operatorul hamiltonian al sistemului. Deoarece operatorii $\hat{p}$ şi $\hat{q}$ nu comută, este necesară, în cazul în care ei se amestecă în expresia hamiltonianului, să păstrăm cu consecvenţă ordinea acţiunii lor în spaţiul Hilbert al stărilor. În cele ce urmează, convenim să scriem pe $\hat{q}$ la dreapta lui $\hat{p}$. Desigur, rezultatul obţinut va fi funcţie de convenţia de ordonare stabilită.

Introducem, în spaţiul Hilbert de configuraţie, baza continuă $\{|q\rangle\}$ formată din vectorii proprii ai operatorului de poziţie $\hat{q}$ în imagine Schrödinger, satisfăcând relaţiile uzuale de ortogonalitate şi închidere [32]

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q-q')\;;\;\int dq\,|q\rangle\langle q| = \mathcal{I}\,. \tag{1.2}$$

O stare cuantică generală $|\psi(t)\rangle$ se exprimă, atunci, ca

$$|\psi(t)\rangle = \int dq\, c(q,t)|q\rangle \tag{1.3}$$

şi poate fi obţinută dintr-o stare anterioară $|\psi(t_0)\rangle$, prin aplicarea operatorului $\hat{U}(t,t_0)$, numit *operator de evoluţie*, astfel :

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle\,. \tag{1.4}$$

Ecuaţia (1.1) pentru operatorul $\hat{U}(t,t_0)$, adică

$$\hat{H}\hat{U} = -\frac{\hbar}{i}\frac{d\hat{U}}{dt}\,, \tag{1.5}$$

ne dă expresia acestuia în funcţie de hamiltonianul sistemului, ca fiind

$$\hat{U}(t,t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right]\,. \tag{1.6}$$

Acest operator are proprietăţile evidente

$$\begin{aligned} &U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = \mathcal{I} \text{ (operator unitar)} \\ &U(t_0,t_0) = \mathcal{I}\,;\; U(t,t')U(t',t_0) = U(t,t_0) \end{aligned} \tag{1.7}$$

şi descrie evoluţia dinamică a sistemului considerat. Astfel, amplitudinea de tranziţie a sistemului între oricare două stări cuantice ale sale, $|q;t\rangle$ şi $|q';t'\rangle$, exprimate în imagine Heisenberg prin

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad |q;t\rangle = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right]|q\rangle \\ &\text{b)}\quad |q';t'\rangle = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\hat{H}t'\right]|q'\rangle \end{aligned} \tag{1.8}$$

în raport cu "stările Schrödinger" $|q\rangle$, $|q'\rangle$ (la momentele t, t'), este dată, concret, de calculul elementului de matrice

$$\langle q';t'|q;t\rangle \equiv \langle q'|\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\right]|q\rangle\,. \tag{1.9}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În cele ce urmează, vom arăta că elementul matricei de tranziţie (1.9) poate fi exprimat ca o integrală a lui $\exp\left[\frac{i}{\hbar}S\right]$, în spaţiul funcţiilor $q(t)$,

$$S(q) = \int_{t_0}^{t'} L(q,\dot{q})\,dt \ , \text{ sau } S(p,q) = \int_{t_0}^{t'} (p\dot{q} - H(p,q))\,dt \ , \quad (1.10)$$

unde S este acţiunea clasică a sistemului. Astfel, dacă din punct de vedere clasic ($\hbar \to 0$), extremul acţiunii S determină o traiectorie unică în planul fazelor $\{(p(t), q(t))\}$, ce uneşte punctele $(p(t_0), q(t_0))$ şi $(p(t'), q(t'))$, în aproximaţia semiclasică, extremul acţiunii ne va da traiectoria cea mai probabilă, celelalte traiectorii obţinându-se prin adăugarea unei cantităţi ΔS la partea clasică a acţiunii. Aşadar, din punct de vedere cuantic, noţiunea de traiectorie unic determinată îşi pierde sensul, sistemul putând avea la un moment intermediar $t_r \in (t_0\,,\, t')$, diferite valori ale coordonatei, cu diferite probabilităţi. Aceasta impune sumarea contribuţiilor după toate traiectoriile din spaţiul coordonatelor, ce unesc între ele punctele $q(t_0)$ şi $q(t')$. Pentru fiecare din aceste traiectorii, calculul expresiei $\exp\left[\frac{i}{\hbar}S\right]$ se va face împărţind, mai întâi, intervalul temporal $[t_0, t']$ în N părţi egale

$$\Delta\tau = t_{r+1} - t_r = \frac{t' - t_0}{N} \ , \ r = 0, 1, \ldots, N-1 \ ; \ t_N = t' \ ,$$

în care $q_{r+1} = q(t_{r+1})$, $q_r = q(t_r)$, iar $p \in [p_r\,,\, p_{r+1})$ este constant şi egal cu p_r. Amplitudinea de tranziţie între cele două stări, de-a lungul unei traiectorii arbitrare, va fi

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}S\right] = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{r=0}^{N-1}\left[p_r\frac{\Delta q_r}{\Delta\tau} - H(p_r,q_r)\right]\Delta\tau\right\} . \quad (1.11)$$

În continuare vom calcula elementul matriceal (1.9) pentru un şir de tranziţii succesive între stările $|q_{r+1}\rangle$ şi $|q_r\rangle$, după care vom integra

după q_r în fiecare interval temporal $\Delta\tau$. Astfel, utilizând relaţia de închidere din (1.2), vom scrie (1.9) sub forma

$$\langle q'| \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t_0)\right]|q_0\rangle =$$
$$= \int dq_1 \dots dq_{N-1} \langle q'| \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta\tau\right]|q_{N-1}\rangle$$
$$\langle q_{N-1}| \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta\tau\right]|q_{N-2}\rangle \dots \langle q_1| \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta\tau\right]|q_0\rangle \quad (1.12)$$

şi ne vom concentra asupra unei tranziţii elementare arbitrare din membrul drept. Pentru un $\Delta\tau$ suficient de mic, dezvoltăm exponenţiala în serie Taylor şi, utilizând convenţia din Teoria Cuantică a Câmpurilor, $\hbar = 1$, vom avea

$$\langle q_{r+1}| \exp\left[-i\hat{H}(\hat{p},\hat{q})\Delta\tau\right]|q_r\rangle \approx \langle q_{r+1}|\left[1 - i\hat{H}(\hat{p},\hat{q})\Delta\tau\right]|q_r\rangle +$$
$$+ \mathcal{O}(\Delta\tau^2)\,. \quad (1.13)$$

În efectuarea calculelor trebuie să ţinem cont de convenţia de ordonare a operatorilor $\hat{p}$ şi $\hat{q}$ şi de relaţiile ce exprimă trecerea de la reprezentarea de coordonate la cea de impuls, adică

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[ipq]\,,$$
$$\langle p|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-ipq]\,. \quad (1.14)$$

Să considerăm, pentru început, operatorul hamiltonian pătratic în impulsuri, de tipul uzual

$$\hat{H}(\hat{p},\hat{q}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})\,, \quad (1.15)$$

în care nu avem probleme de ordonare a operatorilor $\hat{p}$ şi $\hat{q}$, aceştia neamestecându-se între ei. În plus, dacă $V(\hat{q})$ este tot o funcţie pătratică,

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

atunci se va obţine o integrală de tip gaussian. Din acest motiv intercalăm câteva rezultate ale calculului integral. Se ştie că

$$\text{a)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}ax^2 + bx\right] = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left[\frac{b^2}{2a}\right] . \tag{1.16}$$

Acest rezultat exact poate fi generalizat pentru cazul a n variabile reale

$$\text{b)} \quad \int \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi}} \cdots \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} x_r A_{rs} x_s\right] = (\det A)^{-1/2} ,$$

cât şi pentru cel cu n variabile complexe, $z_r = x_r + iy_r$,

$$\text{c)} \quad \int \frac{dz_1}{\sqrt{\pi}} \cdots \frac{dz_n}{\sqrt{\pi}} \frac{dz_1^*}{\sqrt{\pi}} \cdots \frac{dz_n^*}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-z_r^* A_{rs} z_s\right] = (\det A)^{-1} .$$

Relaţia (1.16.b) poate fi justificată imediat, dacă vom considera pe A_{rs} ca fiind elementele unei matrice $(n \times n)$ care, cu ajutorul matricei unitare U, poate fi adusă la forma diagonală

$$(B) = (U^\dagger)(A)(U) , \quad \text{cu} \quad B_{rr} = U_{rs}^\dagger A_{sp} U_{pr} .$$

Efectuând schimbarea de variabilă

$$y_r = U_{rs} x_s ,$$

putem separa variabilele în (1.16.b) şi avem

$$\int \frac{dy_1}{\sqrt{2\pi}} \cdots \frac{dy_n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} y_r B_{rr} y_r\right] =$$

$$= \prod_{r=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy_r}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} y_r B_{rr} y_r\right] =$$

$$= \prod_{r=1}^{n} (B_{rr})^{-1/2} = (\det B)^{-1/2} = (\det A)^{-1/2} .$$

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Revenim acum la calculul elementului matriceal din (1.13)

$$\langle q_{r+1}|\exp\left[-i\hat{H}(\hat{p},\hat{q})\Delta\tau\right]|q_r\rangle \approx \langle q_{r+1}|q_r\rangle - i\langle q_{r+1}|\hat{H}(\hat{p},\hat{q})\Delta\tau|q_r\rangle + \\ + \mathcal{O}(\Delta\tau^2)$$

şi ne concentrăm asupra termenului $\langle q_{r+1}|\hat{H}(\hat{p},\hat{q})|q_r\rangle$, pentru hamiltonianul (1.15). Obţinem

$$\langle q_{r+1}|\left[\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\hat{q})\right]|q_r\rangle = \langle q_{r+1}|\frac{\hat{p}^2}{2m}|q_r\rangle + \langle q_{r+1}|\hat{V}(\hat{q})|q_r\rangle =$$

$$= \int dp_{r+1}dp_r\,\langle q_{r+1}|p_{r+1}\rangle\langle p_{r+1}|\frac{\hat{p}^2}{2m}|p_r\rangle\langle p_r|q_r\rangle +$$

$$+V\left(\frac{q_{r+1}+q_r}{2}\right)\delta(q_{r+1}-q_r) =$$

$$= \int\frac{dp_{r+1}}{2\pi}\left\{\frac{p_{r+1}^2}{2m}\exp\left[ip_{r+1}(q_{r+1}-q_r)\right] + \right.$$

$$\left.+V\left(\frac{q_{r+1}+q_r}{2}\right)\exp\left[ip_{r+1}(q_{r+1}-q_r)\right]\right\},$$

adică

$$\langle q_{r+1}|\hat{H}(\hat{p},\hat{q})|q_r\rangle =$$

$$= \int\frac{dp_{r+1}}{2\pi}\left\{\frac{p_{r+1}^2}{2m}+V\left(\frac{q_{r+1}+q_r}{2}\right)\right\}\exp\left[ip_{r+1}(q_{r+1}-q_r)\right], \quad (1.17)$$

ceea ce ne permite să aducem expresia (1.13) la forma convenabilă

$$\langle q_{r+1}|\exp\left[-i\hat{H}(\hat{p},\hat{q})\Delta\tau\right]|q_r\rangle =$$

$$= \int\frac{dp_{r+1}}{2\pi}\exp\left[ip_{r+1}(q_{r+1}-q_r)\right]\exp\left[-iH(p_r,q_r)\Delta\tau\right], \quad (1.18)$$

în care operatorilor din expresia iniţială a amplitudinii de tranziţie le-au luat locul mărimile clasice.

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Vom demonstra în continuare că formula (1.18) rămâne valabilă şi pentru un hamiltonian mai general, de tipul $\sum_{n=0} a_n(\hat{q})\hat{p}^n$. Într-adevăr, pentru termenul generic al sumei, avem

$$\begin{aligned}
&\langle q_{r+1}|a_n(\hat{q})\,\hat{p}^n|q_r\rangle = a_n(q_{r+1})\langle q_{r+1}|\,\hat{p}^n\,|q_r\rangle = \\
&= a_n(q_{r+1})\int dp_{r+1}\langle q_{r+1}|\,\hat{p}^n\,|p_{r+1}\rangle\langle p_{r+1}|q_r\rangle = \\
&= a_n(q_{r+1})\int \frac{dp_{r+1}}{2\pi}\,p_{r+1}^n \exp\left[i\,p_{r+1}\,(q_{r+1}-q_r)\right] = \\
&= \int \frac{dp_{r+1}}{2\pi}\,a_n(q_{r+1})p_{r+1}^n \exp\left[i\,p_{r+1}\,(q_{r+1}-q_r)\right],
\end{aligned}$$

de unde, prin sumare după n, rezultă expresia

$$\langle q_{r+1}|\hat{H}(\hat{p},\hat{q})|q_r\rangle = \int \frac{dp_{r+1}}{2\pi}\,H(q_{r+1},p_{r+1})\,\exp\left[i\,p_{r+1}\,(q_{r+1}-q_r)\right]$$

care generalizează relaţia clasică nerelativistă (1.17).

Revenind la hamiltonianul (1.15), să observăm că integrala după impuls în (1.18) este de tip gaussian şi conduce, prin aplicarea lui (16.a), în care $a = i\frac{\Delta\tau}{m}$ şi $b = i(q_{r+1} - q_r)$, la rezultatul

$$\begin{aligned}
&\langle q_{r+1}|\exp\left[-i\,\hat{H}(\hat{p},\hat{q})\Delta\tau\right]|q_r\rangle = \\
&= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\Delta\tau}}\exp\left[-\frac{m}{2i\Delta\tau}\,(q_{r+1}-q_r)^2 - iV\left(\frac{q_{r+1}+q_r}{2}\right)\Delta\tau\right].
\end{aligned} \tag{1.19}$$

În sfârşit, elementul matricei de tranziţie a sistemului cuantic monodimensional, între stările $|q_0\rangle$ şi $|q'\rangle$, se obţine înlocuind pe (1.18) în (1.12)

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

şi trecând la limită pentru $N \to \infty$. Astfel,

$$\begin{aligned}
&\langle q'; t' | q_0; t_0 \rangle = \\
&= \lim_{N\to\infty} \int \prod_{r=1}^{N-1} dq_r \prod_{r=1}^{N} \frac{dp_r}{2\pi} \times \\
&\times \exp\left\{ i \sum_{r=1}^{N} \left[p_r \frac{q_r - q_{r-1}}{\Delta\tau} - H(p_r, q_r) \right] \Delta\tau \right\} \equiv \\
&\equiv \int \frac{[dq][dp]}{2\pi} \exp\left\{ i \int_{t_0}^{t'} [p\dot{q} - H(p,q)]\, dt \right\}, \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

unde integrala infinit dimensională a primit denumirea de *integrală funcţională* sau *integrală de drum*, iar expresia $\frac{[dq][dp]}{2\pi}$, subliniind faptul că integrarea se efectuează după toate traiectoriile posibile din spaţiul fazelor, se numeşte *măsură de integrare*.

Ţinând seama de (1.19), rezultatul (1.20) poate fi pus în forma mult mai sugestivă

$$\langle q'; t' | q_0; t_0 \rangle = \mathcal{N} \int [dq] \exp\left[i \int_{t_0}^{t'} L(q\dot{q})\, dt \right] = \mathcal{N} \int [dq] \exp[iS], \qquad (1.21)$$

unde integrala după impulsuri a fost inclusă în factorul $\mathcal{N}$ de normare.

În cazul unui sistem cuantic fără legături, cu n grade de libertate cărora li se asociază coordonatele generalizate $\{q_k\}_{k=\overline{1,n}}$ şi impulsurile canonic conjugate $\{p_k\}_{k=\overline{1,n}}$, elementul matricei de tranziţie va fi dat de integrala funcţională a acţiunii clasice,

$$\begin{aligned}
&\langle q_1'' \dots q_n''; t'' | q_1' \dots q_n'; t' \rangle = \\
&= \int \prod_{k=1}^{n} \frac{[dq_k][dp_k]}{2\pi} \exp\left\{ i \int_{t'}^{t''} \left[\sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - H(p_k, q_k) \right] \Delta\tau \right\} = \\
&= \int \prod_{k=1}^{n} \frac{[dq_k][dp_k]}{2\pi} \exp\left[iS(t'', t') \right]. \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

După cum se ştie din teoria perturbaţiilor în sisteme cuantice, există acolo o ipoteză, bine verificată experimental, numită *aproximaţia adiabatică*. În acord cu aceasta, "perturbaţia durează mult mai puţin decât sistemul", adică atât în trecutul absolut $t' \to -\infty$, cât şi în viitorul absolut $t'' \to \infty$, stările iniţiale şi respectiv finale ale acestuia sunt neperturbate, adică "libere". Prin urmare, în ceea ce priveşte interpretarea probabilistică a Mecanicii Cuantice, exact această amplitudine de tranziţie

$$\langle fn|in\rangle = \int \prod_{k=1}^{n} \frac{[dq_k][dp_k]}{2\pi} \exp\left[iS(\infty, -\infty)\right] ,$$

între două stări libere (asimptotic, la $t = \mp\infty$),-

$$|in\rangle = |q_1' \dots q_n'; -\infty\rangle \ , \ |fn\rangle = |q_1'' \dots q_n''; \infty\rangle \ ,$$

ale sistemului — una iniţială, cealaltă finală — va prezenta un interes deosebit, conducând la racordarea semantică a formalismului dezvoltat de Feynman la mai bine cunoscutul (practic, tradiţionalul) formalism operatorial.

De asemenea, inspectând rezultatul (1.19), observăm că se impune schimbarea de variabilă $\tau = it$, pentru care integrandul din (1.21) devine $-\int d\tau \left[\frac{m}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)\right]$, asigurând astfel convergenţa integralelor de drum. Din acest motiv, se afirmă că formalismul integralei funcţionale utilizat în Teoria Cuantică a Câmpurilor este bine definit în spaţiul euclidian complex, mărimile din spaţiul real putând fi obţinute prin prelungire analitică.

Pe baza acestor aspecte şi modelând acţiunea sursei perturbatoare prin câmpul extern $J(x)$, putem exprima în spaţiul euclidian amplitudinea de tranziţie a sistemului (fără legături, cu n grade de libertate)

de pe − pe starea $|0\rangle_J$ de energie minimă, în prezenţa sursei, ca fiind

$$\langle 0|0\rangle_J = \lim_{\substack{t''\to -i\infty \\ t'\to i\infty}} \int \prod_{k=1}^{n} \frac{[dq_k][dp_k]}{2\pi} \times$$
$$\times \exp\left\{\int_{it'}^{it''}\left[\sum_{k=1}^{n}(p_k\dot{q}_k - H(p_k,q_k)) + \sum_{k=1}^{n} q_k J_k\right] d\tau\right\},$$

cu $\dot{q}_k = i\frac{dq_k}{d\tau}$, adică, integrând după $\{p_k\}_{k=\overline{1,n}}$, analog felului în care am trecut de la (1.20) la (1.21), rezultă expresia

$$\langle 0|0\rangle_J =$$
$$= \mathcal{N} \lim_{\substack{t''\to -i\infty \\ t'\to i\infty}} \int \prod_{k=1}^{n}[dq_k] \exp\left\{\int_{it'}^{it''}\left[L(q_k,\dot{q}_k) + \sum_{k=1}^{n} q_k J_k\right] d\tau\right\}. \tag{1.23}$$

B. Câmpuri cuantice libere

În continuare, vom generaliza acest rezultat la cazul câmpurilor libere, considerate ca sisteme cu un număr infinit de grade de libertate, a căror stare de energie minimă, $|0\rangle$, poartă numele de *stare de vid*. Astfel, pentru câmpul scalar $\phi(x)$, amplitudinea unei *tranziţii vid-vid*, în prezenţa sursei externe $J(x)$, poate fi obţinută imediat, din (1.23), prin efectuarea înlocuirilor:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{[dq_k][dp_k]}{2\pi} \to [d\phi(x)][d\pi(x)]$$
$$\int L(q_k,\dot{q}_k)\,dt \to \int d^4x\,\mathcal{L}(\phi,\partial_i\phi)$$
$$\int H(q_k,p_k)\,dt \to \int d^4x\,\mathcal{H}(\phi,\partial_i\phi),\ i=\overline{1,4}$$

cu notaţia $d^4x = d^3x\,dt$, unde $\mathcal{L}(\phi,\partial_i\phi)$ şi $\mathcal{H}(\phi,\partial_i\phi)$ sunt densităţile de lagrangeian şi, respectiv, de hamiltonian, iar $\pi(x)$ este densitatea de

impuls. Astfel, (1.23) devine acum

$$\langle 0, out|0, in\rangle = \\ = \int [d\phi][d\pi] \exp\left\{i \int d^4x \left[\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{H}(\pi, \phi) + J(x)\phi(x)\right]\right\}, \tag{1.24}$$

iar (1.21) se exprimă în funcţie de acţiunea clasică a câmpului liber S_0, la care se adaugă

$$\Delta S = \int d^4x\, J(x)\phi(x),$$

sub forma

$$Z[J] = \int [d\phi] \exp\left\{i\left[S_0(\phi) + \int d^4x\, J(x)\phi(x)\right]\right\}. \tag{1.25}$$

În (1.24), am notat cu $|0, in\rangle$ starea iniţială de vid şi cu $|0, out\rangle$ starea finală de vid. Integrala din (1.25) este simbolică, ea putând fi privită ca limita unei integrale multiple,

$$\int [d\phi] = \lim \prod_x \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi(x),$$

după variabilele $\phi(x_r)$ reprezentând, fiecare, valoarea câmpului ϕ în centrul x_r al hipercubului elementar r din laticea (reţeaua) de aproximare discretă a Universului M_4. Funcţionala $Z[J]$, exprimând amplitudinea de tranziţie între două stări de vid în prezenţa sursei $J(x)$, permite definirea unei mărimi deosebit de importante, anume

$$W[J] = \ln Z[J], \tag{1.26}$$

denumită *generatoarea funcţională a funcţiilor Green conexe*

$$G^p(x_1 \ldots x_p) = \langle 0|\mathrm{T}\left(\phi(x_1) \ldots \phi(x_p)\right)|0\rangle_c = \\ = (i)^p \left.\frac{\delta^p W[J]}{\delta J(x_1) \ldots \delta J(x_p)}\right|_{J=0}. \tag{1.27}$$

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

Acestea generalizează funcţia Green cauzală $G_F(x_1, x_2)$ (din Capitolul 3) la cazul "conectării" a p evenimente în spaţiu-timpul minkowskian.

Din motivele prezentate anterior, efectuarea calculelor se va face în spaţiul euclidian $(\bar{x}^i)_{i=\overline{1,4}} = (x^\mu, \tau)_{\mu=\overline{1,3}}$, trecerea la spaţiul real $(x^i)_{i=\overline{1,4}} = (x^\mu, t)_{\mu=\overline{1,3}}$ realizându-se printr-o prelungire analitică a rezultatelor obţinute. Această procedură va fi exemplificată pentru cazul cuantificării funcţionale a câmpului scalar real. Ulterior, vom lucra direct în spaţiul real, subînţelegând, însă, că rezultatele sunt prelungirea analitică a celor din spaţiul euclidian.

Prin efectuarea rotaţiei $t \to -i\tau$, funcţionalele $Z[J]$ şi $W[J]$ vor trece din spaţiul real în spaţiul euclidian, adică

$$Z_E[J] = \int [d\phi] \exp\left\{S_0[\phi] + \int d^4\bar{x}\, J(\bar{x})\phi(\bar{x})\right\} = \\ = \int [d\phi] \exp\{S_E[\phi]\} \tag{1.28}$$

şi

$$W_E[J] = \ln Z_E[J]\,. \tag{1.29}$$

Derivatele funcţionale ale lui $W_E[J]$ au următoarele semnificaţii deosebit de importante:

- *Valoarea de aşteptare* (*expectation value*) $\phi_c(\bar{x}|J)$ a lui $\phi(\bar{x})$ în sistemul perturbat este dată de prima derivată funcţională a lui $W_E[J]$, adică

$$\phi_c(\bar{x}|J) = \left.\frac{\delta W_E[J]}{\delta J(\bar{x})}\right|_{J=0} = \left.\frac{\delta \ln Z_E[J]}{\delta J(\bar{x})}\right|_{J=0} = \left.\frac{1}{Z_E}\frac{\delta Z_E[J]}{\delta J(\bar{x})}\right|_{J=0}. \tag{1.30}$$

În relaţia (1.30) se utilizează următoarea regulă de derivare funcţională

$$\frac{\delta J(y)}{\delta J(x)} = \frac{\delta}{\delta J(x)} \int J(x)\, \delta^4(x-y)\, d^4x = \delta^4(x-y)\,. \tag{1.31}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- A doua derivată a lui $W_E[J]$ ne dă *propagatorul particulei libere*

$$\langle 0|\mathrm{T}\,(\phi(\bar{x})\phi(\bar{y}))\,|0\rangle = G_E(\bar{x},\bar{y}) = \left.\frac{\delta^2 W_E[J]}{\delta J(\bar{x})\delta J(\bar{y})}\right|_{J=0}, \tag{1.32}$$

pentru calculul căruia integrala funcţională din (1.28) se aproximează cu o integrală gaussiană infinit dimensională, exact calculabilă, punând în evidenţă un operator al cărui invers, dacă există, coincide cu propagatorul particulei libere.

C. Câmpul scalar real

În cele ce urmează, vom exemplifica procedeul de calcul descris mai sus, la cazul cuantificării câmpului scalar real, $\phi(\bar{x})$, de masă m, a cărui acţiune în spaţiul euclidian

$$S_E[\phi] = \int d^4\bar{x}\,[\mathcal{L}_0(\bar{x}) + J(\bar{x})\phi(\bar{x})] \tag{1.33}$$

conţine densitatea de lagrangeian

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 + m^2\phi^2\right]. \tag{1.34}$$

Efectuând în (1.33) integrarea prin părţi a termenului cinetic $|\partial\phi|^2$ din (1.34) şi introducând notaţia

$$A(\bar{x}) = -\Box_E + m^2 = -\bar{\partial}_i\bar{\partial}_i + m^2\,, \tag{1.35}$$

aducem expresia acţiunii la forma gaussiană

$$S_E[\phi] = \int d^4\bar{x}\,\left[-\frac{1}{2}\phi(\bar{x})A(\bar{x})\phi(\bar{x}) + J(\bar{x})\phi(\bar{x})\right] \tag{1.36}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sau, utilizând generalizarea cuadridimensională a funcţiei Dirac, la

$$S_E[\phi] = \int d^4\bar{x}d^4\bar{y}\left[-\frac{1}{2}\phi(\bar{x})A(\bar{x})\delta^4(\bar{x}-\bar{y})\phi(\bar{y})\right] + \int d^4\bar{x}\,J(\bar{x})\phi(\bar{x}) \equiv$$
$$\equiv \int d^4\bar{x}d^4\bar{y}\left[-\frac{1}{2}\phi(\bar{x})K(\bar{x},\bar{y})\phi(\bar{y})\right] + \int d^4\bar{y}\,J(\bar{y})\phi(\bar{y})\,. \quad (1.37)$$

Operatorul simetric

$$K(\bar{x},\bar{y}) = \delta^4(\bar{x}-\bar{y})A(\bar{x}) \quad (1.38)$$

poate fi privit ca o matrice abstractă, cu indici continui, având proprietăţile:

$$\int d^4\bar{y}\,K^{1/2}(\bar{x},\bar{y})\,K^{1/2}(\bar{y},\bar{z}) = K(\bar{x},\bar{z}) = \delta^4(\bar{x}-\bar{z})A(\bar{x})$$
$$\int d^4\bar{y}\,K^{-1/2}(\bar{x},\bar{y})\,K^{1/2}(\bar{y},\bar{z}) = \delta^4(\bar{x}-\bar{z}). \quad (1.39)$$

Transformându-l pe (1.28) într-o integrală gaussiană ce poate fi calculată cu ajutorul rezultatelor (16.a, b), obţinem

$$Z_E[J] = \int d\phi_1 \ldots d\phi_N \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{r,s}\phi_r K_{rs}\phi_s + \sum_r J_r\phi_r\right\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\det K}} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{r,s} J_r\,(K^{-1})_{rs}\,J_s\right\} \sim$$
$$\sim \exp\left\{\frac{1}{2}\int d^4\bar{x}\,d^4\bar{y}\,J(\bar{x})K^{-1}(\bar{x},\bar{y})J(\bar{y})\right\}. \quad (1.40)$$

În sfârşit, generatoarea funcţională $W_E[J]$, calculată cu (1.29), ne va da, utilizând definiţia (1.32), propagatorul câmpului scalar liber în spaţiul euclidian,

$$\Delta_E(\bar{x},\bar{y}) = \left.\frac{\delta^2 W_E[J]}{\delta J(\bar{x})\delta J(\bar{y})}\right|_{J=0} = K^{-1}(\bar{x},\bar{y})\,. \quad (1.41)$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Observăm că funcţia Green $\Delta_E(\bar{x},\bar{y})$ coincide cu inversul operatorului $K(\bar{x},\bar{y})$, adică

$$\int d^4\bar{y}\, K(\bar{x},\bar{y})\Delta_E(\bar{y},\bar{z}) = \delta^4(\bar{x}-\bar{z})\,, \tag{1.42}$$

având, în spaţiul euclidian al 4-impulsurilor $(\bar{k}^i)_{i=\overline{1,4}} = (k^\mu, ik^0)_{\mu=\overline{1,3}}$, expresia

$$\Delta_E(\bar{x},\bar{y}) = \int \frac{d^4\bar{k}}{(2\pi)^4} \frac{\exp\left[i\bar{k}\,(\bar{x}-\bar{y})\right]}{\bar{k}^2+m^2}\,, \tag{1.43}$$

de unde, prin prelungirea analitică a lui $(\bar{x}^i)$ şi $(\bar{k}^i)$ la (x^i) şi (k^i), se ajunge la relaţia bine cunoscută din Capitolul 3,

$$i^2\Delta_E(\bar{x},\bar{y}) \to i\Delta(x,y) = i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\exp\left[ik\,(x-y)\right]}{k^2+m^2-i\varepsilon}\,. \tag{1.44}$$

În cazul general al N câmpuri scalare, ce interacţionează prin potenţialul $V_0(\phi_r)_{r=\overline{1,N}}$, acţiunea corespunzătoare, în spaţiul euclidian, este

$$S_0[\phi] = \int d^4\bar{x} \left\{ -\frac{1}{2}\left[\sum_r \left(\frac{\partial\phi_r}{\partial\bar{x}^i}\right)^2 + V_0(\phi_r)\right] + \sum_s J_s(\bar{x})\phi_s(\bar{x})\right\}, \tag{1.45}$$

unde indicele "0" indică faptul că ne-am oprit, în expresia potenţialului $V_0(\phi_s)$, doar la termenii pătratici în ϕ_s. După efectuarea integrării prin părţi, este uşor de pus în evidenţă operatorul simetric

$$K(\bar{x},\bar{y})_{rs} = \delta^4(\bar{x}-\bar{y})\left[-\delta_{rs}\Box_E + m_{rs}^2\right]\,, \tag{1.46}$$

conţinând matricea maselor, cu elementele

$$m_{rs}^2 = \frac{\partial^2 V_0}{\partial\phi_r\partial\phi_s}\,, \tag{1.47}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

al cărui invers, definit prin

$$\int d^4\bar{y}\, K(\bar{x},\bar{y})_{rs}\, \Delta_E(\bar{y},\bar{z})_{sp} = \delta_{rp}\, \delta^4(\bar{x}-\bar{z}) \,, \tag{1.48}$$

ne va da funcţia Green corespunzătoare, cu transformata Fourier în spaţiul real

$$i\Delta(x,y)_{rs} = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\exp\left[ik(x-y)\right]}{k^2 + m_{rs}^2 - i\varepsilon} \,. \tag{1.49}$$

Ajunşi aici, se impun câteva precizări asupra determinantului funcţional

$$\det K = \det\left(-\bar{\partial}_i \bar{\partial}_i + m^2\right), \tag{1.50}$$

pe care îl putem transforma, utilizând identitatea [55]

$$\det K = \exp\left[\mathrm{Tr}\, \ln K\right] \,, \tag{1.51}$$

într-un factor exponenţial. Astfel, expresia (1.40) devine

$$Z_E[J] = \exp\left\{\frac{1}{2}\int d^4\bar{x}\, d^4\bar{y}\, J(\bar{x}) K^{-1}(\bar{x},\bar{y}) J(\bar{y}) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, \ln K\right\} \,, \tag{1.52}$$

unde primul termen de la exponent ne va furniza funcţia Green clasică, iar termenii următori, fiind o serie asimptotică în $\hbar$, vor exprima corecţii la aceasta.

Practic, determinantul unui operator cu valori proprii reale pozitive şi satisfăcând ecuaţia uzuală

$$\hat{A}|a_n\rangle = a_n\, |a_n\rangle \,,$$

trebuie înţeles ca produsul valorilor sale proprii discrete

$$\det A = \prod_n a_n \,. \tag{1.53}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Construind funcţia Riemann asociată operatorului $\hat{A}$ [55]

$$\xi_A(s) = \sum_n \frac{1}{a_n^s} \tag{1.54}$$

se observă că

$$\left.\frac{d\xi_A(s)}{ds}\right|_{s=0} = -\sum_n \log a_n e^{-sa_n}\Big|_{s=0} = -\log(\prod_n a_n) ,$$

adică

$$\det A = \exp\left[-\xi_A'(0)\right] . \tag{1.55}$$

ξ_A poate fi exprimată, în general, prin

$$\xi_A(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \int dx G(x, x, \tau) ,$$
$$\text{cu } G(x, y, \tau = 0) = \delta(x - y) , \tag{1.56}$$

adică este integrala unei funcţii $G(x, y, \tau)$, denumită *funcţie termică* (*heat function*), dat fiind că satisface ecuaţia diferenţială a căldurii (*heat equation*)

$$\hat{A} G(\bar{x}, \bar{y}, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} G(\bar{x}, \bar{y}, \tau) . \tag{1.57}$$

În cazul operatorului din (1.50), această ecuaţie devine

$$\left(-\bar{\partial}_i \bar{\partial}_i + m^2\right) G(\bar{x}, \bar{y}, \tau) = -\frac{\partial G(\bar{x}, \bar{y}, \tau)}{\partial \tau} \tag{1.58}$$

şi admite soluţia

$$G(\bar{x}, \bar{y}, \tau) = \frac{\mu^4}{16\pi^2\tau^2} \exp\left[\frac{\mu^2(\bar{x} - \bar{y})^2}{4\tau}\right] \exp\left[-\frac{m^2\tau}{\mu^2}\right] , \tag{1.59}$$

unde μ este un factor arbitrar de dimensiunea masei.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ajungem acum la următoarea expresie a funcţiei Riemann

$$\xi(s) = \frac{\mu^4}{16\pi^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^{2-s}\frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)}\int d^4\bar{x}\,, \tag{1.60}$$

valabilă pentru $s-2>0$, $\xi(s)$ putând fi însă prelungit analitic, iar

$$\Gamma[s] = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\,dt\,,\ \mathrm{Re}(s)>0$$

este integrala eulerianã de speţa a doua. Cu ajutorul lui (1.60), expresia determinantului (1.50) capătă forma explicită

$$\det K = \exp\left[-\frac{d\xi(s)}{ds}\bigg|_{s=0}\right] = \exp\left[\frac{m^4}{32\pi^2}\left(-\frac{3}{2}+\ln\frac{m^2}{\mu^2}\right)\right]. \tag{1.61}$$

Aceasta evidenţiază prezenţa, în $Z_E[J]$, a unui termen corectiv, proporţional cu $\hbar$, derivând din termenul suplimentar

$$V_1 = \frac{m^4}{64\pi^2}\left(-\frac{3}{2}+\ln\frac{m^2}{\mu^2}\right), \tag{1.62}$$

care, adăugat lui V_0, ne conduce la aşa-numitul *potenţial efectiv* al teoriei

$$V_{ef} = V_0 + \hbar V_1 + \mathcal{O}(\hbar^2)\,. \tag{1.63}$$

Această noţiune are o importanţă deosebită în cazul lagrangeienilor conţinând, pe lângă termenii pătratici în ϕ, termeni de self-interacţiune de forma $V_{int} = \frac{\lambda}{4!}\phi^4$. În mod formal, potenţialul efectiv se va obţine, în acest caz, înlocuind în expresia precedentă pe m^2 cu

$$\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}(V_0+V_{int})|_{\phi=\phi_c} = m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_c^2\,, \tag{1.64}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică [11, 55]

$$V_{ef} = \frac{1}{2}m^2\phi_c^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi_c^4 + \\ + \frac{\hbar}{64\pi^2}\left(m^2+\frac{\lambda\phi_c^2}{2}\right)^2\left(-\frac{3}{2}+\ln\frac{m^2+\frac{\lambda\phi_c^2}{2}}{\mu^2}\right)+\mathcal{O}(\hbar^2)\,, \tag{1.65}$$

unde ϕ_c este valoarea medie de aşteptare a operatorului $\phi(x)$ în prezenţa sursei externe $J(x)$, definită prin (1.30).

D. Câmpul spinorial

Este firesc să încercăm acum aplicarea metodei funcţionale la aflarea funcţiei Green corespunzătoare câmpului Dirac şi câmpului electromagnetic. Pentru simplitate, vom efectua calculele direct în spaţiul real, subînţelegând însă că mărimile obţinute sunt prelungirea analitică a celor din spaţiul euclidian.

Să considerăm, mai întâi, cazul câmpului spinorial descris de lagrangeianul Dirac uzual, care, după adăugarea curenţilor fictivi $\bar{J}(x)$ şi $J(x)$, conduce la acţiunea

$$S[\bar{\psi},\psi] = \int d^4x\left[-\bar{\psi}(x)\left(\gamma^i\partial_i+m\right)\psi(x) + \bar{J}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)J(x)\right]\,, \tag{1.66}$$

ce scoate în evidenţă operatorul

$$K(x,y) = \delta^4(x-y)\left(\gamma^i\partial_i+m\right)\,, \tag{1.67}$$

al cărui invers ne dă chiar funcţia Green corespunzătoare câmpului analizat, adică

$$i\Delta_D(x,y) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\exp\left[ik(x-y)\right]}{\gamma\cdot k - im}\,,\quad \text{cu } \gamma\cdot k=\gamma^i k_i\,, \tag{1.68}$$

BCUIAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde $\bar{\psi}$ şi ψ au fost considerate ca variabile independente. Explicitarea integralelor gaussiene implicate în calculul propagatorului impune parcurgerea, mai întâi, a subparagrafului următor, dedicat sistemelor caracterizate de variabile ce anticomută, numite *variabile Grassmann*.

Variabile Grassmann

Fie, deci, o algebră Grassmann bidimensională, ai cărei generatori satisfac relaţia de anticomutare

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0\,, \quad i, j = \overline{1,2}\,. \tag{1.69}$$

Deoarece proprietatea (1.69) implică

$$\theta_1^2 = \theta_2^2 = 0\,, \tag{1.70}$$

rezultă că orice funcţie scalară $f(\theta_1, \theta_2)$ va avea o dezvoltare finită în serie de forma

$$f(\theta_1, \theta_2) = a_0 + \alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2 + a_{12}\theta_1\theta_2\,, \tag{1.71}$$

unde a_0 şi a_{12} sunt numere obişnuite, iar α_1 şi α_2 sunt variabilele Grassmann, satisfăcând relaţii de anticomutare de tipul (1.69). Pe de altă parte, din

$$\frac{\partial\theta_A}{\partial\theta_B} = \delta_{AB}\,, \tag{1.72}$$

calculăm derivatele funcţiei $f(\theta_1, \theta_2)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\theta_1} &= \frac{\partial}{\partial\theta_1}(a_0 - \theta_1\alpha_1 + \alpha_2\theta_2 + a_{12}\theta_1\theta_2)\\ \frac{\partial f}{\partial\theta_2} &= \frac{\partial}{\partial\theta_2}(a_0 + \alpha_1\theta_1 - \theta_2\alpha_2 - a_{12}\theta_2\theta_1)\,,\end{aligned}$$

adică

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\theta_1} &= -\alpha_1 + a_{12}\theta_2\\ \frac{\partial f}{\partial\theta_2} &= -\alpha_2 - a_{12}\theta_1\,,\end{aligned} \tag{1.73}$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ceea ce permite verificarea relaţiei de anticomutare a derivatelor

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \frac{\partial}{\partial\theta_2}\right\} = 0\,, \tag{1.74}$$

la care se adaugă şi cea de anticomutare a diferenţialelor celor două variabile Grassmann, adică

$$\{d\theta_1\,, d\theta_2\} = 0\,. \tag{1.75}$$

În ceea ce priveşte calculul integralelor, regulile

$$\begin{aligned} \int d\theta_A &= 0 \\ \int d\theta_A\,\theta_B &= \delta_{AB} \end{aligned} \tag{1.76}$$

conduc la rezultatele

$$\begin{aligned} \int d\theta_1\, f(\theta_1, \theta_2) &= -\alpha_1 + a_{12}\,\theta_2 \\ \int d\theta_2\, f(\theta_1, \theta_2) &= -\alpha_2 - a_{12}\,\theta_1\,, \end{aligned} \tag{1.77}$$

sau

$$\int d\theta_A\, f(\theta_1, \theta_2) = -\alpha_1\,\delta_{A1} - \alpha_2\,\delta_{A2} + a_{12}\,\delta_{A1}\,\theta_2 - a_{12}\,\delta_{A2}\,\theta_1\,.$$

Comparând (1.73) cu (1.77), ajungem la o concluzie mai puţin obişnuită, şi anume că integralele funcţiei f după variabilele Grassmann θ_1 sau θ_2 coincid cu derivatele sale în raport cu acestea, adică

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial\theta_1} &= \int d\theta_1\, f(\theta_1, \theta_2) \\ \frac{\partial f}{\partial\theta_2} &= \int d\theta_2\, f(\theta_1, \theta_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\theta_1\partial\theta_2} &= \int d\theta_1 d\theta_2\, f(\theta_1, \theta_2)\,. \end{aligned} \tag{1.78}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să punem în evidenţă, acum, o altă proprietate "ciudată" a variabilelor Grassmann. Fie, deci, integrala

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \, \theta_1 \theta_2 \,,$$

în care operăm schimbarea de variabile

$$\eta_A = b_{AB} \, \theta_B \,, \tag{1.79}$$

astfel încât

$$\eta_1 \, \eta_2 = b_{1A} b_{2B} \theta_A \theta_B = (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}) \, \theta_1 \theta_2 = [\det b] \, \theta_1 \theta_2 \tag{1.80}$$

şi, impunând ca rezultatul integralei de mai sus să rămână neschimbat, obţinem

$$d\eta_1 \, d\eta_2 = [\det b]^{-1} \, d\theta_1 \, d\theta_2 \,, \tag{1.81}$$

adică o relaţie generală de forma

$$\int d\eta_1 \, d\eta_2 \, f(\eta_1, \eta_2) = \int d\theta_1 \, d\theta_2 \left[\det \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right]^{-1} f(\eta_1(\theta_1, \theta_2), \, \eta_2(\theta_1, \theta_2)) \,, \tag{1.82}$$

diferită de regula obişnuită de schimbare a variabilelor

$$\int dy_1 \, dy_2 \, f(y_1, y_2) = \int dx_1 \, dx_2 \left[\det \frac{\partial y}{\partial x} \right] f(y_1(x_1, x_2), \, y_2(x_1, x_2)) \,.$$

Încheind aceste consideraţii cu caracter general, să trecem acum la calculul integralelor gaussiene după variabilele de tip Grassmann. Astfel, în cazul unei algebre Grassmann bidimensionale, integrala

$$Int(A) = \int d\theta_2 \, d\theta_1 \, \exp\left[\frac{1}{2} \theta_A \, A_{AB} \, \theta_B \right] \,, \quad \text{cu } A_{12} = -A_{21} \,, \tag{1.83}$$

unde exponenţiala admite dezvoltarea finită în serie

$$\exp\left[\frac{1}{2} \theta_A \, A_{AB} \, \theta_B \right] = 1 + \frac{1}{2} \theta_A \, A_{AB} \, \theta_B = 1 + A_{12} \, \theta_1 \theta_2 \,,$$

BCU IASI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ne conduce la rezultatul

$$\int d\theta_2\, d\theta_1 \exp\left[\frac{1}{2}\theta_A\, A_{AB}\, \theta_B\right] = A_{12} = \sqrt{\det A}\,. \tag{1.84}$$

Generalizând relaţiile (1.69 - 82) pentru cazul unei algebre Grassmann n dimensionale, vom avea

$$\begin{aligned} &\text{b)} \quad \int d\theta_n \ldots d\theta_1 \exp\left[\frac{1}{2}\theta_A A_{AB}\theta_B\right] = \sqrt{\det A} \\ &\text{c)} \quad \int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 \ldots d\theta_n d\bar{\theta}_n \exp\left[\bar{\theta}_A A_{AB}\theta_B\right] = \det A\,, \end{aligned} \tag{1.85}$$

ce constituie analogul, în spaţiul variabilelor Grassmann, al integralelor (16.b, c).

Revenind la cuantificarea câmpului de spin 1/2, cu ajutorul lui (85.c), calculăm acum funcţionala

$$Z_E[\bar{J}, J] = \int [d\psi][d\bar{\psi}] \exp\left\{\int d^4\bar{x}\, d^4\bar{y}\, \left[-\bar{\psi}(\bar{x})\, K(\bar{x},\bar{y})\, \psi(\bar{y})\right] + \right.$$
$$\left. + \int d^4\bar{x}\, \left[\bar{J}(\bar{x})\psi(\bar{x}) + \bar{\psi}(\bar{x})J(\bar{x})\right]\right\} \tag{1.86}$$

ca pe o integrală gaussiană infinit dimensională de forma

$$\begin{aligned} &Z_E[\bar{J}, J] = \\ &= \int d\psi_1 d\bar{\psi}_1 \ldots d\psi_n d\bar{\psi}_n \exp\left\{\sum_{r,s}\left[-\bar{\psi}_r K_{rs}\psi_s + \bar{J}_r\psi_r + \bar{\psi}_r J_r\right]\right\} = \\ &= (\det K) \exp\left\{\sum_{r,s} \bar{J}_r \left(K^{-1}\right)_{rs} J_s\right\} \end{aligned} \tag{1.87}$$

şi obţinem, prin trecerea în spaţiul real, că funcţia Green conexă coincide cu

$$\Delta_D(x,y) = i^2 \left.\frac{\delta^2 \ln Z[\bar{J}, J]}{\delta\bar{J}(x)\delta J(y)}\right|_{\bar{J}=J=0} = K^{-1}(x,y)\,, \tag{1.88}$$

a cărei imagine în spaţiul 4-impulsurilor are forma uzuală (1.68).

BCU IASI / CONTRACT UNIVERSITY LIBRARY

E. Câmpul electromagnetic

În încheierea acestui prim paragraf, este firesc să încercăm aplicarea formalismului funcţional dezvoltat până acum, la cazul câmpului electromagnetic descris de funcţionala

$$Z[J] = \int [dA_i] \exp\left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + J_k A^k \right] \right\} =$$
$$= \int [dA_i] \exp\left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} \left(\partial_i A_j - \partial_j A_i \right) \left(\partial^i A^j - \partial^j A^i \right) + J_k A^k \right] \right\}. \tag{1.89}$$

Integrând prin părţi primul termen al exponenţialei, obţinem expresia

$$Z[J] = \int [dA_i] \times$$
$$\times \exp\left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{2} A^i(x) \left(\partial_i \partial_j - g_{ij} \partial_k \partial^k \right) A^j(x) + J_i(x) A^i(x) \right] \right\}, \tag{1.90}$$

în care am pus în evidenţă operatorul simetric

$$K_{ij}(x-y) = \left(\partial_i \partial_j - g_{ij} \partial_k \partial^k \right) \delta^4(x-y) , \tag{1.91}$$

al cărui invers, în spaţiul 4-impulsurilor, ne va da funcţia Green asociată fotonului prin

$$\left(g_{ij} k^2 - k_i k_j \right) G^{jl}(k) = \delta_i^l . \tag{1.92}$$

Din condiţia de invarianţă Lorentz rezultă că expresia cea mai generală a unui tensor de rang doi, funcţie numai de cuadrivectorul k^i, este

$$G^{jl}(k) = g^{jl} P(k^2) + k^j k^l Q(k^2) . \tag{1.93}$$

Aceasta, înlocuită în (1.92), conduce la o relaţie de forma

$$k^2 P(k^2) \delta_i^l - k_i k^l P(k^2) = \delta_i^l ,$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

imposibil de satisfăcut.

În concluzie, aplicând formalismul integralei de drum dezvoltat în cadrul acestui paragraf, nu se poate calcula propagatorul fotonului, deoarece operatorul K_{ij}, furnizat de acţiunea câmpului electromagnetic, nu are invers.

Această problemă îşi va găsi rezolvarea în paragraful următor, dedicat cuantificării câmpurilor *gauge*. După cum vom vedea, integrala funcţională va fi modificată prin includerea unui factor exponenţial, exprimând o condiţie de fixare a etalonului de tipul $\partial_i A^i = 0$. În acest fel, acţiunea capătă un termen suplimentar, care îl aduce pe $K_{ij}(x-y)$, dat de (1.91), la o expresie inversabilă.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6.2 Cuantificarea câmpurilor de etalonare

Teoriile de etalonare descriu sisteme cu variabile dinamice cu constrângeri. Procedura de cuantificare a câmpurilor *gauge* este mai complicată, integrala funcţională trebuind să reflecte condiţiile de fixare a etalonului. Problema a fost complet soluţionată de către R.P. Feynman (1963) [23], B.S. DeWitt (1967) [18], L.D. Fadeev şi V.N. Popov (1967) [21].

Să considerăm, de la început, cazul teoriilor *gauge* neabeliene, procedura de cuantificare a câmpului electromagnetic, considerat ca fiind cel mai simplu câmp *gauge*, decurgând în mod analog.

În Capitolul 1, am introdus lagrangeianul Yang-Mills [70]

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{4} F^a_{ij} F^{ij}_a \; ; \quad a = \overline{1,n} \, ,$$

cu

$$F^a_{ij} = \partial_i A^a_j - \partial_j A^a_i + g f^a_{bc} A^b_i A^c_j \, ,$$

invariant faţă de grupul transformărilor locale

$$U(\alpha) = \exp\left[-i \alpha^a T_a\right] \, , \tag{2.1}$$

unde $\{\alpha^a\}_{a=\overline{1,n}}$ sunt parametrii grupului, iar $\{T_a\}_{i=\overline{1,n}}$ sunt generatorii algebrei $\mathcal{SU}(N)$, satisfăcând relaţiile uzuale de comutare

$$[T_a \, , T_b] = i f_{abc} T^c \, ,$$

unde constantele de structură f_{abc} sunt total antisimetrice. Transformarea (2.1) poate fi scrisă infinitezimal ca

$$U(\alpha) = 1 - i\alpha^a T_a + \mathcal{O}(\alpha^2) \approx 1 - ic \, , \tag{2.2}$$

în care am introdus notaţia

$$c = \alpha^a T_a \tag{2.3}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi am neglijat puterile superioare ale lui α.

Acţiunea Yang-Mills este invariantă la transformare locală de etalonare

$$T_b A_i^b \rightarrow T_b A_i'^b = U(\alpha) T_b A_i^b U^{-1}(\alpha) - \frac{i}{g} (\partial_i U(\alpha)) U^{-1}(\alpha) ,$$

pe care o putem rescrie, utilizând notaţia matriceală

$$A_i = T_a A_i^a , \tag{2.4}$$

ca

$$A_i \rightarrow A_i'^{(\alpha)} = U(\alpha) A_i U^{-1}(\alpha) - \frac{i}{g} (\partial_i U(\alpha)) U^{-1}(\alpha) . \tag{2.5}$$

Pentru un A_i fixat, $A_i^{(\alpha)}$ descrie o orbită, numită *orbită gauge*, atunci când $U(\alpha)$ parcurge toate elementele grupului de invarianţă. Integrala funcţională trebuie să se efectueze pe o hipersuprafaţă ce intersectează fiecare orbită o singură dată, ceea ce conduce la introducerea, în expresia integralei funcţionale, a unui factor de volum, care să "fixeze" traiectoria de integrare.

Ilustrăm această afirmaţie pentru cazul simplu al unui sistem descris, în spaţiul bidimensional, de acţiunea invariantă la rotaţii

$$S(r, \theta) = S(r, \theta + \varphi) .$$

Cum $S(r, \theta)$ este constantă pe o traiectorie circulară de rază r, "fixăm" unghiul θ prin *constrângerea* $\theta = \varphi$, evaluăm

$$Z_\varphi = \int dr \exp[i S(r, \varphi)] ,$$

după care integrala după coordonata polară revine la

$$Z = \int d\varphi Z_\varphi = Z_\varphi \int d\varphi = 2\pi Z_\varphi ,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

în care am pus în evidenţă factorul de volum $\int d\varphi = 2\pi$. Constrângerea $\theta = \varphi$ poate fi introdusă în calculul lui Z cu ajutorul funcţionalei δ, utilizând

$$1 = \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \varphi)\, d\varphi$$

şi avem

$$Z = \int d\varphi \int dr d\theta\, \delta(\theta - \varphi)\, \exp[iS(r,\theta)]\,.$$

În general, orice constrângere de forma

$$f(r(\theta)) = 0\,,$$

care furnizează o singură valoare $\theta = \varphi$ pentru un r dat, poate fi inclusă în procedura de cuantificare, utilizând proprietatea funcţionalei δ :

$$\int \delta(f(r_\varphi))\, d\varphi = \frac{1}{\Delta_f} \quad ,\text{cu} \quad \Delta_f = \left.\frac{\partial f(r,\theta)}{\partial \theta}\right|_{f=0}\,,$$

prin

$$Z = \int d\varphi \int dr d\theta\, \exp[i\, S(r,\theta)]\, \Delta_f\, \delta(f(r_\varphi))\,.$$

După acest exemplu, să trecem la procedura concretă de cuantificare a câmpurilor *gauge*. Necesitatea introducerii unui factor exponenţial suplimentar a fost deja prezentată în încheierea paragrafului anterior şi se poate realiza, în mod concret, prin adăugarea la acţiunea S_0 ce descrie câmpurile libere, a unei părţi S_1, neinvariante faţă de transformările locale (2.1). Evident, pentru ca valorile medii pe starea de vid ale oricărei funcţionale *gauge*-invariante să fie independente de alegerea lui S_1, se impune ca

$$\int (d\alpha)\, \exp\left[i\, S_1\left(A^{(\alpha)}, \phi^{(\alpha)}, \ldots\right)\right] = 1\,. \tag{2.6}$$

Urmând exemplul prezentat mai sus, vom considera constrângerea ca fiind chiar etalonarea Lorentz

$$f(A_i) = \partial^i A_i = 0\,. \tag{2.7}$$

Deoarece $f\left(A_i^{(\alpha)}\right) = 0$ admite o soluţie α unică [10, 11] pentru un A_i dat, rezultă că ecuaţia (2.7) este o *condiţie de fixare a etalonului* (*gauge fixing condition*), pe care o includem în teorie, exprimând exponenţiala din (2.6) ca

$$\exp\left[iS_1\right] = \Delta(A)\,\delta(\partial_i A^i) = \Delta(A)\int db\,\exp\left[i\int d^4x\,b\,\partial_i A^i\right]\,, \qquad (2.8)$$

în care factorul $\Delta(A)$ urmează să fie determinat. Pentru aceasta, vom rescrie relaţia (2.5), pentru U dat de (2.2), sub forma

$$A_i^{\prime(\alpha)} = A_i - \frac{1}{g}D_i c\,, \qquad (2.9)$$

unde am notat

$$D_i c = \partial_i c - ig\left[A_i, c\right] \qquad (2.10)$$

şi vom impune relaţiei (2.8) condiţia (2.6), adică

$$\Delta(A)\int (d\alpha)\,db\,\exp\left[i\int d^4x\,b\,\partial^i A_i^{(\alpha)}\right] = 1\,. \qquad (2.11)$$

Utilizând condiţia (2.7) în (2.9), obţinem

$$\partial^i A_i^{(\alpha)} = -\frac{1}{g}\partial^i D_i c\,, \qquad (2.12)$$

ceea ce ne permite să aducem pe (2.11) la forma

$$\Delta(A)\int (dc)(db)\,\exp\left[-\frac{i}{g}\int d^4x\,b(x)\,\partial^i D_i\,c(x)\right] = 1\,. \qquad (2.13)$$

Câmpurile fictive lorentzian scalare $b(x)$ şi $c(x)$ sunt cunoscute în literatura de specialitate ca *fantomele Fadeev-Popov* (*Fadeev-Popov ghosts*) şi generează diagrame buclă-închisă [21]. Supunându-se statisticii Fermi-Dirac, ele sunt interpretate ca variabile Grassmann, pentru care putem utiliza relaţia (1.85.c) în forma

$$\int [dc][dc]^\dagger\,\exp\left[i\int d^4x\,d^4y\,c_a^\dagger(x)\,M_{ab}(x,y)\,c_b(y)\right] = \det M\,. \qquad (2.14)$$

BCU CLUJ CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

În cazul nostru, putem găsi, prin identificare,

$$M(x,y) = \frac{1}{g}\,\delta^4(x-y)\,\left(\partial^i D_i\right)\,, \tag{2.15}$$

astfel încât

$$\Delta(A) = \det M\,. \tag{2.16}$$

În aceste condiţii, expresia (2.8) devine

$$\begin{aligned}\exp\left[iS_1\right] &= \int [dc][dc]^\dagger \exp\left[i\int d^4x\,d^4y\,c^\dagger(x)\,M(x,y)\,c(y)\right] = \\ &= \int (db)\,\exp\left[i\int d^4x\,b\,\partial^i A_i\right]\,,\end{aligned} \tag{2.17}$$

punând în evidenţă o serie de termeni suplimentari, ce se vor adăuga la acţiunea S_{YM}, asociată câmpului Yang-Mills.

Păstrând în expresiile lui S_{YM} şi S_1 doar termenii corespunzători câmpurilor libere şi adăugând cuplajele la curenţii fictivi, notaţi cu J_i^a, P^a, η^a, $\eta_a^\dagger$, putem, în sfârşit, să construim pe Z :

$$\begin{aligned}&Z_0\left[J_i^a, P^a, \eta^a, \eta_a^\dagger\right] = \int [dA_i]\,[db]\,[dc]\,[dc^\dagger]\,\times \\ &\times \exp\left\{i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}\,\left(\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a\right)\left(\partial^i A_a^j - \partial^j A_a^i\right) + \right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{1}{g}\,c_a^\dagger \partial^i \partial_i c^a + b_a \partial^i A_i^a + J_i^a A_a^i + P^a b_a + \frac{1}{g}\,c_a^\dagger \eta^a + \frac{1}{g}\,\eta_a^\dagger c^a\right]\right\},\end{aligned} \tag{2.18}$$

de unde, integrând prin părţi primul termen al exponenţialei, obţinem funcţionala generatoare a funcţiilor Green conexe pentru câmpurile

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Yang-Mills şi *ghost*:

$$Z_0\left[J_i^a, P^a, \eta^a, \eta_a^\dagger\right] = \int [dA_i]\,[db]\,[dc]\,[dc^\dagger] \times$$

$$\times \exp\left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2} A_i^a(x) \left(g^{ij}\partial^k\partial_k - \partial^i\partial^j \right) A_j^a(x) + \right.\right.$$

$$+ b_a(x)\,\partial^i A_i^a(x) + P_a(x) b^a(x) + J_i^a(x) A_a^i(x) +$$

$$\left.\left. + \frac{1}{g} \left(c_a^\dagger(x)\partial^i\partial_i c^a(x) + c_a^\dagger(x)\eta^a(x) + \eta_a^\dagger(x) c^a(x) \right) \right] \right\} . \tag{2.19}$$

Aparent complicată, aceasta este, de fapt, o expresie de forma (1.25), ce are la exponent acţiunea totală a sistemului considerat. Aplicând principiul variaţional

$$\delta S = 0 ,$$

vom obţine următoarele ecuaţii de câmp:

(i) pentru câmpurile de etalonare

$$\left(g^{ij}\partial^k\partial_k - \partial^i\partial^j \right) A_j^a = \partial^i b^a - J^{ai} , \tag{2.20}$$

cu

$$\partial^i A_i^a = - P^a , \tag{2.21}$$

(ii) pentru câmpurile "fantomă"

$$\partial^i\partial_i c^a = - \eta^a . \tag{2.22}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Soluţiile

$$A_i^a = -\frac{1}{\partial^2}\left(g_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\partial^2}\right) J^{aj} - \frac{1}{\partial^2}\,\partial_i P^a \tag{2.23}$$

$$b^a = \frac{1}{\partial^2}\,\partial_i J^{ai} \tag{2.24}$$

$$c^a = -\frac{1}{\partial^2}\,\eta^a \tag{2.25}$$

evidenţiază, în (2.23), funcţia Green pentru câmpurilor Yang-Mills

$$G_{ij}^{ab}(x,y) = \frac{1}{\partial^2}\left(g_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\partial^2}\right)\delta^{ab}\,\delta^4(x-y) \tag{2.26}$$

sau, în spaţiul 4-impulsurilor,

$$i\Delta_{ij}^{ab}(k) = -i\left(g_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)\frac{\delta^{ab}}{k^2 - i\varepsilon} \tag{2.27}$$

şi, în (2.25), funcţia Green corespunzătoare câmpurilor "fantomă"

$$G^{ab}(x,y) = \frac{1}{\partial^2}\,\delta^{ab}\,\delta^4(x-y)\,, \tag{2.28}$$

cu imaginea în spaţiul 4-impulsurilor

$$i\delta^{ab}(k) = -i\frac{\delta^{ab}}{k^2 - i\varepsilon}\,. \tag{2.29}$$

Câmpurile "fantomă" reprezentându-se printr-o linie punctată, cu direcţie, ca în cazul câmpurilor fermionice, particula se va deosebi de antiparticulă.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

A. Propagatorul Yang-Mills într-un etalon oarecare

Generalizând condiţia de etalonare Lorentz la

$$\partial^i A_i^a(x) = B^a(x)\,, \tag{2.30}$$

vom exprima pe (2.8) sub forma

$$\begin{aligned}\exp\left[iS_1\right] &= \Delta(A)\,\delta\left(\partial^i A_i^a - B^a\right) = \\ &= \Delta(A)\int db\,\exp\left[i\int d^4x\, b_a\left(\partial^i A_i^a - B^a\right)\right]\,. \end{aligned}\tag{2.31}$$

Introducând în expresia lui Z_0 constanta

$$N = \int [dB]\,\exp\left[-\frac{i}{2\xi}\int d^4x\, B^2(x)\right]\,, \tag{2.32}$$

unde ξ se numeşte *parametru de etalonare*, vom aduce expresia (2.18) la forma

$$\begin{aligned} Z_0\left[J_i^a\,,\,P^a\,,\,\eta^a\,,\,\eta_a^\dagger\right] &= \int [dA_i]\,[dB]\,[db]\,[dc]\,[dc^\dagger]\,\times \\ &\times \exp\left\{i\int d^4x\,\left[-\frac{1}{4}\left(\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a\right)\left(\partial^i A_a^j - \partial^j A_a^i\right) + \right.\right. \\ &+ b_a\left(\partial^i A_i^a - B^a\right) - \frac{1}{2\xi}B^a B_a + \\ &\left.\left. + J_i^a A_a^i + P^a b_a + \frac{1}{g}\left(c_a^\dagger \partial^i \partial_i c^a + c_a^\dagger \eta^a + \eta_a^\dagger c^a\right)\right]\right\}\,, \end{aligned}\tag{2.33}$$

care, după efectuarea integralei după B^a şi rescrierea primului termen

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

al exponenţialei într-o formă convenabilă, devine

$$Z_0\left[J_i^a,\,\eta^a,\,\eta_a^\dagger\right] = \int [dA_i]\,[dc]\,[dc^\dagger]\,\times$$

$$\times \exp\left\{i\int d^4x\left[\frac{1}{2}A_i^a(x)\left(g^{ij}\partial^k\partial_k - \partial^i\partial^j\right)A_j^a(x) - \frac{1}{2\xi}\left(\partial^i A_i^a\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + J_i^a(x)A_a^i(x) + \frac{1}{g}\left(c_a^\dagger(x)\partial^i\partial_i c^a(x) + c_a^\dagger(x)\eta^a(x) + \eta_a^\dagger(x)c^a(x)\right)\right]\right\},$$

sau

$$Z_0\left[J_i^a,\,\eta^a,\,\eta_a^\dagger\right] = \int [dA_i]\,[dc]\,[dc^\dagger]\,\times$$

$$\times \exp\left\{i\int d^4x\left[\frac{1}{2}A_i^a(x)\left(g^{ij}\partial^k\partial_k - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^i\partial^j\right)A_j^a(x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + J_i^a(x)A_a^i(x) + \frac{1}{g}\left(c_a^\dagger(x)\partial^i\partial_i c^a(x) + c_a^\dagger(x)\eta^a(x) + \eta_a^\dagger(x)c^a(x)\right)\right]\right\}. \tag{2.34}$$

În expresia funcţionalei generatoare (2.34), separăm partea corespunzătoare câmpului vectorial liber, adică

$$Z_{YM}[J_i^a] = \int [dA_i]\,\exp\left\{i\int d^4x\left[\frac{1}{2}A_i^a(x)\,K_{ab}^{ij}(x)\,A_j^b(x) + J_i^a(x)A_a^i(x)\right]\right\} \tag{2.35}$$

de partea corespunzătoare "fantomelor" Fadeev- Popov

$$Z_{FP}[\eta^a,\,\eta_a^\dagger] = \int [dc][dc^\dagger]\,\exp\left\{i\int d^4x\left[c_a^\dagger(x)\,K^{ab}(x)\,c_b(x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + c_a^\dagger(x)\eta^a(x) + \eta_a^\dagger(x)c^a(x)\right]\right\}, \tag{2.36}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde am absorbit factorul $1/g$ prin redefinirea câmpurilor c şi $c^\dagger$ şi a curenţilor fictivi $\eta^\dagger$ şi η.

Ca şi în cazul celorlalte câmpuri libere, am pus deja în evidenţă, în (2.35) şi (2.36), operatorii inversabili

$$K^{ij}_{ab}(x) = \left[g^{ij}\partial^k\partial_k - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^i\partial^j\right]\delta_{ab} \tag{2.37}$$

şi, respectiv,

$$K_{ab}(x) = \partial^2\,\delta_{ab}\,, \tag{2.38}$$

care permit acum calculul integralelor gaussiene din (2.35) şi (2.36), după procedeul (1.40). Astfel, expresiile

$$Z_{YM}[J^a_i] \sim \exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x\,d^4y\,J^a_i(x)\left[K^{ij}_{ab}\right]^{-1}(x,y)\,J^b_j(y)\right\} \tag{2.39}$$

şi

$$Z_{FP}[\eta^a,\eta^\dagger_a] \sim \exp\left\{-i\int d^4x\,d^4y\,\eta^{a\dagger}(x)\,[K_{ab}]^{-1}(x,y)\,\eta^b(y)\right\} \tag{2.40}$$

permit calculul propagatorului câmpurilor Yang-Mills prin

$$G^{ij}_{ab}(x,y) = i^2\,\frac{\delta^2\ln Z_{YM}}{\delta J^a_i(x)\delta J^a_j(y)}\bigg|_{J=0} = \left[K^{ij}_{ab}\right]^{-1}(x,y) \tag{2.41}$$

şi al "fantomelor" Fadeev-Popov, ca fiind dat de

$$G_{ab}(x,y) = i^2\,\frac{\delta^2\ln Z_{FP}}{\delta\eta^{a\dagger}(x)\delta\eta^b(y)}\bigg|_{\eta^\dagger=\eta=0} = [K_{ab}]^{-1}(x,y)\,. \tag{2.42}$$

Inversând expresiile (2.37), (2.38) şi trecând în spaţiul 4-impulsurilor, putem scrie, în sfârşit, *propagatorul câmpurilor Yang-Mills într-un etalon oarecare*

$$i\Delta^{ij}_{ab}(k) = -i\left[g^{ij} - (1-\xi)\,\frac{k^ik^j}{k^2}\right]\frac{\delta_{ab}}{k^2-i\varepsilon} \tag{2.43}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi propagatorul câmpurilor fantomă (2.29).

Comparând (2.43) cu (3.27), observăm că etalonarea Lorentz corespunde lui $\xi = 0$.

B. Propagatorul câmpului electromagnetic

Metoda de cuantificare dezvoltată în cadrul acestui paragraf se aplică şi la cazul celui mai simplu câmp de etalonare care este fotonul. Calculele decurg exact la fel, obţinându-se următoarea expresie a funcţionalei generatoare a funcţiei Green

$$Z_{em}[J_i] = \\ = \int [dA_i] \exp\left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2} A_i(x) K^{ij}(x) A_j(x) + J_i(x) A^i(x) \right] \right\}, \tag{2.44}$$

care ne conduce la propagatorul fotonic, într-un *gauge* oarecare,

$$i\Delta_{ij}(k) = -i \left[g_{ij} - (1-\xi) \frac{k_i k_j}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} \tag{2.45}$$

cu forma sa uzuală, în etalonarea Lorentz,

$$i\Delta_{ij}(k) = -i \left[g_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} . \tag{2.46}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Bibliografie

[1] Aitchison, I.J.R., and Hey, A.J.G. (1982) *Gauge Theories in Particle Physics*, Bristol: Adam Hilger.

[2] Ashtekar, A. (1986) *Lectures on Non-perturbative Canonical Gravity*, ed. F.L. Zhi and R. Ruffini, Singapore: World Scientific.

[3] Bailin, D., and Love, A. (1986) *Introduction to Gauge Field Theory*, Bristol: Adam Hilger.

[4] Belinfante, F.J. (1939) *Physica* 6, 887.

[5] Birrell, N.D., and Davies, P.C.W. (1982) *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[6] Bjorken, J.D., and Drell, S.D. (1964) *Relativistic Quantum Fields*, New York: McGraw-Hill.

[7] Bleuler, K. (1950) *Helv. Phys. Acta* 23, 567.

[8] Canuto, V.M. (1982) *Int. J. Theor. Phys.* 21, 633.

[9] Cartan, E. (1922) *C.R. Acad. Sci (Paris)* 174, 593 ; (1923) *Ann Ec. Norm. Sup.* 40, 323 ; (1924) 41, 1 ; (1925) 42, 17.

[10] Chaichian, M., and Nelipa, N.F. (1984) *Introduction to Gauge Field Theories*, Berlin: Springer-Verlag.

BCU IASI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

[11] Cheng, T.P., and Li, L.F. (1984) *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford: Clarendon Press.

[12] Dariescu, C., and Gottlieb, I. (1993) *TENSOR N.S.* 54, 35 ; 46.

[13] Dariescu, C., Dariescu, M.A., and Gottlieb, I. (1996) *TENSOR N.S.* 57, 204.

[14] Dariescu, C., Dariescu, M.A., et. al. (1992) *Gravitaţia. Pledoarie pentru o nouă teorie a spaţiului şi timpului*, ed. M. Agop, Iaşi: Graphix.

[15] Dariescu, C., and Dariescu, M.A. (1994) *Found. Phys.* 24, 1577.

[16] Dariescu, C., şi Dariescu, M.A. (1997) *Gravitaţie şi Câmpuri în Universul Einstein*, Iaşi: Vesper.

[17] Dariescu, M.A., Dariescu, C., and Gottlieb, I. (1994) *International Workshop on Global Analysis, Differential Geometry and Lie Algebra*, Thessaloniki, (*sub tipar*).

[18] DeWitt, B.S. (1963) în *Dynamical Theory of Groups and Fields*, 1963 Les Houches Summer School ; (1967) *Phys. Rev.* 162, 1239.

[19] Dirac, P.A.M. (1958) *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford: Clarendon Press.

[20] Eddington, A.S. (1921) *Proc. Roy. Soc. Lon.* A99, 104.

[21] Fadeev, L.D., and Popov, V.N. (1967) *Phys. Lett.* 25B, 29.

[22] Feynman, R.P. (1948) *Rev. Mod. Phys.* 20, 267.

[23] Feynman, R.P. (1963) *Acta Phys. Polon.* XXIV, 697.

[24] Feynman, R.P., and Hibbs, A.R. (1965) *Quantum Mechanics and Path Integrals*, New York: McGraw-Hill.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

[25] Freund, G.O. (1986) *Introduction to Supersymmetry*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[26] Fritzsch, H., Gell-Mann, M., and Leutwyler, H. (1973) *Phys. Lett* B47, 365.

[27] Fulling, S.A. (1989) *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[28] Georgi, H., and Glashow, S.L. (1974) *Phys. Rev. Lett* 32, 438.

[29] Gheorghiev, G., şi Oproiu, V. (1977) *Geometrie Diferenţială*, Bucureşti: Ed. Didactică şi Pedagogică.

[30] Gockeler, M., and Schucker, T. (1988) *Differential Geometry, Gauge Theories and Gravity*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[31] Gottlieb, I., şi Mercheş, I. (1975) *Teoria Cuantică a Câmpului*, Fascicula I, Iaşi: Tipografia Univ. "Al.I. Cuza".

[32] Gottlieb, I., Dariescu, C., şi Dariescu, M.A. (1997) *Fundamentarea Mecanicii Cuantice*, Chişinău: Tehnica.

[33] Gupta, S.N. (1950) *Proc. Phys. Soc. Lon.* A63, 681.

[34] Hayashi, K., and Bergman, A. (1973) *Ann. Phys. N.Y.* 75, 562.

[35] Hehl, F.W., and Datta, B.K. (1971) *Phys. Lett.* 36A, 225.

[36] Hehl, F.W. (1973) *Gen. Rel. Grav.* 4, 333; (1974) 5, 491.

[37] Hehl, F.W. (1974) *General Relativity with Spin and Torsion* in the Seminar on *Spin, Torsion and Gauge Groups in General Relativity*, Inst. for Adv. Stud., Princeton, N.Y.

[38] Hehl, F.W. (1985) *Found. Phys.* 15, 451.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

[39] van der Heyde, P. (1975) *Lett. Nuov. Cim* 14, 250.

[40] 't Hooft, G. (1971) *Nucl. Phys.* B35, 167.

[41] Ianuş, S. (1983) *Geometrie Diferenţială cu Aplicaţii în Teoria Relativităţii*, Bucureşti: Ed. Acad. R.S.R.

[42] Ivanenko, D., and Sardanashvily, G. (1983) *Phys. Rep.* 94, 1.

[43] Kaku, M. (1993) *Quantum Field Theory. A Modern Introduction*, Oxford: Oxford Univ. Press.

[44] Källen, G. (1958) *Encyclopedia of Physics*, Vol. V, Berlin: Springer.

[45] Kibble, T.W.B. (1961) *J. Math. Phys.* 2, 212.

[46] Kobayashi, S., and Nomizu, K. (1963) *Foundations of Differential Geometry*, New York: Interscience Publ.

[47] Kramers, H.A. (1937) *Proc. Amsterdam Acad.* 40, 814.

[48] Kramer, D., Stephani, H., Herlt, E., and MacCalum M. (1980) *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Ed. E. Schmutzer, Cambridge: Cambridge University Press.

[49] Lee, T.D., and Yang, C.N. (1957) *Brookhaven National Lab.*, Associated Univ. Inc.

[50] Mandl, F., and Shaw, G. (1994) *Quantum Field Theory*, New York: Wiley.

[51] Miron, R., şi Anastasiei, M. (1987) *Fibrate Vectoriale. Spaţii Lagrange. Aplicaţii în Teoria Relativităţii*, Bucureşti: Ed. Acad. R.S.R.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

[52] Mohapatra, R.N. (1986) *Unification and Supersymmetry*, New York: Springer-Verlag.

[53] Novacu, V. (1984) *Teoria Cuantică a Câmpurilor*, Bucureşti: Ed. Tehnică.

[54] Papapetrou, A. (1949) *Phil. Mag.* 40, 937.

[55] Ramond, P. (1981) *Field Theory. A Modern Primer*, Reading: Benjamin/Cummings.

[56] Ross, G.G. (1984) *Grand Unified Theories*, Reading: Benjamin/Cummings.

[57] Salam, A. (1957) *Il Nuovo Cimento* 5, 299 ; (1969) *Elementary Particle Theory*, ed. N. Svartholm, Stockholm: Almquist and Wiksells.

[58] Sciama, D.W. (1964) *Rev. Mod. Phys.* 36, 463 ; 1103.

[59] Soleng, H.H. (1991) *Gen. Rel. Grav.* 23, 1089.

[60] Sterman, G. (1993) *An Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[61] Straumann, N. (1984) *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Berlin: Springer-Verlag.

[62] Trautman, A. (1972) *Bull. Acad. Polon. Sci.* 20, 185, 503, 895 ; 21, 345.

[63] Utiyama, R. (1956) *Phys. Rev.* 101, 1597.

[64] Vladimirov, V.S. (1980) *Ecuaţiile fizicii matematice*, Bucureşti: Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

[65] Wallner, R.P. (1980) *Gen. Rel. Grav.* **12**, 719 ; (1982) *Acta Phys. Austr.* **54**, 162.

[66] Weinberg, S. (1967) *Phys. Rev. Lett* **19**, 1264.

[67] West, P. (1988) CERN-TH Preprint 5165.

[68] Weyl, H. (1950) *Phys. Rev.* **77**, 699.

[69] Wu, T.Y., and Pauchy Hwang, W.Y. (1991) *Relativistic Quantum Mechanics and Quantum Fields*, Singapore: World Scientific.

[70] Yang, C.N., and Mills, R.L. (1954) *Phy. Rev.* **96**, 191.

[71] Zet, G. (1998) *Simetrii unitare şi teorii gauge*, Iaşi: Ed. Gh. Asachi.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Index

amplitudine de tranziţie, 531

chiralitate, 47, 306
condiţia Lorentz, 396, 481, 556, 562

derivată *gauge*-covariantă, 53

ecuaţia Dirac, 265, 275
~ Gordon, 117, 125
~ Schrödinger, 111, 530
ecuaţiile Einstein, 128
~ Maxwell, 395
efectul Klein, 117, 154
elicitate, 29, 513
energie de zero, 197-198, 361, 364-369, 438
etalonare Coulomb, 396

fantome, 122, 475, 560
fixarea etalonului, 558
funcţia de comutare, 210, 219
~ Green, 224-234, 373, 384, 386, 552, 561
~ Heaviside, 219, 387
~ Jordan-Wigner, 377, 379-381
~ Riemann, 547
~ termică, 546
~ Wightmann, 207, 209-222, 231
funcţională generatoare, 129, 340

grupul Lorentz, 23
~ Poincaré, 27, 189
~ $SU(2)$, 56, 135
~ $SU(2) \times U(1)$, 59
~ $SU(5)$, 43

identitatea Belinfante-Rosenfeld, 20, 278
imaginea Heisenberg, 160, 531
~ Schrödinger, 167, 530
impulsul de zero, 193, 346, 357, 436
integrală de drum, 537

lagrangeianul Fock-Dirac, 454

matricele Gell-Mann, 42
~ von Neumann, 267, 294
măsură de integrare, 537
mecanismul Higgs, 56
metoda Bleuler-Gupta, 102
Modelul Weinberg-Salam, 68
moduri de frecvenţă negativă, 138, 429, 461
~ ~ ~ pozitivă, 137, 400, 429, 461

operator $BRST$, 103
~ Casimir, 28
~ de absorbţie, 84
~ ~ anihilare, 83, 182, 208, 327, 335
~ ~ creare, 93, 182, 208, 327, 335

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

operator de emisie, 84
~ ~ sarcină, 204-205, 349
~ ~ spin, 337, 439-442
~ hamiltonian, 196, 347, 437-438, 503
~ impuls, 191-195, 344, 434-436, 497
~ număr de antiparticule, 182, 198, 318, 336
~ ~ ~ particule, 182, 185, 198, 336, 489
operatori de mişcare, 161, 165
~ număr de excitare, 162, 164
orbită *gauge*, 556
ordonare normală, 194

parametri esenţiali, 35
paritate, 50
potenţial efectiv, 547
principiul lui Pauli, 322
~ variaţional, 126, 560
produs cronologic, 250, 386, 443-448
~ normal, 249
~ scalar, 130, 147, 304, 460
proiectori, 308, 312
propagatorul Feynman, 245-247, 390, 393-394, 527, 542, 564-565

relaţia Bohr-Heisenberg, 102, 172-173 206, 320, 427, 462, 466
relaţii de anticomutare, 171, 321, 326, 333, 382
reprezentarea N, 180, 188, 198
~ F, 188

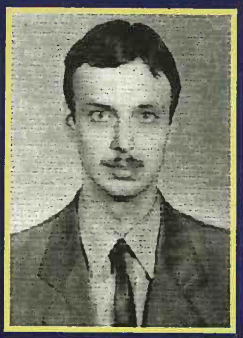
sarcină de zero, 205, 350, 360-364
scalar Higgs, 67
simetrii interne, 22
~ spaţio-temporale, 22
spaţiul Fock, 123, 184, 187
spinori Pauli, 292
~ Weyl, 49
spinul de zero, 354
stare de vid, 61, 252
~ fundamentală, 162
subalgebre Cartan, 37
substracţie standard, 358

tensorul canonic impuls-energie, 16, 277, 281
~ conservativ impuls-energie, 21, 128, 148, 277, 397, 457
~ contorsiunii, 6
~ densităţii de spin, 14, 277, 507, 509
~ Maxwell, 450
~ torsiunii, 17
~ Yang-Mills, 55, 555
teorema Goldstone, 64
teoremele Wick, 255-264

unghiul Weinberg, 71

valoare de aşteptare, 541
variabile Grassmann, 549
vectori de polarizare, 417-418, 420-424, 432
~ rădăcină, 37

B.C.U. „M EMINESCU" IAŞI
F I Z I C Ă



Conf.dr. Ciprian DARIESCU

Născut la 26 octombrie 1962, în Iași. Absolvent, șef de promoție (1985), al Facultății de Fizică, Universitatea *Al. I. Cuza*, Iași, și doctor în științe fizice al aceleiași universități, din 1993. Bursă guvernamentală Monbusho, pentru cercetare, în perioada octombrie 1994-aprilie 1996, Toyama, Japonia. Peste 65 de lucrări publicate în țară și în străinătate în domeniile Relativității Generale, teoriei U4 a gravitației, teoriilor gauge pe spații Riemann-Cartan și aplicațiilor în teorii moderne de cuantificare. Autor al cărților *Fundamentarea Mecanicii Cuantice* și *Gravitație și Câmpuri în Universul Einstein*.

Visiting la Institutul de Fizică Teoretică al Universității din Jena și la Institutul de Cosmologie al Universității Egee din Izmir. Membru în American Mathematical Society, Tensor Society (Japan), Societatea Română de Fizică și membru fondator al Societății Române de Gravitație și Relativitate Generală.

Conf. dr. Marina-Aura DARIESCU

Născută la 23 iunie 1962, în Iași. Licențiată în fizică, Universitatea *Al. I. Cuza*, Iași, promoția 1985, și doctor în științe fizice al aceleiași universități, din 1994. Autor al cărților *Fundamentarea Mecanicii Cuantice* și *Gravitație și Câmpuri în Universul Einstein* și a peste 50 de lucrări publicate în țară și străinătate în domeniul teoriilor gauge și al implicațiilor fenomenologice ale acestora, fizicii mezonilor B, teoriilor de câmp pe $S^3 \times R$.

Visiting la Institutele de Fizică Teoretică ale Universităților din Zürich, Dortmund și Jena. Stagiu de cercetare (mai 1995-martie 1996) la Universitatea din Toyama, Japonia. Membru în Tensor Society (Japan), Societatea Română de Fizică și membru fondator al Societății Române de Gravitație și Relativitate Generală.

Prof. dr. Ioan GOTTLIEB

Născut la 21 ianuarie 1929, în Baia Mare. Licențiat în matematică, Universitatea *Bolyai*, Cluj (1951) și doctor în științe fizico-matematice al Universității *Al. I. Cuza* (1962). Contribuții în Teoria Relativității Generale, Mecanică Cuantică, Teorii Cuantice de Câmp și Geometrie Diferențială, concretizate într-un număr de peste 100 de lucrări științifice și în cărțile *Fundamentarea Mecanicii Cuantice* și *Universuri suprapuse*.

Membru în International Society on General Relativity and Gravitation, American Mathematical Society, Janos Bolyai Mathematical Society, European Academy for Sciences and Arts și fondator al Societății Române de Gravitație și Relativitate Generală. Conducător de doctorat în Fizică Teoretică, din 1971. Șef al Catedrei de Fizică Teoretică și Structura Materiei (1964-1971) și al Catedrei de Fizică Teoretică, din 1990.